К. Ферберъ.

АРИѲМЕТИКА

(РАЗВИТІЕ ПОНЯТІЯ ЧИСЛА)

(ДЛЯ СТУДЕНТОВЪ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ).

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО
Д. А. Бема и Р. Э. Струве,
преподавателей математики Московскихъ учебныхъ заведеній.

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ
А. А. Волкова,
руководителя на курсахъ для подготовленія преподавателей средней школы при Московскомъ Учебномъ округѣ.

Типографія Т-ва И. Д. Сытина, Пятницкая улица, свой домъ.
МОСКВА.—1914.

ВВЕДЕНІЕ

составителей „Основъ Математики“.

„Основы Математики“, первымъ томомъ первой части которыхъ является „Ариѳметика“ Фербера, представляютъ продолженіе и обновленіе книги Baltzer'а „Элементы математики“ въ соотвѣтствіи съ настоящимъ положеніемъ науки.

Тѣ успѣхи, которыми отмѣчено въ математикѣ послѣднее столѣтіе, въ значительной степени коснулись и элементовъ математики.

Согласно болѣе строгимъ методамъ новѣйшей науки, даны болѣе точныя обоснованія и для элементарной математики. Связь, существующая между элементами и болѣе глубокими и широкими вопросами науки, вскрыта и использована для уясненія тѣхъ понятій и методовъ, съ которыми имѣютъ дѣло элементы; благодаря этому, отдѣльныя области элементарной математики получили цѣнное расширеніе по существу.

Если бы кто-либо захотѣлъ познакомиться съ современнымъ состояніемъ элементарной математики, то ему было бы не легко добыть всю литературу этого предмета, разбросанную по отдѣльнымъ докладамъ и работамъ, и получить болѣе глубокое пониманіе элементовъ, основанное на изученіи такого многочисленнаго и часто труднаго матеріала.

До настоящаго времени не имѣлось труда, въ которомъ были бы собраны болѣе или менѣе полно результаты научной работы, относящіеся къ элементамъ математики.

Рамки такого труда оказались бы слишкомъ узкими, если бы онъ ограничивался только исключительно элементами ариѳметики, алгебры и геометріи; казалось цѣлесообразнымъ въ связи съ элементами и основываясь на нихъ, разработать, хотя бы въ основѣ, нѣкоторые дальнѣйшіе вопросы, что со своей стороны можетъ бросить новый свѣтъ и на самые элементы.

Такимъ образомъ нижеподписавшіеся рѣшили сообща заполнить этотъ пробѣлъ въ литературѣ.

„Основы“ разсчитаны на 4 тома, изъ которыхъ два посвящены геометріи, одинъ ариѳметикѣ и одинъ алгебрѣ.

Томъ, посвященный ариѳметикѣ, и первый томъ геометріи по существу должны ограничиться изложеніемъ элементовъ, отвѣчающимъ современному состоянію науки, въ то время какъ въ двухъ остальныхъ томахъ будутъ даны дополненія и продолженія элементовъ въ указанномъ выше смыслѣ, какъ своего рода введеніе къ изслѣдованіямъ, дающимъ возможность болѣе глубокаго пониманія ученій элементарной математики.

Читатели, желающіе болѣе подробно ознакомиться съ какимъ-либо изъ разобранныхъ здѣсь вопросовъ найдутъ соотвѣтствующія литературныя и историческія указанія.

Для изученія предлагаемаго труда достаточно минимальныхъ предварительныхъ свѣдѣній (для ариѳметики и перваго тома геометріи ихъ совсѣмъ не требуется), но во всякомъ случаѣ необходима нѣкоторая способность и склонность къ абстрактному мышленію.

Предлагаемый I-ый томъ первой части этого труда, „Ариѳметика“, ставитъ себѣ цѣлью соединить научную строгость съ требованіями школьнаго преподаванія.

Каждое изъ этихъ требованій въ отдѣльности выполнено въ нѣкоторыхъ изложеніяхъ ариѳметики. Авторъ ставитъ себѣ основной задачей преодолѣть трудность соединенія обоихъ этихъ требованій.

Настоящая книга предназначена служить пособіемъ для подготовки учителя къ преподаванію, но она при этомъ не имѣетъ въ виду предлагать матеріалъ непосредственно въ той формѣ, въ которой онъ пригоденъ для учениковъ среднихъ классовъ.

Какъ первый томъ геометріи, такъ и этотъ томъ, не ограничиваются только тѣмъ, что необходимо нужно для преподаванія, но расширяютъ и углубляютъ матеріалъ болѣе, чѣмъ это возможно при преподаваніи.

При разсмотрѣніи вопросовъ, на которые возможны нѣсколько точекъ зрѣнія, авторъ останавливается на той, которая соотвѣтствуетъ его взглядамъ, въ примѣчаніяхъ же указываетъ на другія мнѣнія и ихъ главныхъ представителей.

Черезъ всю ариѳметику красной нитью проводится развитіе понятія числа. Начиная изложеніе съ натуральныхъ чиселъ, авторъ старается ввести дробныя, отрицательныя, ирраціональныя и комплексныя числа въ такой формѣ, которая съ одной стороны удовлетворяла бы сравнительно строгимъ научнымъ требованіямъ, а съ другой была примѣнима для школьнаго преподаванія.

Ариѳметика, въ томъ видѣ, какъ она изложена здѣсь, быть можетъ, будетъ очень полезна при томъ повтореніи курса, которое требуется программами старшихъ классовъ.

При обработкѣ тома алгебры, которую взялъ на себя E. Netto, авторъ исходитъ изъ того положенія, что основы ариѳметики даютъ фундаментъ для алгебраическихъ изслѣдованій и средства для ихъ выполненія.

Изъ основныхъ вопросовъ алгебры необходимо будетъ выдвинуть теорію алгебраическихъ уравненій, и въ особенности основную теорему о существованіи корней, а затѣмъ теорію системъ уравненій и теорію исключенія; изъ практическихъ соображеній къ алгебрѣ присоединено и ученіе о детерминантахъ въ его основныхъ чертахъ. Съ другой стороны, пришлось исключить теорію алгебраическихъ чиселъ, какъ не соотвѣтствующую общему характеру сочиненія.

Первый томъ второй части [1]) содержитъ элементы геометріи. Терминъ „элементы" понимается сравнительно широко; отдѣльныя ученія разобраны нѣсколько подробнѣе, чѣмъ это принято въ школьныхъ учебникахъ; введены и простѣйшіе отдѣлы аналитической геометріи на плоскости и въ пространствѣ, коническія сѣченія, поверхности второго порядка, начертательная геометрія; въ извѣстномъ объемѣ подвергнуты разсмотрѣнію также и различные методы рѣшенія планиметрическихъ задачъ на построеніе на ряду съ новѣйшей геометріей треугольника и тетраэдра.

Второй томъ геометріи, составленіе котораго принялъ на себя Мейеръ (W. Fr. Meyer), будетъ посвященъ геометрическимъ образамъ съ точки зрѣнія преобразованій; при этомъ особое вниманіе будетъ удѣлено понятіямъ: группа и инваріантъ.

Весь этотъ трудъ, какъ ясно изъ предыдущаго, не предназначенъ непосредственно для преподаванія, но имѣетъ задачею вне-

---

[1]) 2-я часть: «Die Grundlehren der Geometrie», 2 тома. 1 томъ: «Die Elemente der Geometrie», H. Thieme. XII, 394 стр., 1909 г.

сти и свою лепту въ усовершенствованіе обученія математикѣ.

Вопросъ о будущей картинѣ преподаванія математики еще не рѣшенъ.

Хотя послѣдній является скорѣе вопросомъ методики преподаванія, чѣмъ науки, но все-таки и въ этомъ случаѣ выводы преподаваемой науки не могутъ считаться чѣмъ-то второстепеннымъ.

Наоборотъ, эти выводы должны получить первенствующее значеніе въ связи съ реформой преподаванія, если только послѣднее должно дѣйствительно служить духовному усовершенствованію молодежи.

Для этого необходимо, чтобы учителя математики, которымъ придется на практикѣ проводить обновленное преподаваніе, были бы всесторонне знакомы съ современнымъ состояніемъ науки въ соотвѣтственныхъ областяхъ.

W. Fr. Meyer. E. Netto.

H. Thieme. C. Färber.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Какъ уже было сказано во введеніи, основной задачей этого тома является систематическое развитіе понятія числа и изложеніе семи дѣйствій для каждаго изъ введенныхъ видовъ чиселъ.

Отсылая читателя для болѣе подробнаго ознакомленія съ содержаніемъ къ достаточно полному оглавленію книги, я считаю нужнымъ поставить на видъ изъ предложеннаго здѣсь матеріала только слѣдующее. Въ первой главѣ („натуральныя числа") особенно подчеркнуто большое значеніе систематическихъ чиселъ для овладѣнія областью чиселъ при помощи нашего интеллекта и для выполненія операцій счета (ср. стр. 29 прим. 1). Третья глава „Систематическія дроби" содержитъ подробную теорію періодическихъ дробей и дѣйствій надъ приближенными числами. Послѣ обоснованія въ первыхъ четырехъ главахъ дѣйствій надъ натуральными, дробными и относительными числами, въ пятой излагаются всѣ тѣ отдѣлы ариѳметики, въ которыхъ можно обойтись только этими (раціональными) числами. Такъ какъ уже во второй главѣ (см. стр. 104) указано, въ какомъ смыслѣ можно разсматривать кубичный и квадратный корень изъ любого положительнаго числа въ области раціональныхъ чиселъ, то въ главѣ V § 5 устанавливается и понятіе логариѳма какого-либо положительнаго числа при какомъ-либо положительномъ основаніи (ср. стр. 259, прим. 1 и стр. 268—264). Въ §§, посвященныхъ изложенію ариѳметическихъ рядовъ любого порядка, данъ выводъ независимыхъ (отъ рекурсіонныхъ формулъ) выраженій суммъ степеней членовъ ряда натуральныхъ чиселъ.

VI глава представляетъ переработку опубликованной авторомъ въ 1900 г. брошюры объ иррадіональныхъ числахъ (Приложеніе къ программѣ высшаго реальнаго училища въ Берлинѣ—Louisenst-Oberrealschule zu Berlin 1900). Наконецъ VII глава даетъ подробную теорію паръ чиселъ, главнымъ образомъ, обыкновенныхъ комплексныхъ (ср. кон. § 1 стр. 374).

Всѣ вопросы ариѳметики, которые имѣютъ мѣсто въ школѣ, здѣсь разсматриваются возможно полно и равномѣрно, чтобы позволить читателю при преподаваніи черпать изъ полнаго источника. Такъ какъ (въ читателѣ) предполагается нѣкоторая склонность и способность къ абстрактному мышленію, а не спеціальныя познанія (за исключеніемъ одного мѣста VII главы, стр. 434), то эта книга была бы полезна и для тѣхъ учителей, которые преподаютъ ариѳметику въ „высшихъ школахъ" (среднихъ учебныхъ заведеніяхъ) и дала бы возможность поставить преподаваніе на научныхъ основахъ и, такимъ образомъ, наиболѣе цѣлесообразно подготовить учениковъ къ изученію ариѳметики въ будущемъ. Задачи введены лишь постольку (а именно въ главѣ V, § 7, „Теорія вѣроятностей"), поскольку они казались необходимыми для уясненія теоріи.

Особенное вниманіе во всѣхъ частяхъ книги обращено на точность изложенія, на строгое разграниченіе произвольно устанавливаемыхъ положеній и необходимо вытекающихъ изъ нихъ слѣдствій. При всѣхъ формулировкахъ, теоремахъ и формулахъ указывается, для какой области чиселъ онѣ справедливы. Опредѣленія не должны падать читателю какъ снѣгъ на голову; я, напротивъ, старался указать, на основаніи какихъ именно причинъ пришли къ такому, а не другому установленію понятія.

Особенное вниманіе посвящено вопросамъ, которые даже въ нѣкоторыхъ недавно появившихся изложеніяхъ не отличаются еще необходимой ясностью (приведу для примѣра умноженіе относительныхъ чиселъ, стр. 186—189; различіе между условными и безусловными равенствами, стр. 192—194, 427—430, 445—450, логариѳмъ отрицательнаго числа стр. 438—439, 441—444 и т. д.).

Я не могъ присоединиться къ чисто формальному опредѣленію различныхъ видовъ чиселъ, которое дается теперь въ большинствѣ новѣйшихъ изложеній. (См. напр. стр. 85) H. Hankel (теорія системъ комплексныхъ чиселъ, Лейпцигъ 1867 г., стр. 7) и G. Cantor (Mathematische Annalen, Bd. XXI, стр. 562) высказались ясно и опредѣленно, что о реальности какого то ни было понятія числа можно говорить въ двухъ смыслахъ. Канторъ приписываетъ понятію числа имманентную реальность, если это понятіе на основаніи опредѣленія занимаетъ въ нашемъ сознаніи опредѣленное мѣсто, очень ярко отличаясь отъ другихъ составныхъ частей нашего мышленія и находится съ ними въ опредѣленныхъ отношеніяхъ. Если же кромѣ того есть возможность показать, что понятіе числа есть отображеніе объектовъ или отношеній во внѣшнемъ мірѣ, противополагаемомъ нашему интеллекту, то Канторъ говоритъ, что этому числу принадлежитъ транзіентная реальность. И если чистая наука (которую Канторъ въ цитированномъ мѣстѣ называетъ „свободной" математикой), при своихъ построеніяхъ можетъ довольствоваться имманентной реальностью понятія числа, то, по моему мнѣнію, для школы указаніе на его транзіентную реальность безусловно необходимо. Въ силу этого въ предлагаемой книгѣ всѣ числа выводятся изъ разсмотрѣнія множествъ, между элементами которыхъ существуютъ тѣ или другія соотношенія (ср. глава I, § 1, глава II, § 1, глава IV, § 1, глава VII, § 2). Для ирраціональныхъ чиселъ указаніе на ихъ транзіентную реальность выполняется при помощи отношеній (между величинами) (глава VI, § 8), а для обыкновенныхъ комлексныхъ чиселъ посредствомъ векторовъ на плоскости. (Глава VII, § 3). Это отношеніе ариѳметики къ дѣйствительности, кажется мнѣ самымъ существеннымъ зерномъ въ новѣйшихъ стремленіяхъ къ реформѣ, поскольку они касаются ариѳметики.

Напротивъ, я мало пользуюсь графическимъ изображеніемъ функціональной зависимости, (за исключеніемъ отдѣла о векторахъ на плоскости и то только при изслѣдованіи показательной функціи, стр. 434), которое играетъ значительную роль и въ высшей степени подробно излагается въ большинствѣ новѣйшихъ учебниковъ: предлагаемое руководство не является методическимъ, но чисто систематическимъ; сверхъ того, всякій преподаватель математики, владѣющій элементами аналитической геометріи, безъ особеннаго труда примѣнитъ графическій методъ къ преподаванію ариѳметики тамъ, гдѣ это ему понадобится. Въ заключеніе слѣдуетъ указать, что историческія ссылки большею частью взяты изъ „Лекцій по исторіи математики" М. Кантора и „Исторіи элементарной математики" І. Тропфке[1]).

Берлинъ конецъ сентября 1910 г.

C. Färber.

---

[1]) См. русскій переводъ Д. А. Бема и Р. Э. Струве, подъ редакціей І. И. Чистякова (*Ред.*).

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Глава II.

Дробныя числа и въ особенности простыя дроби.

Глава III.

Систематическія дроби.

Глава IV.

Относительныя числа.

Глава V.

Операціи въ области раціональныхъ чиселъ.

Глава VI.

Ирраціональныя числа.

Глава VII.

Комплексныя числа.

ГЛАВА I.

Натуральныя числа.

§ 1. Понятіе натуральнаго числа.

Ариѳметика есть наука о числахъ и ихъ соединеніяхъ. Ея первая задача состоитъ въ отвѣтѣ на вопросъ: „что такое число и каково происхожденіе понятія числа". Нашъ внутренній опытъ говоритъ намъ, что содержаніе нашего сознанія не есть недѣлимое цѣлое, а напротивъ, мы способны отграничивать одни представленія отъ другихъ. При этомъ одни изъ нихъ интересуютъ насъ главнымъ образомъ, другія тѣмъ не менѣе изъ сознанія не исчезаютъ. Если мы воспримемъ каждое интересующее насъ въ извѣстный моментъ представленіе, какъ таковое, и при помощи мыслительнаго акта соединимъ представленія въ одно цѣлое, не обращая вниманія на ихъ группировку, то придемъ къ установленію понятія „множественность, множество, („Vielheit", „Mehrheit", „Menge") совокупность или аггрегатъ" вещей, при чемъ слово вещь употребляется въ самомъ широкомъ смыслѣ: оно можетъ означать все, что можетъ быть предметомъ нашего представленія. Въ составъ совокупности могутъ входить самыя разнородныя вещи. При образованіи понятія множественности наше вниманіе направлено не на содержаніе отдѣльныхъ представленій, но на ихъ коллективное [1]) соединеніе, происшедшее въ силу нѣкотораго психическаго акта.

Каждое представленіе, особенности внутренняго содержанія котораго въ настоящій моментъ намъ не важны, мы можемъ обо-

---

[1]) Это названіе примѣняетъ E. Housserl въ своей «Philosophie der Arithmetik» (Halle, 1891), которая оказала большое вліяніе на изложеніе понятія числа въ этомъ §. Совершенно подобный же взглядъ находится и въ сочиненіи G. Cantor'а: «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre» Mathem. Annal. Bd. 46, стр. 481.

значить какъ „нѣчто“ или „одинъ“, и такъ какъ коллективное соединеніе находитъ себѣ выраженіе въ разговорномъ языкѣ при помощи союза „и“, то множественность (Vielheit) обозначаетъ не что иное, какъ „нѣчто“ и нѣчто, и нѣчто и т. д. или „одинъ, и одинъ, и одинъ, и одинъ и т. д.“. Отдѣльныя понятія „одинъ и одинъ“, „одинъ и одинъ и одинъ“, „одинъ и одинъ и одинъ и одинъ“ и т. д. въ силу ихъ практической важности уже на первыхъ ступеняхъ культуры съ давнихъ временъ получили особыя названія у всѣхъ народовъ: „два“, „три“, „четыре“ и т. д. Общее названіе образовавшихся такъ понятій есть „число“ (Anzahl) или „натуральное число“ или (въ противоположность другимъ, позднѣе вводимымъ числамъ) „положительное цѣлое число“.

Счетъ какого-либо множества вещей производится, по крайней мѣрѣ первоначально, отвлекаясь совершенно отъ особенностей каждой вещи; каждая вещь воспринимается какъ „одинъ“; всѣ эти „одинъ“, не обращая вниманія на ихъ порядокъ, въ сознаніи соединяютъ въ одно цѣлое и образовавшейся такимъ способомъ множественности даютъ соотвѣтственныя названія: „два“ или „три“, „четыре“ и т. д. Если пересчитываемыя вещи всѣ окажутся однородными, т.-е. имѣющими одинаковые признаки съ интересующей насъ стороны и носящими, согласно этому, общее названіе, то можемъ впослѣдствіи, т.е. выполнивъ счетъ, присоединить это названіе, и тогда мы получаемъ представленіе объ „именованномъ“ числѣ. Подъ только что данное понятіе числа, строго говоря, не подходитъ понятіе „одинъ“ и тѣмъ болѣе понятіе „нуль“, которое означаетъ отсутствіе вещи опредѣленнаго рода въ данномъ множествѣ; въ самомъ дѣлѣ, „одинъ“ и „нуль“ не являются слѣдствіями коллективнаго соединенія [1]). Но такъ какъ между понятіями „одинъ“ и „нуль“ и собственно числами существуютъ совершенно [2]) такія же отношенія, какъ и между только этими послѣдними, то мы расширяемъ нашу числовую область, включая въ нее понятія одинъ и нуль.

---

[1]) Пиѳагорейцы говорили: (ср. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik I, 2 Aufl. стр. 147). «Единица есть начало всѣхъ чиселъ, но само не есть число»—взглядъ снова встрѣчающійся у арабскихъ и христіанскихъ математиковъ эпохи среднихъ вѣковъ. Разсмотрѣнію нуля, какъ числа, мы прежде всего обязаны индусамъ. Знакъ для изображенія нуля, согласно Cantor'у, (Vorlesungen I, стр. 569) относится къ 400 году по Р. Х.

[2]) Характерныя особенности единицы и нуля сказываются всегда въ многочисленныхъ исключеніяхъ, встрѣчающихся при дѣйствіяхъ надъ этими числами.

Указаннымъ путемъ мы можемъ въ дѣйствительности установить лишь немногія числовыя понятія, такъ какъ для насъ является невозможнымъ воспринять раздѣльно болѣе, чѣмъ десять, двѣнадцать объектовъ и одновременно соединить ихъ въ нашемъ сознаніи въ одно цѣлое. Если бы мы могли ограничиться только собственнымъ представленіемъ множества, то рядъ чиселъ въ лучшемъ случаѣ окончился бы на двѣнадцати, и мы не имѣли бы и понятія о его продолженіи. При бо́льшихъ множествахъ, въ родѣ множества зрителей въ театрѣ, или звѣздъ на небѣ, возможно еще, пожалуй, послѣдовательное воспріятіе отдѣльныхъ объектовъ, но не ихъ общей числовой совокупности. Объясненіе того, въ какомъ смыслѣ мы все-таки имѣемъ право и въ такихъ случаяхъ говорить о множественности (Vielheit) представляетъ задачу психологіи. Гуссерль (Husserl) въ его, указанной выше, „Философіи ариѳметики" подробно разсматриваетъ эту задачу и приходитъ къ такому выводу: въ приведенныхъ примѣрахъ, хотя у насъ и нѣтъ представленія множества или множественности (Menge oder Vielheit) въ собственномъ смыслѣ, но есть нѣкоторое символическое представленіе т.-е. осуществленное при помощи знаковъ и характеризованное однозначно. Каждому множеству объектовъ, будетъ ли оно опредѣлено собственнымъ образомъ или символически, соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, опредѣленная множественность (Vielheit) единицъ, число. Въ самомъ дѣлѣ, понятіе совокупности членовъ множества представляетъ понятіе вполнѣ опредѣленное, хотя въ дѣйствительности мы не въ состояніи возсоздать эту совокупность [1]). Какимъ же образомъ мы оцѣниваемъ число, соотвѣтствующее символически представленному множеству, если мы не можемъ образовать его въ собственномъ смыслѣ? У насъ прежде всего остается возможность разбить данное множество на группы, которымъ соотвѣтствуютъ еще собственно представимыя числа, какъ напр. пять, шесть, восемь. Если мы не въ силахъ представить себѣ одновременно и раздѣльно всю совокупность единицъ, входящихъ въ эти числа, то мы прибѣгаемъ къ соединенію названій пять, шесть, восемь (по отношенію къ ихъ знакамъ) и это

[1]) Нѣтъ ничего противнаго здравому смыслу въ допущеніи представить себѣ наши духовныя способности расширенными настолько, чтобы было возможно и при большихъ множествахъ одновременное ихъ воспріятіе. Дѣйствительно, нѣкоторые люди обладаютъ этой способностью въ большей степени, чѣмъ это встрѣчается обычно. Такъ извѣстный счетчикъ Dahse, видя гдѣ-либо отъ 30 до 40 книгъ, былъ въ состояніи сейчасъ же точно указать число ихъ.

соединеніе замѣняетъ намъ не представимое собственно число и является символомъ послѣдняго. Чтобы число группъ множества не оказалось слишкомъ велико, при образованіи числа приходится пользоваться не только собственно представимыми числами, но допускать и числа, образованныя символически. Чтобы придать устойчивость всей этой постройкѣ, пришлось бы давать особыя обозначенія всѣмъ этимъ соединеніямъ названій чиселъ, и скоро получилось бы такъ много различныхъ именъ, что память оказалась бы не въ состояніи ихъ удержать. Къ этому присоединяется еще одинъ серіозный недостатокъ: такъ какъ множество допускаетъ различныя расчлененія на части, то ему соотвѣтствовали бы различныя числовыя формы, тогда какъ на самомъ дѣлѣ ему принадлежитъ единственное вполнѣ опредѣленное число; для сравненія подобныя числовыя формы оказались бы весьма нецѣлесообразными.

Чтобы избѣгнуть этихъ недостатковъ, съ одной стороны, настоятельно необходимо ввести твердый и опредѣленный принципъ образованія символическихъ числовыхъ формъ, чтобы въ памяти необходимо было удержать только его, а не всѣ образуемыя формы. Съ другой стороны надо позаботиться о томъ, чтобы каждому множеству соотвѣтствовала только одна числовая форма, построенная по этому принципу, и чтобы, такимъ образомъ, по различію формъ можно было заключать и о различіи самыхъ чиселъ. Простѣйшій путь удовлетворить этимъ требованіямъ заключается въ методѣ образованія новыхъ числовыхъ формъ присоединеніемъ единицы къ уже составленному числу. Если разсматривать десять, какъ послѣднее взятое собственно представимое число, то можно ввести соединеніе десять и одинъ, какъ слѣдующее новое число съ особеннымъ названіемъ „одиннадцать“; затѣмъ соединеніе одиннадцати и одного и дать ему названіе „двѣнадцать“ и т. д. Ясно, что числовыми формами, получаемыми по этому принципу, можно пересчитать любое множество и легко видѣть, что каждому множеству соотвѣтствуетъ только одна числовая форма. Но все-таки и этотъ методъ образованія символическихъ числовыхъ формъ оказывается непригоднымъ, такъ какъ каждый новый шагъ въ образованіи числа требуетъ новаго названія. Если бы выбирать только названія, независимыя другъ отъ друга, то память скоро бы измѣнила намъ. Если же образовывать названія путемъ повторенія хотя бы слова „одинъ“, то при достаточно большихъ числахъ такого рода обозначеніе было бы еще неудобнѣе и еще болѣе непригодно для употребленія. Въ § 10 этой главы мы укажемъ, насколько тяжеловѣсными оказались бы дѣйствія надъ такими числовыми формами. Мы должны позаботиться объ отысканіи другого метода построенія символическихъ числовыхъ формъ.

Здѣсь мы встрѣчаемся съ замѣчательнымъ явленіемъ, а именно: то, чего мы требуемъ на основаніи теоретическихъ соображеній, сдѣлано въ болѣе или менѣе совершенной степени уже почти у всѣхъ народовъ на самой ранней ступени культуры подъ вліяніемъ потребностей практической жизни. Когда при счетѣ множества доходили до опредѣленнаго числа, большею частью до десяти, то отдѣляли эту группу въ десять объектовъ и начинали при дальнѣйшемъ счетѣ снова съ числа одинъ, пока не доходили снова до группы десять и т. д., и устанавливали наконецъ число группъ и остающихся отдѣльныхъ объектовъ. Когда образовывалось 10 такихъ группъ, ихъ собирали въ одну кучу, и т. д., и давали названія числу кучъ, группъ и отдѣльныхъ объектовъ [1]). При дальнѣйшемъ примѣненіи этого простого принципа достигли того, что при помощи сравнительно небольшой совокупности малыхъ (слѣдовательно, вполнѣ представимыхъ) чиселъ, оказалось возможнымъ символизировать любыя множества, встрѣчающіяся въ практической жизни.

Совокупность образованныхъ такимъ способомъ числовыхъ формъ называется системой чиселъ, и въ частности десятичной, если она построена при помощи числа десять [2]).

---

[1]) Приведемъ нѣсколько примѣровъ, указывающихъ, что и въ наше время у малокультурныхъ народовъ сохранился еще этотъ первобытный способъ счета. Schrumpf (Zeitschrift d. Deutschen Morgenländischen Gesellsch. XVI, 463) пишетъ: «У народовъ Южной Африки, когда приходится считать выше ста, эту трудную работу всегда должны выполнять трое мужчинъ. Одинъ считаетъ тогда единицы при помощи пальцевъ, поднимая послѣдніе одинъ за другимъ и указывая на считаемый предметъ и, быть можетъ, даже прикасаясь къ нему; второй отмѣчаетъ десятки, поднимая палецъ, какъ только наберется десятокъ; (все это дѣлается начиная съ мизинца лѣвой руки и кончая мизинцемъ правой); третій считаетъ сотни».

У Tylor'а находимъ: «туземцы Южнаго Архипелага при счетѣ единицъ пользуются камешками; когда наберется десять штукъ, вмѣсто нихъ откладываютъ въ сторону кусочекъ вѣтки кокосоваго орѣха; когда такихъ наберется десять, то откладываютъ болѣе крупный кусокъ и т. д.

[2]) Заслуга Husserl'я заключается въ указаніи на то, что десятичная система не только является методомъ для обозначенія уже существующихъ чиселъ, но скорѣе служитъ для созиданія символическихъ числовыхъ формъ, не-

Такому образованію понятія систематическаго числа повсюду слѣдовалъ и языкъ, создавая уже на низшихъ ступеняхъ культуры отдѣльныя слова для понятія одинъ, два... девять и для группъ различныхъ порядковъ (конечно, по стольку, по скольку требовали этого практическая потребность и теоретическій интересъ) и составляя при помощи ихъ именъ названія остальныхъ чиселъ. Письменное изображеніе чиселъ при помощи знаковъ развилось значительно позднѣе и проявило многочисленныя несовершенства даже у такихъ высоко стоявшихъ въ духовномъ развитіи народовъ, какъ древніе греки и римляне, пока наконецъ индусамъ въ первыхъ столѣтіяхъ нашего лѣтосчисленія не удалось осуществить идеалъ изображенія любыхъ чиселъ системы при помощи знаковъ, пользуясь геніальной идеей „помѣстнаго значенія“ послѣднихъ.

Для основательнаго пониманія строенія системы чиселъ и полнаго пониманія индусскаго способа письма требуется извѣстное знакомство съ ариѳметическими дѣйствіями. Желаніе по возможности просто и экономично выполнить вызываемыя практическими потребностями ариѳметическія дѣйствія надъ десятичными числами дало, очевидно, первый толчекъ къ отысканію ариѳметическихъ правилъ [1]). Сначала мы разсмотримъ простѣйшія ариѳметическія дѣйствія и ихъ законы для собственно представимыхъ чиселъ [2]),

---

посредственно намъ недоступныхъ. Только что разобраннымъ, такъ называемымъ, натуральнымъ числовымъ рядомъ, въ которомъ каждое новое число получается прибавленіемъ единицы къ только что образованному числу и который настолько же является натуральнымъ, насколько и десятичная система счисленія, мы владѣемъ въ дѣйствительности лишь по стольку, по скольку члены его имѣютъ опредѣленныя названія. Число десять принято за основаніе системы въ связи съ числомъ нашихъ пальцевъ; въ качествѣ основанія встрѣчаются такъ же пять, двадцать, шестьдесятъ и даже одиннадцать. Дальнѣйшія подробности см. Cantor, Vorlesungen I, Einleitung, стр. 8, гдѣ имѣются указанія и на остальную литературу по этому предмету, а именно Pott — Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Weltteile, Halle 1847, и Pott — Die Sprachverschiedenheit in Europa an den Zahlwörtern nachgewiesen sowie die quinäre und vigesimale Zählmethode, Halle 1868.

Въ § 12 D этой главы мы увидимъ, что для вычисленій болѣе удобной, пожалуй, оказалась бы система съ основнымъ числомъ двѣнадцать.

[1]) M. Cantor (Vorlesungen I, стр. 6) указываетъ на это обстоятельство въ такихъ словахъ: «къ тому времени, какъ было изобрѣтено большинство названій для чиселъ, человѣкъ перешелъ уже отъ простого счета къ дѣйствіямъ.

[2]) Включая и единицу; вычисленіе съ нулемъ будетъ изложено лишь въ § 10, гдѣ намъ окажется необходимымъ имъ пользоваться.

а затѣмъ (въ § 10) войдемъ въ болѣе подробное разсмотрѣніе систематическихъ чиселъ, и въ особенности десятичныхъ.

Если рѣчь идетъ о числѣ, значеніе котораго желательно оставить неопредѣленнымъ, будь это любое число или число, значеніе котораго еще неизвѣстно, то какъ символъ числа употребляется буква; при этомъ слѣдуетъ помнить, что во время одного и того же вычисленія одна и та же буква обозначаетъ одно и то же число [1]). Въ первой главѣ подъ числомъ понимается вообще только число натуральное, и употребляемыя здѣсь буквы должны обозначать только эти числа за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, гдѣ это особо оговорено.

§ 2. Сравненіе чиселъ.

Всякой множественности A, т.-е. множеству объектовъ, на особенности природы которыхъ мы совершенно не обращаемъ вниманія, соотвѣтствуетъ одно и только одно опредѣленное число a. Двѣ множественности A и B, которыя характеризуются числами a и b, называемъ равночисленными или короче равными, и пишемъ $a = b$ [2]), если обѣимъ соотвѣтствуетъ одно и то же число; слѣдовательно, a и b суть различныя обозначенія одного и того же числа. Утвержденіе $a = b$ называется равенствомъ. О равныхъ натуральныхъ числахъ можно вообще говорить лишь по стольку,

---

[1]) Отдѣльные слѣды обозначенія неопредѣленныхъ чиселъ буквами мы находимъ уже у грековъ (Аристотель, Паппъ, Діофантъ) и у индусовъ. Впервые послѣдовательно проводитъ буквенныя вычисленія генералъ ордена Доминиканцевъ Jordanus Nemorarius († 1237) въ своей ариѳметикѣ, но у него еще не достаетъ знаковъ дѣйствій, а также знака равенства, отчего въ его изложеніи не хватаетъ наглядности; въ противномъ случаѣ непосредственно его можно было бы назвать, говоритъ Cantor (Vorlesungen II стр. 62), отцомъ позднѣйшаго буквеннаго вычисленія, отцомъ котораго обычно считаютъ французскаго алгебраиста François Viète (In artem analyticam isagoge 1591).

[2]) Знакъ «$=$» встрѣчается впервые у R. Recorde, («The whetstone of witte, London» 1557) который выбралъ его «потому что ни что не можетъ быть такъ равно другъ другу, какъ два небольшихъ параллельныхъ отрѣзка». Діофантъ пользовался начальной буквой, а арабскіе математики послѣдней въ словѣ «равно», Viète пользовался латинскимъ глаголомъ «aequare», изъ двухъ первыхъ буквъ котораго Декартъ составилъ знакъ ꝏ. Лишь постепенно, въ теченіе XVII столѣтія, знакъ $=$ вытѣснилъ всѣ остальные. Знакъ $>$ и $<$ для «больше» и «меньше» впервые встрѣчается у Th. Harriot'a (Artis analyticae praxis, London 1631).

по скольку произвольно часто можно представлять себѣ каждое число такъ же, какъ и всякое другое понятіе. Поэтому само собой понятно, что если a и b суть натуральныя числа и если $a=b$, то въ каждомъ выраженіи можно замѣнить a черезъ b и обратно b черезъ a. Слѣдовательно, изъ $a=b$ и $b=c$ само собой вытекаетъ $a=c$. Не трудно далѣе [1]) усмотрѣть, что тогда и только тогда каждому объекту множества A можетъ соотвѣтствовать объектъ множества B, и обратно, каждому объекту B соотвѣтствовать объектъ A [2]), если $a=b$.

Если A и B не равночисленны, то можно одну изъ этихъ двухъ множественностей напр. A разложить на 2 группы, изъ

[1]) Сравни также G. Cantor, Mathem. Annal. Bd. 46, стр. 482—483.

[2]) Этотъ достаточный и необходимый критерій для равночисленности двухъ множествъ почти во всѣхъ новѣйшихъ изложеніяхъ ариѳметики разсматривается какъ опредѣленіе равночисленности. Мы уклонились отъ этого и здѣсь также послѣдовали примѣру Husserl'я (а такъ же G. Cantor'а), такъ какъ съ одной стороны чисто умозрительная возможность установить взаимно-однозначное соотвѣтствіе не вполнѣ тождественна съ равночисленностью (выражаясь языкомъ логики *это понятія одинаковаго объема, но не одинаковаго содержанія*), съ другой стороны практически этотъ критерій можетъ найти примѣненіе лишь на той ступени культуры, на которой мало развито различеніе чиселъ и ихъ названій, и поэтому составленіе большого числа представляетъ трудности. Въ силу тѣхъ же соображеній мы не устанавливали опредѣленія числа пользуясь критеріемъ равночисленности (какъ это напр. встрѣчается въ учебникахъ E. Schröder, O. Stolz, H. Weber). Названные математики соединяютъ въ одинъ классъ всѣ множества, члены которыхъ могутъ быть приведены въ однозначное соотвѣтствіе другъ съ другомъ, а затѣмъ опредѣляютъ число, какъ нѣчто общее всѣмъ множествамъ одного класса, какъ своего рода инваріантъ класса. Это послѣднее, какъ вполнѣ правильно съ нашей точки зрѣнія говоритъ Husserl, не является дѣйствительнымъ смысломъ опредѣленія числа. «Называемъ ли мы лежащее передъ нами множество орѣховъ четырьмя потому, что оно принадлежитъ къ опредѣленному классу, состоящему изъ *безконечно-большого числа множествъ, которыя взаимно можно привести* въ однозначное соотвѣтствіе? Врядъ ли кто такъ думаетъ, и едва ли мы найдемъ практическій поводъ, чтобы интересоваться вещами такого рода. На самомъ же дѣлѣ насъ интересуетъ то обстоятельство, что на лицо есть одинъ орѣхъ, да еще орѣхъ, еще орѣхъ, и еще орѣхъ. Это неудобное и длинное представленіе мы дѣлаемъ болѣе удобнымъ для мышленія и рѣчи, пользуясь общей формой множества одинъ да одинъ, и одинъ, и одинъ, которому придаютъ названіе четыре. При этомъ неопредѣленная единица получаетъ свое опредѣленіе присоединеніемъ названія орѣхъ къ названію числа». Также и G. Cantor опредѣленно говоритъ (Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Zeitschr. Philosophie u. philosoph. Kritik, Bd. 91, стр. 55, Anm.): «Для образованія общаго понятія «пяти» достаточно лишь множества, которому принадлежитъ это кардинальное число».

которыхъ одна будетъ равночисленна съ B; въ этомъ случаѣ говорятъ: a больше, чѣмъ b и пишутъ $a > b$; или же b меньше a т.-е. въ знакахъ $b < a$. Подобныя утвержденія называются неравенствами. Чтобы выразить, что a больше или меньше b, или во всякомъ случаѣ не равно ему, пишутъ $a \gtrless b$.

§ 3. Сложеніе.

A. Понятіе суммы.

Если даны какія-либо множества A, B, C, ... N произвольныхъ объектовъ, то мы можемъ представить ихъ соединенными въ одно множество S, которое содержитъ всѣ объекты отдѣльныхъ множествъ, но другихъ объектовъ не содержитъ. Если насъ интересуютъ только числа a, b, c, ... n, соотвѣтствующія множествамъ A, B, C, ... N, то мы отвлекаемся совершенно отъ природы отдѣльныхъ объектовъ, разсматриваемъ каждый, какъ „нѣчто" или „одинъ", и, соединяя всѣ единицы чиселъ $a, b, c, \ldots n$, въ одно число s, находимъ число, соотвѣтствующее результирующему множеству S. Эту операцію называютъ сложеніемъ, данныя числа слагаемыми, результатъ суммой. Знакъ сложенія $+$ [1])., Слѣдовательно, сумма чиселъ a, b, c, ... n, напишется такъ: $a + b + c \ldots + n$. Сужденіе, что образованное такимъ образомъ число есть s, выражается равенствомъ $a + b + c + \ldots + n = s$. Въ сумму можно соединять произвольно много чиселъ.

B. Независимость значенія суммы отъ порядка слагаемыхъ.

Вмѣсто того, чтобы соединить въ одно число всѣ единицы чиселъ a, b, c, ... n одновременно однимъ только мыслительнымъ актомъ, мы можемъ это выполнить различнымъ образомъ, постепенно складывая нѣкоторыя слагаемыя отдѣльно и снова соединяя вмѣстѣ полученныя частныя суммы; при этомъ необходимо только слѣдить за тѣмъ, чтобы каждое слагаемое было принято во вниманіе одинъ и только одинъ разъ. Въ письмѣ мы выра-

[1]) Можно утверждать, что этотъ знакъ появился въ концѣ XV столѣтія и, можетъ быть, образовался изъ буквы t въ словѣ et. Подробности см. Cantor, Vorlesungen II, стр. 230.

жаемъ различную возможность образованія суммъ примѣненіемъ скобокъ [1]); мы ставимъ въ круглыя скобки образовавшіяся при сложеніи частныя суммы; образовавшіяся при сложеніи этихъ частныхъ суммъ частныя суммы 2-го порядка мы заключаемъ въ квадратныя скобки; частныя суммы, полученныя при сложеніи суммъ 2-го порядка, заключаемъ въ фигурныя скобки. Вообще говоря, этихъ видовъ скобокъ бываетъ достаточно; въ крайнихъ же случаяхъ вводятъ новый видъ скобокъ, чѣмъ-либо отличающійся отъ предыдущаго. Пользуясь употребленіемъ этихъ знаковъ, можно указать нѣкоторые способы образованія суммы, хотя бы пяти чиселъ, a, b, c, d, e:

$$\{[(a+b)+c]+d\}+e \text{ или } [(a+b)+(c+d)]+e$$

$$\text{или } [c+(a+e)]+(b+d) \text{ и т. д.}$$

Чтобы избѣжать чрезмѣрнаго употребленія скобокъ согласились [2]) совершенно опускать скобки въ томъ случаѣ, когда слѣдуетъ къ суммѣ двухъ ранѣе написанныхъ чиселъ прибавить третье, къ такимъ образомъ полученной суммѣ присоединить четвертое и продолжать далѣе такимъ же образомъ. Слѣдовательно:

$$a+b+c+d+e, \text{ обозначаетъ всегда то же, что и}$$

$$\{[(a+b)+c]+d\}+e.$$

Такъ какъ при всѣхъ этихъ различныхъ способахъ выполненія сложенія данныхъ чиселъ $a, b, c, \ldots n$, результирующее число представляетъ изъ себя коллективное соединеніе единицъ всѣхъ слагаемыхъ, а мы при образованіи понятія числа [въ § 1] нарочно отвлеклись отъ группировки единицъ, то различные пріемы образованія суммы всегда даютъ одинаковый результатъ, другими словами: суммы, образованныя изъ однихъ и тѣхъ же чиселъ, но отличающіяся порядкомъ слагаемыхъ и мѣстомъ скобокъ, равны между собой. Изъ

[1]) Прямыя и фигурныя скобки впервые примѣнилъ François Viète (1593), круглыя Albert Girard (1629), ср. J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Bd. I, стр. 139.

[2]) Подробнѣе объ употребленіи скобокъ см. Schröeder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. (Лейпцигъ 1873). Стр. 214 и т. д.

полученныхъ такимъ образомъ равенствъ мы выдѣлимъ слѣдующiя:

(I) $$a+b=b+a$$

(II) $$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Равенство (I) называютъ **коммутативнымъ** (перемѣстительнымъ) а равенство (II) **ассоцiативнымъ** (сочетательнымъ) закономъ сложенiя [1]).

Важность этихъ равенствъ основывается на томъ, что при сложенiи (и при другихъ аналогичныхъ операцiяхъ) чиселъ отличныхъ отъ натуральныхъ, для которыхъ независимость значенiя суммы отъ порядка слагаемыхъ не ясна непосредственно, послѣдняя сейчасъ же можетъ быть распространена на произвольно большое число слагаемыхъ, какъ только будетъ установлена справедливость равенствъ (I) и (II). Чтобы въ дальнѣйшемъ имѣть возможность ссылаться на это предложенiе въ различныхъ случаяхъ, мы его докажемъ теперь же, хотя для сложенiя натуральныхъ чиселъ, согласно предыдущему, такое доказательство является излишнимъ.

Для доказательства воспользуемся часто примѣняемымъ способомъ заключенiя, которое называется **заключенiемъ отъ n къ $n+1$**, или **методомъ полной индукцiи** [2]). Если извѣстно, что нѣкоторое утвержденiе, въ которомъ встрѣчается неопредѣленное число x, несомнѣнно справедливо при $x=n+1$, если только допустить его справедливость при $x=n$, гдѣ n обозначаетъ произвольное натуральное число, и если притомъ извѣстно, что это утвержденiе справедливо при $x=a$, гдѣ a означаетъ опредѣленное натуральное число, то заключаемъ, что это предложенiе остается вѣрнымъ, если x замѣнить какимъ-либо натуральнымъ числомъ бóльшимъ a. Сила этого метода заклю-

---

1) Эти названiя введены въ Германiи Hankel'емъ въ его «Theorie der komplexen Zahlensysteme» стр. 3. Названiе «коммутативный» (commutativ) и «дистрибутивный» (distributiv), (которое будетъ объяснено въ § 5), установлено (по Hankel'ю) Servois (Gergonnes Ann. Bd. V, 1814, стр. 93), названiе же «ассоцiативный» (associativ) дано, вѣроятно, Гамильтономъ.

2) Этотъ методъ впервые примѣнилъ въ своей ариѳметикѣ (1575) Maurolycus' изъ Мессины. Отъ него впервые узналъ этотъ способъ Паскаль (1662), считавшiйся одно время изобрѣтателемъ этого способа заключенiя. Ср. Zeitschr. f. mathemat.-naturwiessenschaftl. Unterricht, Bd. 33 (1902), стр. 536.

ченія основывается на томъ, что каждое число, которое больше a, можетъ быть получено повторнымъ прибавленіемъ единицы къ a [1]).

Пусть a_1, a_2, a_3, ... суть элементы нѣкоторой системы величинъ (здѣсь, слѣдовательно, эти буквы обозначаютъ не только натуральныя числа), для которой сумма двухъ величинъ опредѣляется, какъ нѣкоторая величина той же самой системы, и для которой справедливо предложеніе: „Если двѣ величины равны одной и той же третьей, то онѣ равны между собой“. Мы прежде всего покажемъ, что если ассоціативный (сочетательный) законъ справедливъ для какихъ-либо трехъ произвольныхъ величинъ этой системы, то онъ справедливъ и для произвольнаго числа ихъ. Предположимъ, что законъ установленъ для 3, 4, 5, ... n слагаемыхъ, т.-е. предположимъ, что если въ рядѣ, содержащемъ не болѣе n, величинъ будемъ суммировать, не измѣняя ихъ порядка, слѣдующее другъ за другомъ произвольно большое число паръ, затѣмъ попарно слѣдующія другъ за другомъ суммы, или же такую сумму со слѣдующей за нею отдѣльной величиной, или двѣ сосѣднихъ отдѣльныхъ величины, до тѣхъ поръ, пока наконецъ двѣ послѣднія полученныя частныя суммы (а въ послѣднемъ случаѣ такая сумма и отдѣльное слагаемое) не будутъ соединены при помощи сложенія въ одну величину, то результатъ при всѣхъ предполагаемыхъ соединеніяхъ въ суммы будетъ одинъ и тотъ же. Мы можемъ тогда каждую изъ образованныхъ, какимъ-либо изъ допущенныхъ способовъ, суммъ r величинъ, a_1, a_2, ... a_r (гдѣ r означаетъ одно изъ чиселъ 3, 4, ... n) обозначить однимъ и тѣмъ же символомъ $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_r$. Изъ всѣхъ суммъ, образованныхъ допущеннымъ способомъ изъ $(n+1)$ величинъ a_1, a_2, ... a_{n+1}, могли бы отличаться другъ отъ друга только слѣдующія:

$$s_1 = a_1 + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}),$$
$$s_2 = (a_1, + a_2) + (a_3 + a_4 + \ldots + a_{n+1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[1]) Такъ какъ каждое число, бо́льшее, a можетъ быть получено изъ a прибавленіемъ къ нему какого-либо натуральнаго числа z и такъ какъ $a + z = a + (\overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{z \text{ слагаемыхъ}})$, то мы здѣсь уже напередъ предполагаемъ (а по предыдущему имѣемъ на это право) справедливость ассоціативнаго закона для частнаго случая $a + (1 + 1 + \ldots + 1) = a + 1 + 1 + \ldots + 1$.

$$s_\nu=(a_1+a_2+\ldots+a_\nu)+(a_{\nu+1}+\ldots+a_{n+1}),$$
$$s_{\nu+1}=(a_1+a_2+\ldots+a_{\nu+1})+(a_{\nu+2}+\ldots+a_{n+1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1}.$$

То обстоятельство, что всякія слѣдующія другъ за другомъ суммы, а, слѣдовательно, (согласно сдѣланному допущенію относительно системы величинъ) и всѣ остальныя равны между собой, легко выясняется изъ слѣдующаго. Введемъ для краткости такія обозначенія:

$$a_1+a_2+\ldots+a_\nu=A_\nu \text{ и } a_{\nu+2}+\ldots+a_{n+1}=B_{\nu+2};$$

тогда:

$$s_\nu=A_\nu+(a_{\nu+1}+B_{\nu+2}).$$

По предположенію, сдѣланному для трехъ величинъ, слѣдуетъ

$$s_\nu=(A_\nu+a_{\nu+1})+B_{\nu+2}=s_{\nu+1}$$

Такимъ образомъ, на основаніи полной индукціи вытекаетъ справедливость ассоціативнаго закона для произвольно большого числа величинъ системы $a_1, a_2, \ldots.$

Теперь мы докажемъ, что если для трехъ, (а, слѣдовательно, и для произвольно большого числа) величинъ нашей системы справедливъ ассоціативный законъ и для двухъ коммутативный, — то послѣдній вѣренъ и для произвольнаго числа величинъ. Такъ какъ перестановка любыхъ двухъ слагаемыхъ можетъ быть достигнута повторными перестановками двухъ сосѣднихъ слагаемыхъ, что ясно само собой, то намъ достаточно только показать, что двѣ слѣдующія суммы:

$$s=a_1+a_2+\ldots+a_{\nu-1}+a_\nu+a_{\nu+1}+a_{\nu+2}+\ldots+a_n$$

и

$$s'=a_1+a_2+\ldots+a_{\nu-1}+a_{\nu+1}+a_\nu+a_{\nu+2}+\ldots+a_n$$

равны между собой.

Если опять ввести для краткости такія обозначенія:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{\nu-1}=A_{\nu-1} \text{ и } a_{\nu+2}+\ldots+a_n=B_{\nu+2},$$

то:

$$s'=A_{\nu-1}+(a_{\nu+1}+a_\nu)+B_{\nu+2},$$

или, такъ какъ, по предположенію,

$$a_{\nu+1}+a_\nu=a_\nu+a_{\nu+1},$$

то:

$$s' = A_{\nu-1} + (a_\nu + a_{\nu+1}) + B_{\nu+2},$$

слѣдовательно, $s' = s$ [1]).

Такимъ образомъ для нашей системы величинъ $(a_1\ a_2 \ldots)$ въ силу сдѣланныхъ предположеній доказано слѣдующее предложеніе:

Если изъ ряда, состоящаго изъ произвольно большого числа величинъ системы, выбрать нѣсколько и соединить ихъ въ произвольномъ порядкѣ въ одну сумму, и замѣнить выдѣленную группу полученной суммой, то будемъ имѣть рядъ съ меньшимъ числомъ членовъ, съ которымъ можно поступать подобнымъ же образомъ; поступаемъ такъ до тѣхъ поръ, пока вмѣсто первоначальнаго ряда не получимъ только одну величину, которая и представитъ сумму данныхъ величинъ; ея значеніе совершенно не зависитъ отъ порядка образованія суммъ [2]).

C. Теоремы о неравенствахъ.

Изъ только что доказаннаго предложенія вытекаетъ рядъ слѣдствій относящихся къ неравенствамъ.

I. Если

$$s = a_1 + a_2 + \ldots a_{\nu-1} + a_\nu + a_{\nu+1} + \ldots + a_n\ ^{3)},$$

то s можетъ быть написано въ формѣ

$$s = a_\nu + A_\nu,$$

гдѣ A_ν означаетъ число

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{\nu-1} + a_{\nu+1} + \ldots + a_n;$$

но это, согласно опредѣленію, данному въ концѣ § 2, значитъ, что

$$s > a_\nu$$

---

[1]) Доказательство того, что можно первый, а также и послѣдній члены мѣнять мѣстами съ сосѣдними, по существу то же самое.

[2]) Это предложеніе приблизительно въ такой же формѣ встрѣчается у E. Schröder, Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra. Стр. 60. О числѣ различныхъ способовъ образованія суммы изъ произвольнаго числа членовъ, ср. гл. V, § 1, D.

[3]) Буквы теперь снова означаютъ натуральныя числа.

т.-е., если выразить эту мысль словами: **сумма всегда больше, чѣмъ какое-либо изъ ея слагаемыхъ.**

II. Если

$$a_1 > a_2, \text{ а слѣдов. } a_1 = a_2 + z_1,$$
$$a_2 > a_3 \quad " \quad " \quad a_2 = a_3 + z_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} > a_n \quad " \quad " \quad a_{n-1} = a_n + z_{n-1},$$

гдѣ $z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$ означаютъ какія-либо натуральныя числа, то легко видѣть, что

$$a_1 = \{[(a_n + z_{n-1}) + z_{n-2}] + \ldots\} + z_1,$$

или

$$a_1 = a_n + Z_{n-1}, \text{ гдѣ } Z_{n-1} = z_{n-1} + z_{n-2} + \cdots + z_1,$$

слѣдовательно,

$$a_1 > a_n.$$

Къ аналогичному результату можно притти, замѣнивъ во всѣхъ неравенствахъ знакъ $>$ знакомъ $<$.

III. Такъ какъ

$$a + (b + z) = (a + b) + z > a + b,$$

и

$$(a + z) + b = (a + b) + z > a + b,$$

то **значеніе этой суммы увеличивается, (или уменьшается) если увеличить (уменьшить) одно изъ слагаемыхъ.**

То же предложеніе остается въ силѣ и для многочленной суммы, въ чемъ легко убѣдиться, замѣняя неизмѣняющіяся слагаемыя частными суммами. Изъ этого предложенія мы можемъ сдѣлать слѣдующій важный выводъ: если

$a + b = a + b'$, то необходимо, чтобы

$$b = b';$$

такъ какъ если бы $b \gtrless b'$, то мы

имѣли бы $a + b \gtrless a + b'$.

IV. Если

$$a > b, \text{ а, слѣдовательно, } a = b + z,$$

и $\qquad a' > b' \quad „ \quad „ \qquad a' = b' + z'$,

то $\qquad a + a' = b + b' + (z + z')$,

откуда $\qquad a + a' > b + b'$.

Такимъ же образомъ изъ $a < b$ и $a' < b'$ получаемъ:

$$a + a' < b + b'.$$

Словами это выражается такъ: неравенства одинаковаго знака можно складывать и при томъ такъ: складываютъ соотвѣтственно лѣвыя части съ лѣвыми и правыя съ правыми, и первая сумма соединяется со второй тѣмъ же знакомъ неравенства [1]).

§ 4. Вычитаніе.

А. Опредѣленіе вычитанія.

Если число a будетъ больше, чѣмъ число b, то a можно разсматривать, какъ сумму (см. § 2), одно изъ слагаемыхъ которой есть b, а другое c, вполнѣ опредѣляемое числами a и b; что число c единственное, вытекаетъ изъ предложенія: если $b + c' = b + c$, то необходимо должно быть $c' = c$ (§ 3, C III). Число c называютъ разностью чиселъ a и b и, чтобы выразить ея зависимость отъ чиселъ a и b, пишутъ $c = a - b$ [2]), т. е. a безъ b, или a минусъ b; a называется уменьшаемымъ, b называется вычитаемымъ. Операція нахожденія c называется вычитаніемъ; $a - b$ означаетъ то число, которое будучи соединено съ b въ одну сумму даетъ a. Символически:

$$b + (a - b) = a,$$

или

$$(a - b) + b = a$$

[1]) Изъ опредѣленія равенства двухъ натуральныхъ чиселъ, даннаго въ § 2, само собой понятно, что если $a = a'$ и $b = b'$, то должно имѣть мѣсто также и $a + b = a' + b'$.

[2]) Знакъ «—» встрѣчается впервые (одновременно со знакомъ +) въ концѣ XV столѣтія (у Joh. Widmann въ Германіи, у Lionardo da Vinci въ Италіи). На сто же лѣтъ позднѣе Viéte (а послѣ него и Girard) употребляетъ также и знакъ $=$, который ставится между двумя числами для обозначенія абсолютнаго значенія разности независимо отъ того, какое изъ этихъ двухъ чиселъ больше.

Непосредственно изъ опредѣленія вычитанія слѣдуетъ:

$$(a+b)-b=a.$$

Послѣднія два равенства указываютъ на то, что если изъ числа a сначала вычесть b, а затѣмъ то же число прибавить, или если сначала прибавить b, а потомъ его же вычесть, первоначально данное число a останется безъ измѣненія; прибавленіе и вычитаніе одного и того же числа взаимно покрываются. Вычитаніе поэтому называется дѣйствіемъ, обратнымъ сложенію. Оно выполнимо только тогда и притомъ единственнымъ образомъ, когда уменьшаемое больше вычитаемаго.

B. Соотношенія между суммами и разностями.

(I) $$(a+b)-c=a+(b-c).$$

(II) $$a-(b+c)=(a-b)-c.$$

(III) $$a-(b-c)=(a-b)+c.$$

(IV) $$(a+c)-(b+c)=a-b.$$

(V) $$(a-c)-(b-c)=a-b.$$

(VI) $$(a-c)+(b-d)=(a+b)-(c+d)$$

Эти равенства справедливы, если a, b, c, d, означаютъ какія-либо натуральныя числа и въ каждой встрѣчающейся разности уменьшаемое больше вычитаемаго. Доказательства получаются очень просто изъ опредѣленія разности, изъ ассоціативнаго закона для суммы, а для (III) и (V) изъ доказаннаго ранѣе равенства (I).

Чтобы доказать, напримѣръ, справедливость (I) намъ достаточно выяснить, что сумма всей правой части этого равенства и числа c равна $a+b$.

Имѣемъ:

$$[a+(b-c)]+c=a+[(b-c)+c]=a+b.$$

Чтобы вывести (III), составляемъ сумму:

$$\begin{aligned}[(a-b)+c]+(b-c)&=[(a-b)+c+b]-c \qquad \text{(по I)}.\\ &=[(a-b)+b+c]-c\\ &=[a+c]-c\\ &=a.\end{aligned}$$

Остальныя равенства доказываются подобнымъ же образомъ.

Чтобы употреблять по возможиости меньше скобокъ, распространимъ условія, указанныя въ § 3 B, и на тотъ случай, когда вычитаніе и сложеніе чередуются, такимъ образомъ, $a+b-c$ означаетъ тоже самое, что и $(a+b)-c$, $a-b+c$ тоже самое, что и $(a-b)+c$ и т. д.

§ 5. Умноженіе.

A. Понятіе произведенія.

Пусть $A_1, A_2, \ldots A_b$, означаютъ множества, состоящія каждое изъ a однородныхъ объектовъ, т. е. изъ вещей, оказывающихся одинаковыми по свойствамъ, являющимся главнымъ предметомъ нашего вниманія; эти множества можно разсматривать какъ одинаковыя постольку, поскольку мы отвлекаемся отъ ихъ остальныхъ различій. Каждое изъ нихъ мы можемъ обозначить одной и той же буквой A и записать ихъ сумму $\overbrace{A+A+A\ldots+A}^{(b\text{ слагаемыхъ}).}$

Такъ какъ подобныя суммы, въ которыхъ всѣ безъ исключенія слагаемыя равны между собой, встрѣчаются очень часто, то для нихъ имѣется сокращенный способъ записи, а именно $A \times b$, или $A.b$, или также Ab, и введено особое названіе „произведеніе“ [1]). Слагаемое A, повторно прибавляемое называютъ множимымъ, число слагаемыхъ b называютъ множителемъ [2]), а самое дѣйствіе, посредствомъ котораго получается произведеніе, называется умноженіемъ [3]).

---

[1]) Знакъ умноженія въ видѣ креста ведетъ свое начало отъ Oughtred (Clavis mathematica, 1631), точка же впервые примѣнена Лейбницемъ (1693) и стала затѣмъ наиболѣе употребительнымъ знакомъ умноженія, благодаря учебникамъ Chr. v. Wolff'a. Cp. Cantor, Vorlesungen II, стр. 721 и J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik I, стр. 135—137.

[2]) Иногда пишутъ множитель передъ множимымъ; общаго соглашенія о ихъ порядкѣ не имѣется.

[3]) Пока мы остаемся въ области собственно представимыхъ чиселъ, то рѣчь идетъ лишь о сокращенномъ обозначеніи, а не о сокращеніи вычисленія. Лишь ариѳметическіе законы, которые еще будутъ выведены въ этомъ § и слѣдующемъ, дадутъ намъ возможность замѣнить значительно болѣе короткимъ вычисленіемъ суммированіе, которое слѣдуетъ производить надъ символически представленными числами. (Cp. § 10).

Число, соотвѣтствующее множеству $A.b$, есть $\overbrace{a+a+a\cdots+a}^{(b\text{ слагаемыхъ})}$; его можно также записать въ видѣ $a\times b$ или $a.b$; если множимое и множитель суть числа обозначенныя цыфрами, то нельзя обойтись безъ знака умноженія ($\times$ или .), такъ какъ простому помѣщенію рядомъ двухъ чиселъ записанныхъ цыфрами придаютъ другой смыслъ (см. § 10).

Множимое можетъ представлять изъ себя какое-либо множество объектовъ, т.-е. быть именованнымъ числомъ, но можетъ быть и не именованнымъ числомъ. Множитель по своей природѣ всегда есть нѣкоторый аггрегатъ отвлеченныхъ единицъ, слѣдовательно, не именованное число. Мы будемъ разсматривать произведенія, въ которыхъ множимое и множитель суть числа не именованныя [1]).

B. Коммутативный (перемѣстительный) и ассоціативный (сочетательный) законы.

Согласно опредѣленію произведенія имѣемъ:

$$a.b=\overbrace{a+a+a+\ldots+a}^{(b\text{ слагаемыхъ})}$$

$$=\overbrace{\overbrace{(1+1+1\cdots+1)}^{(a\text{ слагаемыхъ})}+\overbrace{(1+1+1+\cdots+1)}^{(a\text{ слагаемыхъ})}+\cdots+\overbrace{(1+1+1+\cdots+1)}^{(a\text{ слагаемыхъ})}}^{(b\text{ частныхъ суммъ})}.$$

Такъ какъ значеніе суммы не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, то можно образовать суммы такимъ образомъ: взять по единицѣ изъ каждой частной суммы и сосчитать ихъ, затѣмъ взять по второй единицѣ изъ каждой частной суммы и эти еди-

[1]) Въ послѣднее время Capelli (Sull'ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'Aritmetica, Napoli 1900 и Elementi di aritmetica ragionata e di algebra, Napoli 1902) опредѣлилъ произведеніе двухъ чиселъ a, b, какъ число принадлежащее такому множеству, которое получается, если каждый объектъ множества числа a комбинировать съ каждымъ объектомъ множества числа b. Capelli пользуется этимъ опредѣленіемъ, чтобы имѣть возможность разсматривать умноженіе независимо отъ сложенія и раньше его, исходя изъ опредѣленныхъ основаній, не совсѣмъ для меня убѣдительныхъ. До этого G. Cantor (1895), въ его уже цитированныхъ работахъ «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre» (Math. Ann. Bd. 46, стр. 485) подобнымъ же образомъ опредѣлилъ умноженіе мощностей двухъ множествъ.

ницы сложить; и продолжать такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ пересчитаны всѣ единицы. Такимъ образомъ, получаемъ:

$$a\cdot b=\overbrace{\overbrace{(1+1+\cdots+1)}^{(b\ \text{слагаемыхъ})}+\overbrace{(1+1+\cdots+1)}^{(b\ \text{слагаемыхъ})}+\overbrace{(1+1+1+\cdots+1)}^{(b\ \text{слагаемыхъ})}+\cdots+\overbrace{(1+1+1+\cdots+1)}^{(b\ \text{слагаемыхъ})}}^{(a\ \text{частныхъ суммъ})},$$

$$a\cdot b=\overbrace{b+b+b+\cdots+b}^{(a\ \text{слагаемыхъ})}.$$

(I) $\boldsymbol{a\cdot b=b\cdot a}$.

Доказанная здѣсь формула называется **коммутативнымъ** закономъ умноженія.

Этотъ законъ говоритъ: **множимое и множитель можно мѣнять мѣстами**; поэтому обоимъ дано общее названіе сомножителей (факторы); часто называютъ тотъ изъ двухъ сомножителей, которому не отдается превалирующаго значенія въ данномъ вычисленіи, коэффиціентомъ другого, а именно опредѣленное (напр. обозначенное цыфрами. Ред.) число въ произведеніи, состоящемъ изъ одного опредѣленнаго числа и другого неопредѣленнаго. Такимъ образомъ, 5 называется коэффиціентомъ a въ произведеніи $5a$.

Произведеніе $1\cdot a$ по опредѣленію равно $\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{(a\ \text{слагаемыхъ})}$, т.-е. имѣетъ значеніе a. Обозначеніе $a\cdot 1$ само по себѣ не имѣетъ никакого смысла, такъ какъ понятіе суммы предполагаетъ по крайней мѣрѣ два слагаемыхъ. Если станемъ $a\cdot 1$ разсматривать какъ произведеніе, то для того, чтобы и здѣсь имѣлъ мѣсто коммутативный законъ, подъ этимъ произведеніемъ мы должны подразумѣвать не что иное, какъ a. Мы этимъ твердо устанавливаемъ, что при умноженіи числа на 1 значеніе его не измѣняется.

Число, полученное путемъ перемноженія двухъ чиселъ, мы всегда можемъ умножить на третье число; такъ, напримѣръ, можемъ образовать изъ трехъ чиселъ a, b и c слѣдующія произведенія:

$$(ab)\ c \text{ или } a(bc), \text{ или } (ac)b, \text{ или } a\ (bc)\ldots \text{ и т. д.}$$

Имѣемъ

$$(a \cdot b)\cdot c = \overbrace{\underbrace{(a + a + \cdots + a)}_{\text{(}b\text{ слагаемыхъ)}} + \cdots + \underbrace{(a + a + \cdots + a)}_{\text{(}b\text{ слагаемыхъ)}}}^{\text{(}c\text{ частныхъ суммъ)}}.$$

Сумма въ правой части равенства имѣетъ $\overbrace{b + b + \cdots + b}^{\text{(}c\text{ слагаемыхъ)}} = bc$ слагаемыхъ. Такъ какъ каждое слагаемое $= a$, то ее можно написать $a(bc)$. Этимъ самымъ доказывается равенство.

$$\text{(II)} \qquad \boldsymbol{(ab)c = a(bc)},$$

т.-е. ассоціативный законъ для умноженія.

Повторное примѣненіе обѣихъ формулъ:

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ и } (ab) \cdot c = a \cdot (bc)$$

даетъ прежде всего равенство всѣхъ произведеній, которыя можно образовать изъ трехъ чиселъ a, b, c. Тѣмъ же методомъ доказательства, которымъ мы вывели въ § 3 В справедливость ассоціативнаго закона для любого числа слагаемыхъ, при допущеніи его для трехъ слагаемыхъ, а также наличность коммутативнаго закона для любого числа слагаемыхъ, при допущеніи ассоціативнаго закона и коммутативнаго для двухъ чиселъ, мы можемъ сдѣлать заключеніе о справедливости обоихъ законовъ и для произведенія произвольнаго числа сомножителей.

Въ доказательствѣ, приведенномъ въ § 3 В, слѣдуетъ только слова „сложить", „слагаемое", „сумма", повсюду замѣнить словами: „умножить", „сомножитель", „произведеніе" и знакъ сложенія знакомъ умноженія, а въ остальномъ изложеніе останется дословно такимъ же. Примѣненіе обоихъ законовъ приводитъ къ слѣдующему общему предложенію, аналогичному тому, которое высказано относительно сложенія въ § 3 В:

„Если изъ ряда n чиселъ a_1, a_2, ... a_n, соединить какихъ-либо два въ одно произведеніе и выдѣленныя два числа замѣнить этимъ произведеніемъ, то образуется рядъ изъ $n-1$ числа. Если изъ этого ряда снова соединить какія-либо два числа въ одно произведеніе, то останется $n-2$ числа; продолжаемъ такимъ образомъ дальше до тѣхъ поръ, пока первоначальный рядъ не замѣнится единственнымъ числомъ, при чемъ послѣднее не зависитъ отъ выбора порядка отдѣльныхъ произведеній; оно коротко можетъ быть названо произведеніемъ чиселъ a_1, a_2, $a_3 \cdots a_n$ и записано въ видѣ $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$".

Этимъ предложеніемъ пользуются, напр., когда одни изъ сомножителей опредѣленныя числа, а другія неопредѣленныя; тогда принято опредѣленныя числа соединять въ одно произведеніе и полученное число ставить въ видѣ сомножителя (коэффиціента) впереди произведенія неопредѣленныхъ сомножителей, напримѣръ:

$$2a \cdot 3b = 6ab.$$

C. Дистрибутивный (распредѣлительный) законъ.

Соединеніе нѣсколькихъ чиселъ при помощи сложенія и умноженія ведетъ къ новымъ соотношеніямъ и предложеніямъ. Такъ какъ при подобнаго рода соединеніи дѣйствій результатъ уже является зависящимъ отъ порядка ихъ, то для предупрежденія недоразумѣній слѣдуетъ заключать въ скобки тѣ числа, которыя приходится соединять сначала; затѣмъ въ большія скобки заключать тѣ числа и полученные ранѣе результаты, которыя требуется снова соединить между собой и т. д. Чтобы по возможности избѣжать накопленія скобокъ, распространяютъ данное въ §§ 3 B и 4 B соглашеніе объ опущеніи скобокъ слѣдующимъ образомъ.

Называя сложеніе и вычитаніе операціями первой ступени, а умноженіе и дѣленіе (которое будетъ введено въ § 6) операціями второй ступени, принимаемъ, что скобки могутъ быть опущены въ двухъ случахъ:

1. Если выраженіе, данное для вычисленія, содержитъ только операціи одной и той же ступени и соединенія должны быть выполнены въ той послѣдовательности, какъ они записаны, т.-е. первое число должно быть соединено со вторымъ, полученный результатъ съ третьимъ и т. д.

2. Если въ вычисленіи, содержащемъ операціи различныхъ ступеней, операція высшей ступени должна быть произведена сначала. Напримѣръ, $a \cdot b + c$ означаетъ то же, что и $(a \cdot b) + c$. Если же сначала надо образовать сумму $b + c$, то слѣдуетъ писать такъ: $a(b + c)$ [1]).

---

[1]) Случаи, когда слѣдуетъ ставить или опускать скобки, основательно и подробно разобралъ E. Schröder, Lehrb. d. Arithm. u. Algebra, стр. 214 и д.

По опредѣленію произведенія имѣемъ:

$$(a+b)\cdot c = \overbrace{(a+b)+\cdots+(a+b)}^{(c\text{ частныхъ суммъ})}$$

$$(a+b)\cdot c = \overbrace{(a+\cdots+a)}^{(c\text{ слагаемыхъ})}+\overbrace{(b+\cdots+b)}^{(c\text{ слагаемыхъ})}$$

(I) $$\boldsymbol{(a+b)\cdot c = ac+bc.}$$

Равенство $(a+b)c = ac+bc$ выражаетъ дистрибутивный[1]) законъ умноженія. Его доказательство не зависитъ отъ двухъ предыдущихъ законовъ [2]). Если коммутативный законъ еще не доказанъ, то можно непосредственно изъ опредѣленія произведенія вывести слѣдующую формулу:

$$c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b.$$

Далѣе совершенно подобнымъ же образомъ (или, если угодно, примѣненіемъ способа доказательства отъ n къ $n+1$) выводится болѣе общая формула.

(II) $$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot c = a_1c+a_2c+\cdots+a_nc.$$

Повторнымъ примѣненіемъ этой формулы мы можемъ произведеніе двухъ суммъ представить въ видѣ одной суммы.

Если дано произведеніе

$$P = (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\ (b_1+b_2+\cdots+b_m),$$

то полагая

$$b_1+b_2+\cdots+b_m = B,$$

найдемъ:

$$P = (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\cdot B$$

На основаніи (II) слѣдуетъ:

$$P = a_1B+a_2B+a_3B+\cdots+a_nB$$
$$= a_1(b_1+b_2+\cdots+b_m)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_m)+a_3(b_1+b_2+$$
$$+\cdots+b_m)+\cdots+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_m);$$

Во всякомъ случаѣ надо замѣтить, что эти условія выполняются не всегда. $a : bc$ въ силу перваго условія должно было бы обозначать то же самое, что и $(a : b) . c$, и Schröder этого и требуетъ. Но безъ сомнѣнія, большинство математиковъ понимаетъ $a : bc$, какъ $a : (bc)$.

[1]) Что касается названія, ср. § 3 B, стр. 11. Прим. 1.

[2]) Изъ дистрибутивнаго закона можно легко вывести ассоціативный и коммутативный законы. Ср. Schröder, Lehrbuch der Arithm. u. Algebra. Стр. 91.

итакъ:

$$
\text{(III)} \qquad \begin{aligned} P = & a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_m \\ & + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_2 b_m \\ & + a_3 b_1 + a_3 b_2 + \cdots + a_3 b_m \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + a_n b_1 + a_n b_2 + \cdots + a_n b_m, \end{aligned}
$$

т.-е. при перемноженіи двухъ суммъ каждое слагаемое первой умножается на каждое слагаемое второй, и полученные результаты складываются.

Подобныя же формулы можно получить и для умноженія разности на число, на сумму или на разность. Равенство

$$
\text{(IV)} \qquad (a - b) \cdot c = ac - bc
$$

можно доказать, выяснивъ, что если къ лѣвой части прибавить вычитаемое правой части, то получается уменьшаемое правой части. Въ самомъ дѣлѣ:

$$
\begin{aligned} (a - b) \cdot c + bc & = [(a - b) + b]c \quad (\text{по (I)}) \\ & = ac \end{aligned}
$$

Пользуясь формулой (IV) и формулами (II) и (III) въ §§ 4 B, можно сейчасъ же доказать слѣдующія равенства

$$
\text{(V)} \qquad (a - b) \cdot (c + d) = ac + ad - bc - bd
$$

и

$$
\text{(VI)} \qquad (a - b) \cdot (c - d) = ac + bd - ad - bc.
$$

Въ формулахъ (IV), (V) и (VI) предполагается, конечно, что во всѣхъ разностяхъ уменьшаемыя больше вычитаемыхъ.

D. Теоремы о неравенствахъ.

Если

$$
b > b', \text{ а слѣд., } b = b' + z,
$$

то

$$
\text{(I)} \qquad ab = a(b' + z) = ab' + az > ab'.
$$

Слѣдовательно, если въ произведеніи двухъ сомножителей мѣняется значеніе одного изъ нихъ, то въ томъ же смыслѣ измѣнится и значеніе произведенія, откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе: Если два произведенія, состоящія каждое изъ двухъ сомножителей, имѣютъ одно и то же значеніе, при чемъ одинъ сомножитель одного изъ произведеній равенъ одному изъ сомножителей другого произведенія, то и второй сомножитель перваго произведенія равенъ второму сомножителю другого произведенія.

Если

$$a > a', \text{ а слѣд., } a = a' + u$$

и

$$b > b', \text{ а слѣд., } b = b' + z,$$

то слѣдуетъ:

$$a \cdot b = (a' + u) \cdot (b' + z) = a'b' + a'z + bu + uz,$$

слѣдовательно,

(II) $$ab > a'b'$$

E. Добавленіе. Ариөметическіе ряды.

До сихъ поръ мы все время имѣли дѣло съ такими множествами однородныхъ предметовъ, которыя не опредѣлялись однимъ какимъ-нибудь числомъ, но числа которыхъ находились въ опредѣленныхъ простыхъ соотношеніяхъ между собой; мы теперь будемъ говорить о множествахъ, которыя могутъ быть расположены въ такой послѣдовательности, что число, соотвѣтствующее каждому слѣдующему множеству на одно и то же, напр., на d, болѣе непосредственно ему предшествующаго: такимъ образомъ, обозначая числа, соотвѣтствующія отдѣльнымъ множествамъ этой послѣдовательности черезъ a_1, $a_2 \cdots a_n$,
получаемъ:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + d + d = a_1 + 2d. \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)d. \end{aligned}$$

Послѣдовательность такого рода чиселъ называется „ариөметическимъ рядомъ“, а отдѣльныя числа его „членами“. Не трудно выразить число, соотвѣтствующее совокупности отдѣльныхъ множествъ, т.-е. сумму членовъ ариөметическаго ряда въ видѣ произведенія (т.-е. суммы равныхъ слагаемыхъ), примѣняя основной законъ сложенія о независимости значенія суммы отъ порядка слагаемыхъ (гл. 1, § 3 B).

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

то

$$s = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n+1-\nu} + \cdots + a_2 + a_1,$$

слѣдовательно,

$$2s = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_\nu + a_{n+1-\nu}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + \\ + (a_n + a_1).$$

Такъ какъ вообще

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= a + (\nu - 1)\, d \\ a_{n+1-\nu} &= a + (n - \nu) d, \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1,\ 2, \cdots n)$$

и

то

$$a_\nu + a_{n+1-\nu} = 2a + (n - 1)\, d,$$

а, слѣдовательно, не зависитъ отъ ν. Поэтому $2s$ будетъ представлено въ видѣ суммы слагаемыхъ, значенія которыхъ равны $2a + (n-1)d$, и число такихъ слагаемыхъ равно n; слѣдовательно, можемъ написать:

$$\mathbf{2s = [2a_1 + (n - 1)d] \cdot n.}$$

Для примѣра возьмемъ

$$a_1 = 1 \text{ и } d = 1, \text{ то получимъ:}$$

$$2s = 2(1 + 2 + \cdots + n) = [2 + (n - 1)] \cdot n = (n + 1) \cdot n;$$

а для $a = 1$ и $d = 2$

$$2s = 2[1 + 3 + 5 \cdots + (2n - 1)] = [2 + (n - 1)2]n = 2n^2.$$ [1])

§ 6. Дѣленіе.

A. Опредѣленіе дѣленія.

Если a и b два натуральныхъ числа, то иногда возможно найти такое третье число c, что:

$$a = b \cdot c.$$

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что a есть число кратное b или b есть дѣлитель числа a.

Изъ § 5D (I) слѣдуетъ, что во всякомъ случаѣ не можетъ существовать болѣе одного такого числа c.

---

[1]) Задачи, въ которыя входятъ числа, расположенныя въ ариѳметическій рядъ, встрѣчаются уже у древнихъ египтянъ и вавилонянъ, а сумма n первыхъ натуральныхъ и n первыхъ нечетныхъ чиселъ встрѣчается въ школѣ пиѳагорейцевъ. Ср. Cantor I, стр. 40 и стр. 149.

Задачу объ отысканіи по числамъ a и b такого числа c, чтобы $a=bc$, записываютъ такъ: $c=a:b$ [1]) и называютъ a дѣлимымъ, b — дѣлителемъ, c — частнымъ, а самое дѣйствіе, посредствомъ котораго по даннымъ a и b находятъ c, называютъ дѣленіемъ. Нахожденіе по данному произведенію и второму сомножителю c перваго сомножителя b, въ силу коммутативнаго закона для неименованныхъ сомножителей, представляетъ ту же задачу. Если же A и B именованныя числа и, слѣдовательно, представляютъ множества однородныхъ объектовъ, а c число не именованное, то можно съ одной стороны по даннымъ A и c искать множество B, которое удовлетворяетъ равенству $A=Bc$; это множество называютъ c-той частью A; съ другой стороны, если даны A и B, можно искать число c, которое должно показывать, какой кратностью относительно B обладаетъ множество A, или иначе, сколько разъ B содержится въ A. Въ первомъ случаѣ дѣленіе называютъ дѣленіемъ на части, а во второмъ измѣреніемъ (дѣленіемъ по содержанію). Въ области дѣйствительно представимыхъ чиселъ дѣленіе числа A на B производятъ слѣдующимъ образомъ: изъ единицъ числа A образуютъ группу въ B единицъ; изъ единицъ оставшагося числа снова составляютъ группу въ B единицъ и т. д. Если окажется возможнымъ всѣ единицы числа A соединить въ группы по B единицъ и если при этомъ не окажется лишнихъ единицъ, то дѣленіе $A:B$ выполнимо, и число полученныхъ группъ даетъ искомое частное. Что же касается символическихъ чиселъ, въ особенности же чиселъ десятичныхъ, то мы позднѣе (§ 10) познакомимся съ болѣе короткимъ способомъ выполненія дѣленія, который основывается на ариѳметическихъ законахъ, которые будутъ выведены далѣе.

B. **Формулы дѣленія.**

Согласно опредѣленію частнаго $a:b$ есть то число (и притомъ единственное, если только оно существуетъ), для котораго:

$$(a:b)\cdot b=a \text{ [2]) или } b\cdot(a:b)=a.$$

Дѣленіе выполнено правильно въ томъ случаѣ и только въ томъ, если произведеніе частнаго и дѣлителя равно дѣлимому.

[1]) Двѣ точки, въ качествѣ знака дѣленія, введены Лейбницемъ (1684).

[2]) Число a останется, слѣдовательно, безъ измѣненія, если его сперва раздѣлить на какое-нибудь число b, а затѣмъ умножить на то же число b. Дѣленіе и умноженіе, такимъ образомъ, уничтожаютъ другъ друга; поэтому дѣленіе и умноженіе называютъ обратными дѣйствіями.

Посредствомъ этого критерія легко доказать слѣдующія равенства:

(I) $$(ab):c = a\cdot(b:c),$$

так какъ $[a\cdot(b:c)]\cdot c = a\cdot[(b:c)\cdot c] = ab$.

(II) $$a:(bc) = (a:b):c,$$

так какъ $[(a:b):c]\cdot(bc) = \{[(a:b):c]\cdot c\}b = (a:b)\cdot b = a$.

(III) $$a:(b:c) = (a:b)\cdot c,$$

так какъ $[(a:b)\cdot c]\cdot(b:c) = [(a:b)\cdot c\cdot b]:c$ (по I).

$$= [(a:b)\cdot b\cdot c]:c,$$
$$= [a\cdot c]:c = a.$$

(IV) $$(a\cdot c):(b\cdot c) = a:b,$$

так какъ $(a:b)\cdot(bc) = [(a:b)\cdot b]\cdot c = a\cdot c$.

(V) $$(a:c):(b:c) = a:b,$$

так какъ $(a:b)\cdot(b:c) = [(a:b)\cdot b]:c$ (по I).

$$= a:c.$$

(VI) $$(a:c)\cdot(b:d) = (a\cdot b):(c\cdot d),$$

так какъ $(a:c)\cdot(b:d)\cdot(c\cdot d) = ab$.

Формулы отъ (I) до (VI) вполнѣ аналогичны формуламъ отъ (I) до (VI) въ § 4 B, точно такъ же, какъ и ихъ доказательства [1]).

Изъ опредѣленія частнаго и изъ формулъ (II) и (IV) § 5 C, вытекаютъ еще два равенства, соотвѣтствующія этимъ формуламъ:

[1]) Законы сложенія и умноженія съ одной стороны, вычитанія и дѣленія съ другой, могутъ быть одновременно выведены чисто-формальнымъ путемъ (т.-е. не касаясь смысла понятій суммы, произведенія, разности и частнаго). Въ общемъ видѣ это было впервые проведено H a n k e l'емъ въ его «Theorie der komplexen Zahlensysteme» Leipzig 1867 (ср. также O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I Teil, 3. Abschn.). Въ случаѣ заданія какой-либо системы величинъ онъ называетъ соединеніе этихъ величинъ *тетическимъ* (полагательнымъ), если послѣднее для любой пары величинъ всегда даетъ въ результатѣ одну и только одну величину, и соотвѣтствующимъ ему *литическимъ* (разрѣшающимъ) такое соединеніе, которое по результату полаганія (тезиса) и по одной составной части даетъ другую. Формулы §§ 3 и 5 справедливы для каждаго тетическаго соединенія, въ которомъ ассоціативный законъ справедливъ для трехъ произвольныхъ величинъ, а коммутативный для двухъ, а формулы §§ 4 и 6—для каждаго соотвѣтственнаго литическаго соединенія лишь при томъ предположеніи, что оно однозначно, т.-е. что не можетъ оказаться двухъ или болѣе различныхъ величинъ, являющихся результатами одного и того же лизиса. Для доказательства формулъ §§ 3—6 мы иными предположеніями, кромѣ указанныхъ здѣсь, и не пользовались.

(VII) $(a_1+a_2+\cdots+a_n):c=(a_1:c)+(a_2:c)+\cdots+(a_n:c)$

и (VIII) $(a-b):c=(a:c)-(b:c)$.

Всѣ формулы этого § имѣютъ смыслъ въ области натуральныхъ чиселъ только тогда, когда въ каждомъ изъ дѣленій дѣлимое кратно дѣлителя.

§ 7. Возведеніе въ степень.

A. Понятіе степени.

Какъ для суммы одинаковыхъ слагаемыхъ (въ § 5) было введено сокращенное обозначеніе, такъ и произведеніе одинаковыхъ сомножителей, $\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{(b \text{ сомножителей})}$ пишутъ сокращенно въ видѣ a^b и называютъ степенью [1]). Повторяемый сомножитель называется основаніемъ степени. Число сомножителей b называется показателемъ степени [2]). Обозначеніе a^1, которое само по себѣ не

---

[1]) Греческое слово δύναμις, соотвѣтствующее латинскому potentia—степень (впервые, какъ спеціальное выраженіе, попадается у Гиппократа изъ Хіоса, во второй половинѣ пятаго столѣтія до Р. Х.), сперва означало лишь вторую степень, а третья степень называлась κύβος. Діофантъ (возможно, что онъ жилъ во второмъ столѣтіи до Р. Х., а всего вѣроятнѣе въ III или въ началѣ IV столѣтія по Р. Х.) изъ соединенія этихъ двухъ словъ составилъ названія для 4-ой, 5-ой, 6-ой степени. Ср. Cantor, Vorlesungen I, стр. 196 и 439. Слово exponent—показатель впервые встрѣчается у Michael'я Stiefel'я въ его Arithmetica integra, 1544. (Cantor, Vorlesungen II, стр. 432). Употребляемыя теперь обозначенія степени введены Декартомъ; но у него показатель степени всегда есть нѣкоторое опредѣленное (обозначенное цыфрой) число. Степени же съ неопредѣленнымъ показателемъ впервые ввелъ Ньютонъ.

[2]) И здѣсь надо замѣтить (аналогично тому, какъ и § 5), что сокращеніе обозначеній еще не сокращаетъ вычисленій. Чтобы дѣйствительно вычислить значеніе степени, напр. 3^4, мы пока не имѣемъ никакого иного средства, какъ вернуться къ произведенію 3.3.3.3, выражающему значеніе 3^4, а отъ этого произведенія обратиться къ суммѣ

$$[(3+3+3)+(3+3+3)+(3+3+3)]+[(3+3+3)+(3+3+3)+(3+3+3)]+$$
$$+[(3+3+3)+(3+3+3)+(3+3+3)]$$

Въ этой суммѣ слѣдуетъ еще каждую 3 замѣнить черезъ $1+1+1$ и всѣ единицы коллективно соединить въ одно число,—работа, которая дѣйствительно выполнима лишь при сильной идеализаціи нашихъ умственныхъ способностей. Въ § 10 мы увидимъ, какъ это вычисленіе принимаетъ болѣе легкую и удобную форму въ случаѣ символическихъ чиселъ.

имѣетъ смысла, такъ какъ произведеніе должно составляться по крайней мѣрѣ изъ двухъ сомножителей, должно обозначать самое число a.

Только при такомъ соглашеніи всѣ формулы этого § остаются вѣрными и для показателя 1.

B. Формулы возведенія въ степень.

Въ противоположность сложенію и умноженію, при возведеніи въ степень при любыхъ основаніи и показателѣ не имѣютъ мѣста ни коммутативный (a^b не $= b^a$), ни ассоціативный ($(a^b)^c$ не $= a^{(b^c)}$) законы.

Напротивъ, изъ опредѣленія степени и формулъ §§ 5 и 6-ого, легко получаются слѣдующія формулы:

(I) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

(II) $$a^m : a^n = a^{m-n},$$

въ предположеніи, что $m > n$.

(III) $$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m.$$

(IV) $$a^m : b^m = (a : b)^m,$$

при условіи, что a кратно b.

(V) $$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}.$$

Что касается заключенія въ скобки и пропуска ихъ, то мы должны замѣтить слѣдующее: называя возведеніе въ степень и обратное ему дѣйствіе, о которомъ будемъ говорить въ слѣдующемъ §,—дѣйствіями третьей ступени, мы можемъ распространить соглашенія, приведенныя въ § 5 C, за исключеніемъ лишь того, что a^{b^c} должно обозначать не $(a^b)^c (= a^{bc})$, но $a^{(b^c)}$.

C. Теоремы о неравенствахъ.

I. Если

$$a > a', \text{ слѣдовательно, } a = a' + z,$$

то и

$$a^n > a'^n.$$

Это неравенство, несомнѣнно, вѣрно для $n = 1$. Его общность будетъ доказана (ср. § 3 B), если удастся показать что, въ случаѣ его справедливости для $n=\nu$, оно справедливо и для $n=\nu+1$. Итакъ имѣемъ:

$$a^{\nu+1}=(a'+z)^{\nu+1}=(a'+z)^{\nu}\cdot(a'+z).$$

И такъ какъ по нашему предположенію:

$$(a'+z)^{\nu}>a'^{\nu},$$

то слѣдуетъ (§ 5 D (I)), что

$$a^{\nu+1}>a'^{\nu}\cdot(a'+z),$$

$$a^{\nu+1}>a'^{\nu+1}+a'^{\nu}\cdot z,$$

т.-е. $a^{\nu+1}>a'^{\nu+1}$, слѣдовательно:

Если основаніе увеличивается, а показатель степени остается безъ измѣненія, то и значеніе самой степени также возрастаетъ[1]).

II. Если

$$n>m, \text{ т.-е. если } n=m+u,$$

то и

$$a^n>a^m, \text{ при предположеніи, что } a>1, \text{ такъ какъ}$$

$$a^n=a^{m+u}=a^m\cdot a^u;$$

но если $\qquad a>1$, то и $a^u>1$,

слѣдовательно, $\qquad a^n>a^m.$

Отсюда имѣемъ:

Если показатель степени увеличивается, но основаніе (отличное отъ 1) остается безъ измѣненія, то значеніе степени тоже растетъ.

III. Для того, чтобы болѣе точно изслѣдовать зависимость значенія степени отъ показателя положимъ:

$$a=1+z,$$

тогда имѣемъ:

$$a^2=1+2z+z^2,$$

а слѣдовательно:

$$a^2>1+2z.$$

1) Это предложеніе непосредственно получается изъ формулы бинома, которой въ этомъ мѣстѣ мы еще не можемъ воспользоваться.

Покажемъ, что вообще:

$$(1+z)^n > 1 + nz,$$

гдѣ n означаетъ любое число. Для этой цѣли воспользуемся способомъ полной индукціи (§ 3 B, стр. 11). Если уже доказано, что

$$(1+z)^\nu > 1+\nu z,$$

то умножая обѣ части неравенства на $(1+z)$ на основаніи § 5 D (I) получимъ:

$$\begin{aligned}(1+z)^{\nu+1} &> (1+\nu z)\,(1+z)\\ &> 1+(\nu+1)z+\nu z^2\\ &> 1+(\nu+1)z.\end{aligned}$$

Неравенство справедливо для показателя $\nu+1$, какъ только оно доказано для показателя ν, а слѣдовательно, оно справедливо и вообще, такъ какъ оно справедливо для показателя 2.

D. Добавленіе. Геометрическіе ряды.

Подъ геометрическимъ рядомъ разумѣютъ множество расположенныхъ въ опредѣленной послѣдовательности чиселъ, стоящихъ въ такомъ отношеніи другъ къ другу, что каждое слѣдующее образуется изъ предыдущаго умноженіемъ на одно и то же число e. Если въ выбранномъ рядѣ первый членъ будетъ a_1, то слѣдующій членъ a_2 имѣетъ значеніе: $a_1 \cdot e$, слѣдующій a_3 значеніе $a_2 \cdot e = a_1 \cdot e^2$ и т. д. Наконецъ n-ый — значеніе $a_n = a_{n-1} \cdot e = a_1 \cdot e^{n-1}$.

Чтобы сумму

$$s = a_1 + a_1 e + a_1 e^2 + \cdots + a_1 e^{n-2} + a_1 e^{n-1}$$

n членовъ геометрическаго ряда представить въ болѣе короткой формѣ, составляемъ произведеніе

$$s \cdot e = a_1 e + a_1 e^2 + a_1 e^3 + \cdots + a_1 e^{n-2} + a_1 e^{n-1} + a_1 e^n.$$

Вычитая получаемъ:

$$s \cdot (e-1) = a_1 \cdot (e^n - 1),$$

слѣдовательно,

$$s = a_1 \cdot (e^n - 1) : (e-1).$$

Напримѣръ, для $a_1 = 1$ и $e = 2$ получаемъ

$$s = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = (2^n - 1) : (2-1) = 2^n - 1.$$

§ 8. Извлеченіе корня и логариѳмированіе.

A. Опредѣленіе извлеченія корня и логариѳмированія.

Аналогично тому, какъ по суммѣ и одному изъ слагаемыхъ, мы опредѣляли другое слагаемое, или по произведенію и одному изъ сомножителей, опредѣляли другой сомножитель, возможно, зная степень и показатель степени, опредѣлить основаніе, или, зная степень и основаніе, опредѣлить показатель.

Эти двѣ новыя задачи существенно отличны другъ отъ друга; причина этого различія заключается въ томъ, что нельзя мѣнять мѣстами основаніе и показатель степени. Если даны значенія: p— степени и n — показателя, а требуется найти основаніе a, то его называютъ n-ымъ корнемъ числа p; n называютъ показателемъ корня, p подкореннымъ (подрадикальнымъ) числомъ и пишутъ $a = \sqrt[n]{p}$ [1]).

Дѣйствіе при помощи котораго находится a по даннымъ p и n, называется извлеченіемъ корня. Если даны значеніе степени p и основаніе a, а требуется найти показатель n, то послѣдній называютъ логариѳмомъ числа p при основаніи a и пишутъ $n = {}^{(a)}\log p$ [2]). Дѣйствіе, при помощи котораго находится n по даннымъ p и a

---

1) Въ одной изъ рукописей XV столѣтія знаками извлеченія корня являются точки, стоящія передъ подкореннымъ количествомъ; одна точка означаетъ квадратный корень; двѣ — квадратный корень изъ квадратнаго корня, три — кубичный корень, четыре — корень кубичный изъ корня кубичнаго. Chr. Rudolff (1525) удлиннилъ эти точки въ штрихи и пользовался знаками $\surd$, $\surd\surd$, $\surd\surd\surd$ для соотвѣтственнаго обозначенія корней второй, четвертой, третьей степени. У Mich. Stifel'я (1553) $\surd$ есть символъ квадратнаго корня, а остальные корни характеризуются знаками, присоединяемыми къ этому символу. Уже передъ этимъ Chuquet (1484) пользовался знаками R^2, R^3, R^4 и т. д. даже R^1 для обозначенія корней 2-й, 3-й, 4-й, а соотвѣтственно и первой степени. Обычный теперь способъ обозначенія корней хотя и предложенъ Girard'омъ, но въ общее употребленіе вошелъ лишь со времени M. Rolle (Traité d'Algèbre, 1690). Превращеніе знака $\surd$ въ знакъ $\sqrt{}$ основывается, по всей вѣроятности, на примѣненіи штриха, которымъ пользовался Декартъ для соединенія нѣсколькихъ членовъ (вмѣсто нашихъ скобокъ) Ср. Cantor, Vorlesungen II, стр. 243, 352, 399, 446 и J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Bd I, стр. 214—223.

2) Основаніе a нѣкоторые авторы ставятъ надъ, и нѣкоторые подъ знакомъ log.

называютъ логариөмированіемъ [1]). Оба равенства $a=\sqrt[n]{p}$ и $n={}^{(a)}\log p$, выражаютъ ту же зависимость между тремя числами a, p и n, какъ и равенство $a^n=p$. Различный способъ записи долженъ лишь указывать различную группировку данныхъ и искомыхъ чиселъ. Если за числа p и n принять произвольныя натуральныя числа, то, вообще говоря, нѣтъ такого числа a, которое удовлетворяло бы равенству $a^n=p$; во всякомъ случаѣ, можно найти не болѣе одного такого числа, что непосредстенно слѣдуетъ изъ § 7, C I; другими словами задача извлеченія корня n-ой степени изъ числа p или не имѣетъ совсѣмъ рѣшенія, или имѣетъ только одно (въ области натуральныхъ чиселъ). Такъ же и при произвольно выбранныхъ значеніяхъ p и n, или совсѣмъ не существуетъ или существуетъ только одно число, которое $={}^{(a)}\log p$ (§ 7 C, 2). Исключеніе представляетъ лишь тотъ случай (не разсмотрѣнный въ § 7 C, 2), когда $a=1$. Если $a=1$, $p>1$, то нѣтъ такого числа n, для котораго $a^n=p$; если же $a=1$, $p=1$, то за n можно принять какое угодно число. Въ силу этого $a=1$ мы всегда будемъ исключать изъ числа значеній основанія лагориөмовъ.

B. Формулы извлеченія корня.

Для дѣйствій обратныхъ возведенію въ степень, т.-е. для извлеченія корня и логариөмированія не существуетъ формулъ, соотвѣтствующихъ равенствамъ I—VI § 4 B и § 6 B. Въ самомъ дѣлѣ доказательство этихъ равенствъ основывалось на примѣненіи соотвѣтственныхъ ассоціативнаго и коммутативнаго законовъ, для сложенія—и для умноженія; но эти законы не имѣютъ мѣста при возведеніи въ степень.

Изъ равенствъ III—V § 7 B и изъ опредѣленія $\sqrt[n]{p}$, какъ единственнаго числа (если такое существуетъ), для котораго $(\sqrt[n]{p})^n=p$, сейчасъ же вытекаютъ слѣдующія формулы:

$$\text{(I)} \qquad \sqrt[n]{p}\cdot\sqrt[n]{q}=\sqrt[n]{p\cdot q},$$

---

[1]) Изобрѣтателями вычисленія съ логариөмами являются Jobst Bürgi и John Neper (который и установилъ самое названіе логариөмъ). Neper опубликовалъ свое Descriptio mirifici logarithmorum canonis въ 1614 г., Bürgi свои Progress-Tabulen лишь въ 1620, но обработалъ ихъ уже между 1603—1611 гг. Ср. Cantor, Vorlesungen II, стр. 725 и д. Подробнѣе мы будемъ говорить о логариөмахъ Bürgi и Neper'а въ гл. V, § 5 A.

такъ какъ

$$(\sqrt[n]{p}\cdot\sqrt[n]{q})^n=(\sqrt[n]{p})^n\cdot(\sqrt[n]{q})^n=p\cdot q.$$

Слѣдовательно, лѣвая часть, будучи возведена въ степень n даетъ $p\cdot q$. Такъ какъ такое число можетъ быть только одно и должно обозначаться черезъ $\sqrt[n]{p\cdot q}$, то этимъ равенство (I) доказано.

(II) $$\sqrt[n]{p}:\sqrt[n]{q}=\sqrt[n]{p:q};$$

доказательство то же, что и для формулы (I).

Повторнымъ примѣненіемъ равенства (I) получаемъ:

$$\sqrt[n]{p_1}\cdot\sqrt[n]{p_2}\cdots\sqrt[n]{p_m}=\sqrt[n]{p_1\cdot p_2\cdots p_m},$$

а при

$$p_1=p_2=\cdots=p_m=p$$

(III) $$(\sqrt[n]{p})^m=\sqrt[n]{p^m}.$$

(IV) $$\sqrt[n\cdot r]{p^{m\cdot r}}=\sqrt[n]{p^m},$$

такъ какъ

$$(\sqrt[n]{p^m})^{n\cdot r}=\left[(\sqrt[n]{p^m})^n\right]^r=(p^m)^r=p^{m\cdot r}.$$

(V) $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}}=\sqrt[n\cdot m]{p},$$

такъ какъ

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}}\right)^{n\cdot m}=\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}}\right)^n\right]^m=(\sqrt[m]{p})^m=p.$$

Точно такъ же

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}}=\sqrt[m\cdot n]{p},$$

а, слѣдовательно,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}}.$$

Эти формулы имѣютъ смыслъ только въ томъ случаѣ, если встрѣчающіеся въ нихъ корни извлекаются.

C. **Формулы логариѳмированія.**

Пользуясь равенствами (I) и (II) § 7 B, находимъ:

(I) $${}^{(a)}\log(p\cdot q)={}^{(a)}\log p+{}^{(a)}\log q.$$

Такъ какъ при умноженіи равенствъ

$$a^n=p$$

и

$$a^m = q$$

на основанiи § 7 *B*, I получается:

$$a^{n+m} = p \cdot q,$$

то

$${}^{(a)}\log(p \cdot q) = n + m = {}^{(a)}\log p + {}^{(a)}\log q.$$

(II) $${}^{(a)}\log(p : q) = {}^{(a)}\log p - {}^{(a)}\log q;$$

доказательство ведется аналогично, какъ и для I.

Повторнымъ примѣненiемъ равенства I, получаемъ:

$${}^{(a)}\log(p_1 \cdot p_2 \cdots p_r) = {}^{(a)}\log p_1 + {}^{(a)}\log p_2 + \cdots + {}^{(a)}\log p_r,$$

а для $p_1 = p_2 = \cdots = p_r = p$:

(III) $${}^{(a)}\log(p^r) = r \cdot {}^{(a)}\log p.$$

Формулы отъ (I) до (III) пока имѣютъ значенiе только въ тѣхъ случаяхъ, когда встрѣчающiеся въ нихъ логариѳмы суть натуральныя числа.

§ 9. Общiй резюмирующiй обзоръ дѣйствiй.

Отъ суммы двухъ чиселъ возможенъ переходъ къ произведенiю, а отъ произведенiя двухъ сомножителей переходъ къ степени; этотъ переходъ можно осуществить слѣдующимъ образомъ: замѣняемъ одно изъ двухъ слагаемыхъ (сомножителей) суммой (произведенiемъ); одно изъ двухъ слагаемыхъ (сомножителей) этой суммы (произведенiя) новой суммой (произведенiемъ) и такъ продолжаемъ, какъ угодно далеко, а затѣмъ всѣ введенныя числа принимаемъ равными другъ другу. Безразлично, замѣнять ли суммой постоянно первое слагаемое (сомножитель) или второе, такъ какъ для сложенiя и для умноженiя справедливъ коммутативный законъ. Теперь является вопросъ, можно ли подобнымъ же образомъ отъ возведенiя въ степень перейти къ новымъ дѣйствiямъ? Если оперировать надъ однимъ числомъ a и постоянно замѣнять основанiе черезъ степень, то постепенно можно получить слѣдующiя числа: a^a, $(a^a)^a$, $[(a^a)^a]^a$ и т. д.; если же постоянно замѣнять показатель степени, степенью, то получатся слѣдующія числа: a^a, $a^{(a^a)}$, $a^{[a^{(a^a)}]}$ и т. д.; всѣ эти величины являются несомнѣнно вполнѣ опредѣленными, если извѣстно значеніе a и число n, которое указываетъ, сколько разъ написано a; поэтому мы для упрощенія письма степенныя формы перваго рода будемъ обозначать черезъ $(a, 2)$, $(a, 3)$, $(a, 4)$, (a, n), а второго рода черезъ $[a, 2]$, $[a, 3], \cdots [a, n]$. Изъ § 7 B, V получаемъ непосредственно:

$$(a, n) = a^{\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{(n-1)\text{ множитель}}} = a^{(a^{n-1})},$$

слѣдовательно, оно приводится къ обыкновенной степени. Напротивъ, символъ $[a, n]$ опредѣляетъ новое дѣйствіе, которому дано названіе операціи четвертой ступени. Въ математической литературѣ имѣется сравнительно мало работъ, посвященныхъ изученію этой и обратной ей операціи [1]). Такъ какъ развитіе теоріи этихъ дѣйствій является очень сложнымъ, а насущной потребности въ примѣненіи ихъ до сихъ поръ не встрѣчалось, то и мы не станемъ на нихъ останавливаться болѣе подробно, а въ особенности на разсмотрѣніи операцій 5, 6 и т. д. ступеней, къ которымъ можно было бы притти, поступая далѣе аналогичнымъ путемъ; остановимся лишь на семи дѣйствіяхъ, опредѣленныхъ нами въ §§ 3—8. Первыя три прямыхъ дѣйствія, а именно: сложеніе, умноженіе и возведеніе въ степень приводятся къ сложенію, а въ концѣ концовъ къ коллективному соединенію единицъ въ одно число. Теоретически выполненіе этихъ дѣйствій всегда возможно, если только мы достаточно разовьемъ у себя способность числового представленія. Въ дѣйствительности же, если ограничиться собственно представимыми числами, то мы натолкнемся вскорѣ на неопреодолимыя преграды, которыя оказываются устранимыми, если обратиться къ символическому образованію чиселъ. Четыре обратныхъ дѣйствія: вычитаніе, дѣленіе, извлеченіе корня и логариѳмированіе, не всегда выполнимы; если же они выполнимы, то только единственнымъ образомъ (единственное исключеніе представляетъ ${}^{(1)}\log 1$). Съ систематиче-

---

1) Eisenstein, Journ. f. Math, Bd. 28, стр. 49; Woepcke, Journ. f. Math. Bd. 42, стр. 83; Gerlach, Zeitschrift f. math. u. naturwissenschaftl. Unterricht. 13. Jahrg. стр. 423; Schulze, Archiv f. Math u. Phys. (2) III, стр. 302.

скими методами опредѣленія результатовъ обратныхъ дѣйствій мы познакомимся лишь въ дальнѣйшихъ §§, посвященныхъ символическимъ числамъ.

Если желательно указать, что произвольное число чиселъ должно быть соединено при помощи различныхъ дѣйствій, то знаки, обозначающія числа, соединяютъ при помощи соотвѣтствующихъ знаковъ дѣйствій, и при помощи скобокъ указываютъ порядокъ дѣйствій, согласившись, сначала производить дѣйствія, заключенныя внутри тѣхъ скобокъ, которыя не охватываютъ какихъ-либо другихъ. Чтобы избѣжать накопленія скобокъ, пользуются соглашеніями, указанными въ §§ 5 С и 7 В.

Символъ, составленный путемъ соединенія знаковъ чиселъ и знаковъ дѣйствій называется вообще выраженіемъ; свое спеціальное названіе это выраженіе получаетъ въ зависимости отъ того дѣйствія, которое выполняется послѣднимъ. Если это сложеніе или вычитаніе, то такое выраженіе называется также аггрегатомъ (многочленомъ), и по числу членовъ, соединяемыхъ при помощи сложенія и вычитанія, биномомъ (два члена), триномомъ (три члена) и полиномомъ (многочленъ, неопредѣленное число членовъ). Если послѣднее дѣйствіе будетъ операціей ступени высшей, чѣмъ первая или, если выраженіе состоитъ просто изъ одного числа, то оно называется одночленомъ (мономъ).

§ 10. Систематическія числа; преимущественно десятичная система чиселъ.

А. Построеніе числовой системы и письменное изображеніе систематическихъ чиселъ.

Послѣ того, какъ мы познакомились въ §§ 3—9 съ основными дѣйствіями и ихъ законами, мы теперь, развивая дальше мысли § 1, можемъ подробнѣе ознакомиться съ построеніемъ систематически составленныхъ символическихъ числовыхъ формъ, замѣняющихъ собственно не представимыя числа, и разсмотрѣть дѣйствія надъ ними. Такъ какъ нѣтъ необходимости за основаніе системы брать непремѣнно число 10 (ср. стр. 5, прим. 2), то оставимъ основаніе неопредѣленнымъ и обозначимъ его буквой g. Для того, чтобы сосчитать какое-либо множество вещей, мы будемъ имѣть въ своемъ распоряженіи такія числа:

$$\text{(I)}\qquad 1,\ 2,\ 3 \cdots (g-1),$$

$$\text{(II)}\qquad g,\ 2g,\ 3g \cdots (g-1)g.$$

$$\text{(III)}\qquad g^2,\ 2g^2,\ 3g^2 \cdots (g-1)g^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)\qquad g^n,\ 2g^n,\ 3g^n \cdots (g-1)g^n.$$

Если при ограниченности нашей способности числового представленія на самомъ дѣлѣ окажется невозможнымъ коллективное соединеніе въ нашемъ сознаніи въ одно цѣлое всѣхъ единицъ воспринимаемаго множества, чего собственно и требуетъ понятіе числа, то все-таки возможно это нужное намъ число опредѣлить, какъ сумму одного числа ряда I, одного числа ряда II и т. д.; при чемъ нѣтъ необходимости въ томъ, чтобы собственное значеніе этихъ вспомогательныхъ чиселъ доходило до нашего сознанія; наоборотъ, мы часто ограничиваемся сочетаніемъ знаковъ или названій. Такимъ образомъ, любое число можетъ быть представлено суммой слѣдующаго вида:

$$a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0,$$

т.-е. суммой произведеній, въ которыхъ значеніе каждаго перваго сомножителя не болѣе $g-1$, а второй есть степень g, и это изображеніе числа есть точное выраженіе принципа, при помощи котораго еще на ступеняхъ первобытной культуры были образованы символическія числа [1]). Чтобы имѣть возможность изобразить всѣ числа, нужны только знаки для изображенія чиселъ отъ 1 до $(g-1)$ (для десятичной системы знаки для чиселъ отъ одного до девяти). Нѣтъ необходимости въ особомъ знакѣ для основного числа системы, если числа заносить на счетную доску („Abacus“) [2]),

---

1) Такое систематическое изображеніе произвольнаго числа есть самое простое и естественное, но во всякомъ случаѣ не единственно возможное. G. Cantor въ Zeitschr. f. Math. u. Phys. 14 (1869), стр. 121, показалъ, что каждое число можетъ быть представлено въ видѣ $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_\nu a_\nu + \alpha_{\nu+1} a_{\nu+1} + \ldots$, и при томъ только однимъ способомъ, если $a_1, a_2, \ldots a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots$ суть какія-либо числа, каждое изъ которыхъ дѣлится на предыдущее, и если α_ν (для всѣхъ ν) можетъ принимать значенія $0, 1, 2, 3, \ldots, \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} - 1$.

2) Названіе произошло отъ греческаго слова ἄβαξ, происхожденіе котораго въ точности неизвѣстно.

т.-е. на доску, которая какимъ-либо образомъ, напр., вертикальными, параллельными другъ другу линіями разбита на колонны, изъ которыхъ каждая предназначена для опредѣленнаго числа a_ν. Такого рода счетныя доски существовали у всѣхъ народовъ древности, а въ христіанской Европѣ были распространены вплоть до второй половины среднихъ вѣковъ. Въ то время, какъ первоначально, напр., у грековъ [1]) и римлянъ [2]) числа a_ν обозначались камешками на счетной доскѣ, индусы для чиселъ отъ единицы до девяти пользовались особыми знаками (быть-можетъ, начальными буквами словъ, соотвѣтствующихъ числамъ), которые, по всей вѣроятности, во II столѣтіи по Р. Х. проникли въ Александрію, а оттуда далѣе въ западную Европу и были использованы для счета на абакѣ. Наибольшаго же упрощенія въ письмѣ чиселъ индусы достигли по всей вѣроятности нѣсколько позднѣе [3]), а именно съ изобрѣтеніемъ нуля, т.-е. особаго знака для указанія на отсутствіе въ числѣ какого-либо разряда g^ν. Лишь тогда оказалось возможнымъ освободиться отъ вертикальныхъ линеекъ для разграниченія столбцовъ, и, придерживаясь опредѣленнаго порядка записи разрядовъ, отмѣчать отсутствіе члена g^ν простымъ указаніемъ того мѣста, которое должно было занимать a_ν, а любое число опредѣлять лишь при помощи послѣдовательной записи знаковъ: $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ [4]). Эта „помѣстная индусская система“ съ нулемъ (и со знаками для обозначенія чиселъ отъ единицы до девяти, измѣнившимися за это время), проникла въ VIII столѣтіи къ арабамъ [5]), отъ которыхъ около 1100 года ей научились романскіе и германскіе народы. Въ теченіе двѣнадцатаго столѣтія на западѣ абацисты, т.-е. сторонники вычисленія при помощи абака, и такъ называемые

---

[1]) Эти камешки носятъ названіе ψῆφοι, и образованное отсюда слово ψηφίζειν, — *перекидывать камешками,* вообще употребляется въ смыслѣ «вычислять». M. Cantor. Vorleungen I, стр. 120.

[2]) И латинское слово calculus (вычисленіе) происходитъ отъ названія такихъ же камней (calculi). M. Cantor. Vorlesungen I, стр. 493.

[3]) Ср. стр. 2 примѣчаніе 1.

[4]) Надъ буквами имѣется черта, такъ какъ въ противномъ случаѣ это выраженіе могло означать произведеніе чиселъ a_n, a_{n-1}, $a_{n-2} \ldots a_1$, a_0. Такое смѣшеніе устранится, если вмѣсто a_ν будутъ подставлены опредѣленныя числа. Ср. § 5 A.

[5]) У арабовъ нуль называется as — sifr «пустота», и послѣднее представляетъ переводъ индусскаго, означающаго то же самое, слова sunya. Изъ as—sifr произошла наша «цыфра» (Ziffer) и французское «zéro».

алгориѳмики [1]), пользовавшіеся помѣстной системой, находились въ постоянной враждѣ, пока постепенно первые не были вытѣснены, и въ XIII столѣтіи побѣдила индусская система, по крайней мѣрѣ, среди ученыхъ, въ то время какъ ея распространеніе среди широкихъ массъ начинается лишь во второй половинѣ XV столѣтія [2]).

Само собой ясно, что въ каждой изъ строкъ (I), (II) и т. д., на стр. 38, всѣ числа записаны въ рядъ по своей величинѣ, а въ первой строкѣ такъ, что каждое послѣдующее на 1 больше предыдущаго. Если помѣстить послѣ каждаго числа второй строки всѣ числа, образующіяся послѣдовательнымъ сложеніемъ ея съ числами строки 1, то и въ этой каждое послѣдующее будетъ на 1 больше предыдущаго, а первое число этой строки будетъ единицей больше послѣдняго числа первой строки; если за каждымъ числомъ третьей строки помѣстить также всѣ числа, получающіяся послѣдовательнымъ сложеніемъ чиселъ этой строки съ числами первой и дополненной второй, то указанное выше свойство будетъ имѣть мѣсто и здѣсь.

Если продолжать такимъ же образомъ произвольно далеко, то совокупность всѣхъ составленныхъ строкъ представитъ изъ себя числовой рядъ, который начинается съ единицы и каждое число котораго на единицу больше предыдущаго. Нашъ принципъ систематическаго образованія чиселъ даетъ тѣ же числа, къ которымъ мы приходимъ, если станемъ, начиная съ единицы, образовывать новыя числа послѣдовательнымъ прибавленіемъ единицы; такимъ образомъ, наши систематическія числа могутъ быть разсматриваемы, какъ обозначенія чиселъ такъ называемаго натуральнаго ряда [3]).

Подобно тому, какъ понятіе любого числа образуется изъ понятій чиселъ $1, 2 \cdots g$ при помощи дѣйствій сложенія, умноженія и возведенія въ степень, такимъ же образомъ и названія любыхъ чиселъ составляются изъ названій чиселъ $1, 2 \cdots g$ и степеней g.

---

[1]) Названіе «алгориѳмъ», которое теперь означаетъ дѣйствіе, ставшее постояннымъ правиломъ, происходитъ отъ собственнаго имени восточно-арабскаго писателя начала IX-го вѣка Мухамедъ-Ибнъ-Муза-Альхваризми, написавшаго алгебру и ариѳметику, въ послѣдней изъ которыхъ онъ излагаетъ дѣйствія надъ числами, написанными по индусскому способу.

[2]) Ср. J. Tropfke, Gesch. d. Elementarmathem. I, стр. 9—16. (См. русск. пер. Бема и Струве. Ред.).

[3]) Ср. прим. 2, стр. 5,

(У большинства народовъ g = десяти) [1]. Готовыми названіями чиселъ, въ порядкѣ, соотвѣтствующемъ строкамъ (I), (II), (III) и т. д., стр. 38, благодаря частому употребленію, мы настолько легко владѣемъ, по крайней мѣрѣ въ предѣлахъ практики, что для счета множествъ мы пользуемся болѣе удобнымъ пріемомъ, чѣмъ тотъ, который былъ намъ нуженъ для построенія понятія числа. Вмѣсто того, чтобы, присоединивъ къ одному объекту множества другой, сказать: одинъ да одинъ, есть два, затѣмъ, присоединивъ слѣдующій, сказать: два да одинъ, есть три и т. д., и, наконецъ, дойдя до десяти объектовъ (чтобы остановиться на мгновеніе при g равномъ десяти), соединить ихъ въ одну группу и т. д., названныя выраженія мы сокращаемъ чисто механически, говоря при присоединеніи отдѣльныхъ вещей просто: одинъ, два, три и т. д. въ привычномъ, благодаря долгому употребленію, порядкѣ [2]). Когда приходится сталкиваться съ числами, выходящими за предѣлы привычныхъ границъ, намъ ничего болѣе не

---

[1]) Въ то время, какъ у всѣхъ народовъ, какъ это впервые указалъ Hankel (Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, стр. 32), въ аддитивно составленномъ написанномъ числѣ большая составная часть всегда предшествуетъ меньшей (въ обычно принятомъ порядкѣ письма), въ чтеніи какъ разъ именно въ нѣмецкомъ языкѣ (а также въ санскритѣ и арабскомъ) единицы произносятся раньше десятковъ. (Также и въ русскомъ языкѣ отъ 11 до 19. Ред.).

[2]) Въ этомъ чисто-механическомъ пріемѣ, до котораго, благодаря продолжительному упражненію, сократился первичный методъ счета, Гельмгольтцъ въ своемъ сочиненіи «Zählen und Messen» усматриваетъ (Philosoph. Aufsätze zu Zellers Doktorjubiläum) истинную сущность понятія числа. Онъ разсматриваетъ числа, какъ произвольные знаки (или слова), между которыми первоначально нѣтъ никакихъ соотношеній по величинѣ, но послѣдовательность которыхъ была произвольно установлена нашими предками, когда они создавали языкъ. Съ его точки зрѣнія, счетъ множества ведется такимъ образомъ, что каждому изъ объектовъ этого множества послѣдовательно приводится въ соотвѣтствіе опредѣленный членъ числового ряда въ его установленномъ порядкѣ; послѣднее названное при этомъ процессѣ число и называется числомъ соотвѣтствующаго множества. Ясно, что опредѣленное такимъ образомъ понятіе числа не совпадаетъ съ тѣмъ, которое обычно связываютъ съ числомъ при всѣхъ примѣненіяхъ ариѳметики. Вслѣдствіе этого и дѣйствія надъ такими числами остаются лишь операціями надъ чистыми символами, хотя бы они и были развиты весьма послѣдовательно, причемъ собственное значеніе этихъ символовъ остается неяснымъ. Подобной же точки зрѣнія, какъ и Гельмгольтцъ, придерживается и L. Kronecker въ его сочиненіи «Über den Zahlbegriff» (Philosoph. Aufsätze zu Zellers Doctorjubiläum u. Journ. f. Math. Bd. 101). Ср. Husserl, Philosophie der Arithmetik; Anhang zum ersten Teil.

остается, какъ снова воспользоваться основнымъ принципомъ образованія понятія числа и составленія его названія. Благодаря полному параллелизму, который существуетъ между систематическимъ построеніемъ понятія числа, съ одной стороны, и обозначеніемъ его въ индусской помѣстной системѣ, съ другой, мы можемъ выполнять всѣ дѣйствія не надъ самими числовыми понятіями, а надъ ихъ знаками, соединяя и перемѣщая ихъ по опредѣленнымъ правиламъ, и только лишь послѣ того, какъ уже полученъ результатъ, намъ остается перейти къ понятію, соотвѣтствующему найденному знаку. Мы убѣдимся, теперь что такимъ образомъ можно безъ особаго труда выполнять дѣйствія, которыя мы раньше (сравни прим. 3, стр. 18 и прим. 2, стр. 29) должны были признать невыполнимыми. Всякое вычисленіе сводится къ тому, чтобы любое данное выраженіе, которое само можно воспринять, какъ символъ числа въ собственномъ смыслѣ, привести къ формѣ числа систематическаго; и только тогда, когда это сдѣлано, мы получаемъ опредѣленное представленіе о величинѣ числа, характеризованнаго этимъ выраженіемъ, такъ какъ всѣ систематическія числа расположены въ рядъ по величинѣ, и мы безъ всякихъ затрудненій можемъ сравнить это число съ какимъ-либо другимъ. Но раньше, чѣмъ начать разсмотрѣніе дѣйствій надъ систематическими числами, мы должны хотя бы вкратцѣ опредѣлить дѣйствія для нуля, введеннаго нами въ этомъ § въ качествѣ числа.

B. **Опредѣленіе дѣйствій для числа нуль.**

Если во множествѣ A находится a вещей опредѣленнаго вида, а въ другомъ множествѣ N, напротивъ, нѣтъ ни одной вещи того же рода, то множество, образованное соединеніемъ A и N содержитъ только a вещей этого рода; поэтому $a+0=0+a=a$. По опредѣленію вычитанія (§ 4 A) отсюда сейчасъ же слѣдуетъ:

$$a-0=a \quad \text{и} \quad a-a=0.$$

Далѣе имѣемъ $0\cdot a=\overbrace{0+0+0+\cdots+0}^{a \text{ слагаемыхъ}}=0$. Символъ $a\cdot 0$ не имѣетъ, собственно говоря, никакого смысла, но чтобы и его было бы возможно разсматривать, какъ произведеніе, для котораго справедливъ коммутативный законъ, опредѣляемъ: $a\cdot 0= =0\cdot a=0$. Отсюда вытекаетъ [по опредѣленію частнаго § 6 A]

$0:a=0$, $0:0=a$, въ то время, какъ задача $b:0$, гдѣ b есть число отличное отъ нуля, не допускаетъ рѣшенія въ нашей области чиселъ. Такъ какъ дѣленіе на нуль или совсѣмъ невыполнимо, или (если дѣлимое то же равно нулю) частное можетъ быть любымъ числомъ, то мы совершенно исключаемъ 0 въ качествѣ дѣлителя. $0^a = \overbrace{0\cdot 0\cdots 0}^{(a \text{ множителей})} = 0$. Подъ символомъ a^0, который самъ по себѣ не имѣетъ смысла, мы подразумѣваемъ число равное единицѣ для того, чтобы формула $a^m : a^n = a^{m-n}$ (§ 7 B (II)) имѣла мѣсто и для $m = n$. Далѣе $\sqrt[a]{0} = 0$, $\sqrt[0]{1} =$ любому числу a; требованіе, указываемое символомъ $\sqrt[0]{b}$, если b отлично отъ единицы, не можетъ быть удовлетворено никакимъ числомъ, почему 0 мы и исключаемъ, какъ показатель корня. Изъ $a^0 = 1$ слѣдуетъ, что $\log 1$ при любомъ основаніи a равенъ нулю. Такъ какъ a^m, при $a > 0$, всегда отлично отъ нуля, то число 0 не имѣетъ логариѳма при основаніи отличномъ отъ нуля; такъ какъ для основанія 0, логариѳмъ 0 можетъ быть равенъ и любому числу, а для числа отличнаго отъ нуля при этомъ основаніи логариѳма не существуетъ, то мы и не станемъ принимать нуль за основаніе логариѳмовъ. Въ силу опредѣленій дѣйствій, данныхъ для 0, всѣ выведенныя формулы въ §§ 3—8, остаются вѣрными, если одну или нѣсколько встрѣчающихся тамъ буквъ замѣнить нулемъ; если при этомъ заранѣе предположить, что онѣ и въ этомъ случаѣ имѣютъ еще смыслъ въ области натуральныхъ чиселъ.

C. Сложеніе систематическихъ чиселъ.

Сложеніе съ самаго начала требуетъ разложенія отдѣльныхъ слагаемыхъ на единицы и затѣмъ коллективнаго соединенія въ одно цѣлое,—операціи, дѣйствительное выполненіе которой при болѣе или менѣе большихъ числахъ превосходитъ наши силы. Если бы мы для замѣны подлинныхъ чиселъ, недоступныхъ нашему непосредственному представленію, воспользовались натуральнымъ рядомъ [1]), т.-е. исходя отъ какого-либо извѣстнаго числа, опредѣляли новое, какъ сумму этого и единицы, слѣдующее, какъ сумму вновь опредѣленнаго и единицы и т. д., то намъ не оставалось бы другого пути для сложенія, какъ присчитать къ дан-

[1]) Сравни § 1, стр. 3 и 4.

ному слагаемому последовательно столько единицъ, сколько ихъ содержитъ другое слагаемое; хотя это и представляетъ всегда выполнимое дѣйствіе, но при большихъ числахъ оно весьма длинно. Пусть A и B суть два числа нашей системы съ основаніемъ g и пусть

$$A=\overline{a_n\cdots a_m\cdots a_2a_1a_0}=a_ng^n+\cdots+a_mg^m+\cdots+a_2g^2+a_1g+a_0$$

и

$$B=\overline{b_m\cdots b_2b_1b_0}=b_mg^m+\cdots+b_2g^2+b_1g+b_0\quad(n\geqq m);$$

тогда на основаніи формулъ, выведенныхъ въ §§ 3 и 5 получаемъ:

$$A+B=a_ng^n+\cdots+(a_m+b_m)g^m+\cdots+(a_2+b_2)g^2+\\+(a_1+b_1)g+(a_0+b_0).$$

Правая часть написаннаго равенства уже имѣетъ форму систематическаго числа, при томъ условіи, что, для любого μ

$$a_\mu+b_\mu<g.$$

Если же для какого-нибудь значенія μ

$$a_\mu+b_\mu\geqq g;$$

то полагаемъ

$$a_\mu+b_\mu=g+c_\mu,$$

гдѣ

$$c_\mu<g$$

и

$$(a_{\mu+1}+b_{\mu+1})g^{\mu+1}+(a_\mu+b_\mu)g^\mu=(a_{\mu+1}+b_{\mu+1}+1)g^{\mu+1}+c_\mu g^\mu.$$

Если и $a_{\mu+1}+b_{\mu+1}+1\geqq g$, то избытокъ приходится перенести такимъ же образомъ въ коэффиціентъ при $g^{\mu+2}$ и т. д. Въ виду такихъ преобразованій цѣлесообразно начинать сложеніе съ низшихъ разрядовъ.

Сложеніе двухъ произвольныхъ систематическихъ чиселъ сводится къ цѣлому ряду сложеній (во всѣхъ дѣйствительно встрѣчающихся случаяхъ на сравнительно небольшое число сложеній) такихъ чиселъ, которыя меньше, чѣмъ g, и работа эта еще значительно облегчается тѣмъ, что результаты такихъ сложеній твердо усваиваются при первоначальномъ обученіи. Безъ существенныхъ измѣненій въ характерѣ дѣйствія можно образовать сумму любого числа систематическихъ чиселъ.

D. Вычитаніе систематическихъ чиселъ.

Пользуясь формулами § 4 B, (VI) и § 5 C, (IV), получаемъ:

$$A - B = a_n g^n + \cdots + (a_m - b_m)g^m + \cdots + (a_2 - b_2)g^2 +$$
$$+ (a_1 - b_1)g + (a_0 - b_0).$$

Если при любомъ значеніи μ $a_\mu \geqq b_\mu$, то правая часть уже представляетъ изъ себя число нашей системы. Если для какого-либо значенія $\mu a_\mu < b_\mu$, то полагаемъ

$$a_{\mu+1}g^{\mu+1} + a_\mu g^\mu = (a_{\mu+1} - 1)g^{\mu+1} + (g + a_\mu)g^\mu.$$

Если $a_{\mu+1} = 0$, т.-е. члена, содержащаго $g^{\mu+1}$, въ числѣ A совсѣмъ не встрѣчатся, то приходится обратиться къ $a_{\mu+2}g^{\mu+2}$ и написать: $a_{\mu+2}g^{\mu+2} + a_\mu g^\mu = (a_{\mu+2} - 1)g^{\mu+2} + (g - 1)g^{\mu+1} + (g + a_\mu)g^\mu$ и т. д. Значенія разностей $a_\mu - b_\mu$ и $g + a_\mu - b^\mu$ каждый ребенокъ также заучиваетъ наизусть при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ.

E. Умноженіе систематическихъ чиселъ.

Произведеніе двухъ собственно представимыхъ, не образованныхъ при помощи соединенія, чиселъ, не можетъ быть получено инымъ путемъ, какъ непосредственнымъ сложеніемъ; а именно, возвращеніемъ къ суммѣ, для которой произведеніе служитъ лишь сокращеннымъ обозначеніемъ (ср. стр. 18, прим. 3). Для умноженія же двухъ систематическихъ чиселъ на основаніи формулъ, выведенныхъ въ § 5 и 7 получается способъ, болѣе быстро ведущій къ цѣли.

По § 5 C, (III) и § 7 B, (I) имѣемъ:

$$\begin{aligned}A \cdot B = a_n b_m g^{m+n} &+ a_{n-1} b_m g^{m+n-1} + a_{n-2} b_m \cdot g^{m+n-2} + \cdots\\ &+ a_n b_{m-1} g^{m+n-1} + a_{n-1} b_{m-1} \cdot g^{m+n-2} + \cdots\\ &+ a_n b_{m-2} \cdot g^{m+n-2} + \cdots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\cdots + a_0 b_2 g^2\\ &\cdots + a_1 b_1 g^2 + a_0 b_1 g\\ &\cdots + a_2 b_0 g^2 + a_1 b_0 g + a_0 b_0.\end{aligned}$$

Умноженіе двухъ произвольныхъ чиселъ сводится, благодаря этому, къ вычисленію ряда произведеній паръ сомножителей меньшихъ g. Всѣ произведенія такого рода разъ навсегда вычислены путемъ непосредственнаго сложенія и соединены въ „таблицу умноженія“, которая тоже твердо усваивается при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ[1]).

Если такого рода произведеніе, напр. $a_\nu \cdot b_\mu$, больше чѣмъ $g-1$, то оно является въ формѣ $cg+d$, гдѣ c и d оба меньше g.

Въ такомъ случаѣ полагаемъ:

$$a_{\nu+1}b_\mu g^{\mu+\nu+1}+a_\nu b_\mu g^{\mu+\nu}=(a_{\nu+1}b_\mu+c)g^{\mu+\nu+1}+dg^{\mu+\nu}$$

и съ полученнымъ коэффиціентомъ поступаемъ точно такъ же, если $a_{\nu+1}b_\mu+c>g-1$. Такъ какъ всякій вычисляющій, при нѣкоторой привычкѣ, небольшія преобразованія производитъ въ умѣ, то каждая строка суммы, представляющей $A \cdot B$ (см. стр. 46), можетъ быть сразу написана въ формѣ систематическаго числа. Ради этихъ преобразованій цѣлесообразно каждую строку начинать съ наименьшей степени числа g, т.-е. начинать умноженіе съ крайняго праваго разряда множимаго. Такъ какъ безразлично, въ какомъ порядкѣ складывать въ окончательномъ результатѣ эти $m+1$ строку, то вычисленіе можно начинать, какъ съ высшаго, такъ и съ низшаго разряда множителя.

Вмѣсто того, чтобы сначала выписывать отдѣльныя строки, можно, если есть навыкъ складывать въ умѣ двузначныя числа, вычислять и складывать стоящія вертикально другъ подъ другомъ произведенія и при этомъ каждую изъ частныхъ суммъ

$$a_0b_0,\ a_0b_1+a_1b_0,\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 \text{ и т. д.}$$

можно сейчасъ же приводить къ виду

$$c\cdot g+d, \text{ гдѣ } d\leqq g-1.$$

Такимъ образомъ полученныя числа d и будутъ цыфрами искомаго произведенія, которое безъ всякихъ промежуточныхъ письменныхъ вычисленій можно подписывать, начиная справа.

Работа облегчается, если цыфры множителя нанести на полоску бумаги въ обратномъ порядкѣ $b_0b_1\cdots b_m$ и эту полоску такъ передвигать надъ множимымъ, что сначала b_0 придется надъ a_0, затѣмъ b_0 надъ a_1, затѣмъ b_0 надъ a_2 и т. д. и при каждомъ положеніи полоски умножать пары вертикально стоящихъ другъ

---

[1]) У насъ и у всѣхъ современныхъ культурныхъ народовъ при $g=10$. Если желательно вычислять по другой системѣ, то слѣдуетъ заготовить прежде всего аналогичную таблицу при соотвѣтствующемъ основаніи.

подъ другомъ цыфръ и въ умѣ складывать произведенія; такимъ способомъ очень удобно получаются значенія слѣдующихъ выраженій:

$$a_0b_0,\ a_0b_1+a_1b_0,\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0 \text{ и т. д.}$$

Болѣе подробныя указанія относительно цѣлесообразнаго расположенія дѣйствій при многозначныхъ сомножителяхъ можно найти у Luroth „Vorlesungen über numeriches Rechnen“ § 7.

F. Дѣленіе систематическихъ чиселъ.

Если бы при образованіи произведенія коэффиціенты степеней числа g оставались безъ измѣненія въ той формѣ, въ какой они являются первоначально, то можно было бы по произведенію $C=A\cdot B$ и одному изъ сомножителей A, опредѣлить другой множитель B слѣдующимъ образомъ: прежде всего по коэффиціенту при g^{m+n} опредѣлить b_m, затѣмъ по коэффиціенту при g^{m+n-1} вычислить b_{m-1} и т. д.

Но такъ какъ этотъ способъ, при изображеніи C въ видѣ систематическаго числа, не примѣнимъ, въ виду того, что вслѣдствіе ряда преобразованій нельзя знать первоначальнаго значенія коэффиціентовъ,—то необходимо итти другимъ путемъ. Мы прежде всего постараемся

$$C=c_rg^r+c_{r-1}g^{r-1}+\cdots+c_1g+c_0$$

преобразовать такъ, чтобы каждый коэффиціентъ при степени g былъ представленъ, какъ произведеніе дѣлителя A и нѣкотораго числа, меньшаго g. Пусть въ рядѣ чиселъ:

$$c_r,\ c_rg+c_{r-1},\ c_rg^2+c_{r-1}g+c_{r-2}\cdots$$

число

$$c_rg^\rho+c_{r-1}g^{\rho-1}+\cdots+c_{r-\rho+1}\cdot g+c_{r-\rho}\ ^{1)}$$

будетъ первымъ изъ чиселъ большихъ или равныхъ A. Такое число мы непремѣнно встрѣтимъ (хотя бы при $\rho=r$), такъ какъ, если дѣленіе вообще выполнимо, $C\geqq A$. Итакъ, пусть

$$c_rg^{\rho-1}+c_{r-1}g^{\rho-2}+\cdots+c_{r-\rho+2}g+c_{r-\rho+1}<A\leqq c_rg^\rho+$$
$$+c_{r-1}g^{\rho-1}+\cdots+c_{r-\rho+1}g+c_{r-\rho}.$$

Изъ

$$A\geqq c_rg^{\rho-1}+c_{r-1}g^{\rho-2}+\cdots+c_{r-\rho+2}g+c_{r-\rho+1}+1$$

[1]) Или короче: $c_r\,c_{r-1}\ldots c_{r-\rho+1}\,c_{r-\rho}$.

слѣдуетъ:

$$gA \geqq c_r g^\rho + c_{r-1} g^{\rho-1} + \cdots + c_{r-\rho+2} g^2 + c_{r-\rho+1} g + g,$$

а такъ какъ $c_{r-\rho} < g$:

$$\text{то } A \leqq c_r g^\rho + c_{r-1} g^{\rho-1} + \cdots + c_{r-\rho+1} g + c_{r-\rho} < gA.$$

Пробами, основывающимися на знаніи таблицы умноженія, необходимо установить, будетъ ли сумма, заключенная между знаками неравенства, кратной числа A, или же установить, между какими кратными A она заключена.

Пусть мы нашли, что

$$c_r g^\rho + c_{r-1} g^{\rho-1} + \cdots + c_{r-\rho+1} g + c_{r-\rho} = b_0 A + A_0,$$

гдѣ b_0 означаетъ одно изъ чиселъ $1, 2, 3 \ldots g-1$, и

$$0 \leqq A_0 < A.$$

Тогда C можетъ быть написано въ слѣдующей формѣ

$$C = (b_0 A + A_0) g^{r-\rho} + c_{r-\rho-1} \cdot g^{r-\rho-1} + \cdots + c_1 g + c_0 =$$
$$= b_0 A g^{r-\rho} + (g A_0 + c_{r-\rho-1})\, g^{r-\rho-1} + \cdots + c_1 g + c_0.$$

Изъ того, что

$$A_0 \leqq A - 1$$

слѣдуетъ:

$$gA_0 \leqq gA - g$$

или

$$gA_0 + c_{r-\rho-1} < gA.$$

Если теперь выраженіе:

$gA_0 + c_{r-\rho-1}$ опять представить въ видѣ

$$b_1 A + A_1, \text{ гдѣ } 0 \leqq b_1 < g;\ 0 \leqq A_1 < A,$$

то можно написать:

$$C = b_0 A g^{r-\rho} + b_1 A g^{r-\rho-1} + (gA_1 + c_{r-\rho-2}) g^{r-\rho-2} + \cdots + c_1 g + c_0.$$

Продолжая такимъ же образомъ дальше, получимъ окончательно:

$$C = b_0 A g^{r-\rho} + b_1 A g^{r-\rho-1} + b_2 A g^{r-\rho-2} + \cdots +$$
$$+ b_{r-\rho-1} A g + (g A_{r-\rho-1} + c_0),$$

гдѣ

$$1 \leqq b_0 < g,$$
$$0 \leqq b_\mu < g,$$

при $\mu = 1, 2, \ldots (r-\rho-1)$, и

$$0 \leqq g A_{r-\rho-1} + c_0 < gA.$$

Теперь приходится различать два случая:

1. $g \cdot A_{r-\rho-1} + c_0$, есть число кратное A или нуль, а, слѣдовательно, можетъ быть приведено къ виду: $b_{r-\rho}A$, гдѣ $b_{r-\rho}$ означаетъ одно изъ чиселъ 0, 1, 2...($g-1$).

   Въ этомъ случаѣ

$$C = A \cdot (b_0 g^{r-\rho} + b_1 g^{r-\rho-1} + \cdots + b_{r-\rho-1} g + b_{r-\rho}).$$

   Скобка даетъ выраженіе искомаго частнаго въ формѣ систематическаго числа $\overline{b_0 b_1 \ldots b_{r-\rho-1} b_{r-\rho}}$.

2. $gA_{r-\rho-1} + c_0$ не есть кратное числа A, но равно

$$b_{r-\rho} \cdot A + A_{r-\rho},$$

   гдѣ $b_{r-\rho}$ опять-таки есть одно изъ чиселъ 0, 1, 2... ($g-1$) и

$$0 < A_{r-\rho} < A.$$

   Тогда:

$$C = A \cdot (b_0 g^{r-\rho} + b_1 g^{r-\rho-1} + \cdots + b_{r-\rho-1} g + b_{r-\rho}) + A_{r-\rho}$$

   не есть кратное A. Дѣленіе „не выходитъ“ и мы получаемъ остатокъ $A_{r-\rho}$. Принято и въ этомъ случаѣ число $\overline{b_0 b_1 \cdots b_{r-\rho-1} \cdot b_{r-\rho}}$, являющееся наибольшимъ изъ чиселъ, указывающихъ сколько разъ A можетъ содержаться въ C, называть частнымъ отъ дѣленія $C : A$. Но терминъ „частное“ мы будемъ употреблять всегда въ томъ смыслѣ, какой ему данъ при опредѣленіи въ § 6 A, если только не будетъ опредѣленнымъ образомъ указано на иной способъ его пониманія.

Соединеніе вмѣстѣ всѣхъ приведенныхъ разсужденій, даетъ непосредственно обычный, извѣстный изъ элементовъ, пріемъ дѣленія [1]).

G. Возведеніе въ степень, извлеченіе корня и логариѳмированіе систематическихъ чиселъ.

Степень любого систематическаго числа можетъ быть вычислена повторнымъ умноженіемъ; особый пріемъ мы дадимъ только для второй и третьей степени (которыя иначе называются квадратомъ

[1]) Другой способъ дѣленія, при которомъ приходится оперировать не со всѣми цыфрами дѣлителя, а лишь съ частью ихъ, принадлежитъ Fourier (Analyse des équations déterminées, Paris 1831, стр. 187). Мы не останавливаемся здѣсь на способѣ Fourier, такъ какъ онъ слишкомъ сложенъ для того, чтобы примѣнять его при преподаваніи. Сравн. Lüroth: Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900, § 17 и пр.

и кубомъ), чтобы на основаніи полученныхъ такимъ образомъ формулъ найти методы и для рѣшенія обратныхъ задачъ.

Изъ § 5 C, (III) имѣемъ:

$$(\alpha_n+\alpha_{n-1})^2=\alpha_n{}^2+2\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}+\alpha_{n-1}^2.$$

При помощи этого равенства находимъ далѣе:

$$(\alpha_n+\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2})^2=(\alpha_n+\alpha_{n-1})^2+2(\alpha_n+\alpha_{n-1})\cdot\alpha_{n-2}+\alpha_{n-2}^2=$$
$$=\alpha_n{}^2+2\alpha_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-1}^2+2(\alpha_n+\alpha_{n-1})\cdot\alpha_{n-2}+\alpha_{n-2}^2.$$

Продолжая далѣе подобнымъ образомъ, окончательно получаемъ:

$$\begin{aligned}(\alpha_n+\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}+\cdots+\alpha_1+\alpha_0)^2=\alpha_n{}^2&+2\alpha_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-1}^2+\\&+2(\alpha_n+\alpha_{n-1})\alpha_{n-2}+\alpha_{n-2}^2+\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\&+2(\alpha_n+\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2)\alpha_1+\alpha_1{}^2+\\&+2(\alpha_n+\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2+\alpha_1)\alpha_0+\alpha_0{}^2.\end{aligned}$$

Положимъ теперь

$$\alpha_\nu=a_\nu\cdot g^\nu \text{ (при } \nu=n,\ n-1,\cdots 1,\ 0),$$

гдѣ g есть основаніе нашей системы счисленія, а каждое a_ν означаетъ одно изъ чиселъ 0, 1, 2, $\cdots(g-1)$, тогда послѣднее равенство приметъ видъ:

$$\begin{aligned}(a_ng^n+a_{n-1}g^{n-1}+a_{n-2}g^{n-2}+\cdots+a_1g+a_0)^2=a_n{}^2g^{2n}&+\\+2a_na_{n-1}g^{2n-1}+a_{n-1}^2g^{2n-2}&+\\+2(a_ng+a_{n-1})a_{n-2}g^{2n-3}+a_{n-2}^2g^{2n-4}&+\\+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&+\\+2(a_ng^{n-1}+a_{n-1}g^{n-2}+\cdots+a_2g+a_1)a_0g+a_0{}^2&,\end{aligned}$$

или короче:

$$\begin{aligned}\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}^2=a_n{}^2g^{2n}+2a_na_{n-1}g^{2n-1}&+a_{n-1}^2\cdot g^{2n-2}+\\+2\overline{a_na_{n-1}}\cdot a_{n-2}g^{2n-3}&+a_{n-2}^2g^{2n-4}+\\+\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\+2\cdot\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}\cdot a_0g&+a_0{}^2.\end{aligned}$$

Такимъ образомъ вторая степень систематическаго числа

$$A=\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$$

представляется въ видѣ суммы, расположенной по нисходящимъ степенямъ основного числа g. Чтобы написать полученную сумму въ видѣ систематическаго числа, слѣдуетъ примѣнить здѣсь преобразованіе коэффиціентовъ, указанное при умноженіи, послѣ чего получимъ:

$$A^2 = c_{2n+1}g^{2n+1} + c_{2n}g^{2n} + c_{2n-1}g^{2n-1} + c_{2n-2}g^{2n-2} + \cdots + c_1 g + c_0.$$

Правая часть начинается или съ $2n$-ой степени g или съ $2n+1$-ой, иными словами c_{2n+1} или равно нулю или имѣетъ одно изъ значеній $1, 2 \ldots (g-1)$; но во всякомъ случаѣ не встрѣтится члена степени высшей, такъ какъ

$$A < g^{n+1}$$
$$A^2 < g^{2n+2}.$$

Перейдемъ теперь къ обратной задачѣ. Пусть намъ дано нѣкоторое число C и требуется найти такое число A, если оно вообще существуетъ, квадратъ котораго $= C$, т.-е. извлечь второй корень, или иначе, квадратный корень изъ числа C.

Изъ предыдущаго ясно, что если

$$C = c_{2n+1}g^{2n+1} + c_{2n}g^{2n} + c_{2n-1}g^{2n-1} + c_{2n-2}g^{2n-2} + \cdots + c_1 g + c_0,$$

будучи изображено въ видѣ систематическаго числа, начинается съ $2n+1$-ой или $2n$-ой степени основанія, то искомое число a необходимо должно начинаться съ n-ой степени числа g; а слѣдовательно, оно должно имѣть видъ:

$$A = a_n g^n + a_{n-1}g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0;$$

гдѣ

$$1 \leqq a_n \leqq g-1;\ 0 \leqq a_\nu \leqq g-1, \text{ при } \nu = 0, 1, 2, \ldots (n-1).$$

Наша задача состоитъ въ томъ, чтобы, зная коэффиціенты c, вычислить коэффиціенты a.

Образованіе коэффиціентовъ c при возведеніи систематическаго числа въ квадратъ показываетъ, что

$$\text{(I)} \qquad c_{2n+1}g^{2n+1} + c_{2n}g^{2n} \geqq a_n^2 g^{2n},$$

$$\text{(II)} \qquad c_{2n+1}g^{2n+1} + c_{2n}g^{2n} + c_{2n-1}g^{2n-1} + c_{2n-2}g^{2n-2} \geqq$$
$$\geqq a_n^2 g^{2n} + 2a_n a_{n-1} g^{2n-1} + a_{n-1}^2 g^{2n-2} \text{ и т. д.}$$

Найдемъ теперь наибольшее число g_n, квадратъ котораго меньше или равенъ $c_{2n+1}c_{2n}$, такъ что

$$g_n^2 \leqq c_{2n+1} \cdot g + c_{2n} < (g_n + 1)^2.$$

Первое опредѣляемое число a_n не можетъ быть больше g_n, такъ какъ если бы $a_n \geqq g_n + 1$, то

$$a_n^2 g^{2n} > c_{2n+1}g^{2n+1} + c_{2n}g^{2n},$$

что противорѣчитъ соотношенію (I). a_n не можетъ быть и меньше, чѣмъ g_n, такъ какъ изъ

$$g_n{}^2 g^{2n} \leqq c_{2n+1} g^{2n+1} + c_{2n} g^{2n} + \cdots + c_1 g + c_0,$$

по § 7 C I, слѣдуетъ:

$$g_n g^n \leqq a_n g^n + a_n g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0,$$

т.-е. соотношеніе, возможное только при $a_n \geqq g_n$, слѣдовательно, $a_n = g_n$. Первая цыфра a_n искомого корня изъ A опредѣляется этимъ, какъ наибольшее число, квадратъ котораго заключается въ $\overline{c_{2n+1} \cdot c_{2n}}$. Образуемъ теперь разность:

$$(c_{2n+1} \cdot g + c_{2n}) - a_n{}^2 = d_n$$

и ищемъ наибольшее число g_{n-1} для котораго

$$2a_n g_{n-1} g + g_{n-1}^2 \leqq d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}.$$

При такомъ опредѣленіи g_{n-1} нельзя обойтись безъ пробъ. Этому соотношенію прежде всего стараются удовлетворить такимъ числомъ, которое получится, если $d_n g + c_{2n-1}$ раздѣлить на $2a_n$, при чемъ полученное частное часто приходится уменьшать на одну или нѣсколько единицъ [1]).

Такъ же, какъ и раньше, можно убѣдиться въ томъ, что должно существовать равенство $a_{n-1} = g_{n-1}$; если же предположить, что $a_{n-1} \geqq g_{n-1} + 1$, то отсюда будетъ слѣдовать:

$$2a_n a_{n-1} g + a_{n-1}^2 > d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}$$

или

$$2a_n a_{n-1} g^{2n-1} + a_{n-1}^2 g^{2n-2} > (c_{2n+1} g + c_{2n} - a_n{}^2) g^{2n} + c_{2n-1} g^{2n-1} + \\ + c_{2n-2} g^{2n-2},$$

т.-е. неравенство, противорѣчащее соотношенію II на стр. 52.

---

[1]) Легко видѣть, что число, бо́льшее частнаго, полученнаго такимъ путемъ. несомнѣнно можетъ удовлетворять послѣднему неравенству. Darboux (Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2. Série, 11 томъ, 1 часть, стр. 176 и др.; сравни также Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900, S. 143) указалъ на то, что если $d_n g + c_{2n-1}$ раздѣлить не на $2a_n$, а на $2a_n + 1$ и обозначить частное черезъ q, то всегда $2a_n q g + q^2 < d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}$, но, по крайней мѣрѣ, при $g = 10$, $2a_n(q+2) g + (q+2)^2 > d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}$. Искомое число g_{n-1} можетъ, слѣдовательно, имѣть лишь одно изъ двухъ значеній q или $q+1$, въ зависимости отъ того, будетъ ли $2a_n(q+1)g + (q+1)^2$ больше или меньше $d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}$. Доказать это очень легко.

Но такъ какъ, съ другой стороны,

$$c_{2n+1}g^{2n+1} + c_{2n}g^{2n} + c_{2n-1}g^{2n-1} + \cdots + c_1 g + c_0 \geqq \geqq a_n{}^2 g^{2n} + 2a_n g_{n-1} g^{2n-1} + g_{n-1}^2 g^{2n-2},$$

то

$$a_n g_n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0 \geqq a_n g^n + g_{n-1} g^{n-1},$$

откуда вытекаетъ, что a_{n-1} не можетъ быть меньше g_{n-1}. Опредѣливъ такимъ образомъ a_{n-1}, полагаемъ

$$(d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}) - (2a_n a_{n-1} g + a_{n-1}^2) = d_{n-1},$$

и выбираемъ въ качествѣ значенія a_{n-2} наибольшее число, для котораго

$$2(a_n g + a_{n-1}) \cdot a_{n-2} \cdot g + a_{n-2}^2 \leqq d_{n-1} g^2 + c_{2n-3} g + c_{2n-4},$$

и продолжаемъ такимъ же образомъ дальше.

Когда будутъ найдены цыфры a_n, $a_{n-1}, \cdots a_\nu$, то $a_{\nu-1}$ получается, какъ наибольшее число, для котораго:

$$2 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_\nu} \cdot a_{\nu-1} \cdot g + a_{\nu-1}^2 \leqq d_\nu g^2 + c_{2\nu-1} \cdot g + c_{2\nu-2},$$

гдѣ d_ν можетъ быть вычислено посредствомъ „рекурсіонныхъ формулъ“ [1]).

$$d_\nu = d_{\nu+1} g^2 + c_{2\nu+1} g + c_{2\nu} - (2\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_{\nu+1}} \cdot a_\nu g + a_\nu{}^2)$$

Наконецъ a_0 представляетъ то число, для котораго:

$$2 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1} \cdot a_0 g + a_0{}^2 = d_1 g^2 + c_1 g + c_0.$$

Если не существуетъ числа a_0, удовлетворяющаго этому равенству, то это значитъ, что не существуетъ такого числа A, квадратъ котораго есть C. Если въ этомъ случаѣ за a_0 примемъ наибольшее значеніе, при которомъ лѣвая часть меньше правой, то соотвѣтствующее систематическое число A представляетъ изъ себя наибольшее число, квадратъ котораго все еще меньше C, и разность между правой и лѣвой частями равна разности $C - A^2$.

Только что изложенный способъ вычисленія пояснимъ на числовомъ примѣрѣ. Чтобы оказаться внѣ зависимости отъ привычки, выберемъ за основаніе системы не 10, а напримѣръ 12. Если мы желаемъ производить вычисленія по 12-ричной системѣ,

---

[1]) Подъ рекурсіонной формулой понимаютъ формулу, дающую возможность вычислить каждый членъ какого-либо ряда величинъ (въ данномъ случаѣ числа d_n, $d_{n-1}, \ldots d_\nu, \ldots d_1$) по предыдущему или нѣсколькимъ предыдущимъ.

то намъ съ одной стороны нужны особые знаки для чиселъ 10 и 11, для чего и возьмемъ ζ и ε; съ другой стороны, для суммы и для произведенія каждыхъ двухъ чиселъ ряда 1, 2, ⋯, ζ, ε необходимо составить таблицы, по которымъ всѣ вычисленія надъ знаками чиселъ можно выполнять чисто-механически, не думая каждый разъ о значеніи этихъ знаковъ. Итакъ, пусть дана задача извлечь квадратный корень изъ слѣдующаго числа, написаннаго по двѣнадцатиричной системѣ:

$$C =^{(XII)} 13112\varepsilon 01.$$

Такъ какъ число восьмизначное, то $2n+1=7$, а, слѣдовательно, $n=3$.

Если вообще существуетъ число A, квадратъ котораго равенъ C, то оно должно быть четырехзначнымъ, т.-е. имѣть слѣдующую форму,

$$A = \overline{a_3a_2a_1a_0} = a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \,[1].$$

a_3 есть наибольшее число, квадратъ котораго меньше, чѣмъ 13, слѣдовательно, $a_3=3$.

$$d_3 = 13 - 3^2 = 6;$$

a_2 наибольшее число, для котораго $2\cdot 3\cdot a_2\cdot 10 + a_2{}^2 \leqq 611$ $2\cdot 3 = 6$, хотя и содержится въ 61 10 разъ, но даже для $a_2=\varepsilon$ лѣвая часть имѣетъ значеніе:

$$6\cdot\varepsilon\cdot 10 + \varepsilon^2 = 560 + \zeta 1 = 641,$$

а, слѣдовательно, больше 611.

Для $a_2=\zeta$ мы напротивъ получаемъ:

$$6a_2\cdot 10 + a_2{}^2 = 500 + 84 = 584 \leqq 611;$$

слѣдовательно, $a_2=\zeta$. Теперь

$$d_2 = 611 - 584 = 49,$$

и a_1 есть наибольшее число, для котораго:

$$2\cdot\overline{3\zeta}\cdot a_1\cdot 10 + a_1{}^2 \leqq 492\varepsilon$$

или

$$78\cdot a_1\cdot 10 + a_1{}^2 \leqq 492\varepsilon.$$

78 содержится въ 492, 7 разъ, и при $a_1=7$ получаемъ:

$$78\cdot a_1\cdot 10 + a_1{}^2 = 4580 + 41 = 4601,$$

[1] Здѣсь 10, конечно, является символомъ числа 12.

слѣдовательно, и на самомъ дѣлѣ $a_1 = 7$.

$$d_1 = 492\varepsilon - 4601 = 32\zeta.$$

a_0 теперь остается опредѣлить такъ, чтобы

$$2 \cdot 3\zeta 7 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0{}^2 = 32\zeta 01$$

или

$$792 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0{}^2 = 32\zeta 01.$$

Это равенство удовлетворяется при $a_0 = 5$, слѣдовательно:

$$\sqrt{13112\varepsilon 01} = 3\zeta 75.$$

Дальнѣйшія упрощенія письменнаго вычисленія при нѣкоторомъ навыкѣ являются сами собой [1]).

Методы возведенія систематическаго числа въ третью степень и извлеченія корня третьей степени изъ этихъ чиселъ мы во избѣжаніе повтореній изложимъ возможно кратко. При помощи формулы, вытекающей изъ § 5, C, III:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

мы получаемъ:

$$\begin{aligned}
&(a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + a_{n-2} g^{n-2} + \cdots + a_1 g + a_0)^3 = \\
&= a_n{}^3 \cdot g^{3n} + 3a_n{}^2 a_{n-1} g^{3n-1} + 3a_n a_{n-1}^2 g^{3n-2} + a_{n-1}^3 g^{3n-3} + \\
&+ 3 \cdot (a_n g + a_{n-1})^2 \cdot a_{n-2} g^{3n-4} + 3 \cdot (a_n g + a_{n-1}) a_{n-2}^2 \cdot g^{3n-5} + a_{n-2}^3 g^{3n-6} + \\
&+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \\
&+ 3(a_n g^{n-1} + \cdots + a_2 g + a_1)^2 \cdot a_0 g^2 + 3(a_n g^{n-1} + \cdots + a_2 g + a_1) a_0{}^2 g + a_0{}^3 = \\
&= c_{3n+2} g^{3n+2} + c_{3n+1} g^{3n+1} + c_{3n} g^{3n} + \cdots + c_2 g^2 + c_1 g + c_0,
\end{aligned}$$

гдѣ каждый изъ коэффиціентовъ c имѣетъ одно изъ значеній $0, 1, 2, \ldots (g-1)$.

Обратно, для извлеченія кубичнаго корня изъ послѣдняго числа слѣдуетъ принять за a_n наибольшее число, для котораго:

$$a_n{}^3 \leqq c_{3n+2} g^2 + c_{3n+1} g + c_{3n},$$

положить

$$d_n = (c_{3n+2} g^2 + c_{3n+1} g + c_{3n}) - a_n{}^3$$

---

[1]) Такъ же, какъ и для дѣленія (ср. стр. 50, пр. 1). Фурье далъ для извлеченія квадратнаго корня особый пріемъ вычисленія, на которомъ мы подробно не будемъ останавливаться, такъ какъ для его пониманія требуется болѣе свѣдѣній, чѣмъ тѣ, которыми можетъ обладать читатель въ настоящее время. Ср. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900, § 59 и д.

и найти для a_{n-1} наибольшее числовое значеніе, удовлетворяющее соотношенію:

$$3a_n^2 \cdot a_{n-1} \cdot g^2 + 3a_n \cdot a_{n-1}^2 \cdot g + a_{n-1}^3 \leqq d_n g^3 + c_{3n-1} g^2 + c_{3n-2} g + c_{3n-3},$$

положить разность между правой и лѣвой частью неравенства равной d_{n-1} и опредѣлить a_{n-2}, какъ наибольшее число, для котораго

$$3 \cdot \overline{a_n a_{n-1}}^2 \cdot a_{n-2} g^2 + 3 \cdot \overline{a_n a_{n-1}} \cdot a_{n-2}^2 g + a_{n-2}^3 \leqq$$
$$\leqq d_{n-1} g + c_{3n-4} g^2 + c_{3n-5} g + c_{3n-6} \text{ и т. д.}$$

Обоснованіе указаннаго пріема тоже самое, какъ и при извлеченіе квадратнаго корня. Точно такъ же можно безъ принципіальныхъ затрудненій установить аналогичные пріемы и для извлеченія корней съ другими показателями кромѣ 2-хъ и 3-хъ. Но съ увеличеніемъ показателя, вычисленія становятся столь затруднительными, что на практикѣ предпочитаютъ другой способъ, съ которымъ мы ознакомимся позднѣе [1]).

Чтобы найти логариѳмъ n систематическаго числа p при основаніи a, данномъ также въ систематической формѣ, у насъ пока нѣтъ другой возможности, какъ вычислять повторнымъ умноженіемъ слѣдующія другъ за другомъ степени буквы a и смотрѣть, не будетъ ли $a^n = p$ для какого-либо показателя n, и именно для какого.

H. Переходъ отъ одной системы счисленія къ системѣ съ другимъ основаніемъ.

Если число

$$b_m h^m + b_{m-1} h^{m-1} + \cdots + b_1 h + b_0,$$

данное по системѣ (h), изобразить по системѣ (g), то необходимо лишь изобразить по этой системѣ основаніе h и коэффиціенты b_m, $b_{m-1}, \ldots b_1$, b_0 и потомъ выполнить рядъ возведеній въ степень, умноженій и сложеній [2]). Если, напримѣръ, требуется число

---

[1]) Гл. V § 5 E.

[2]) Соотношенія между изображеніями одного и того же числа (главнымъ образомъ, правильныхъ дробей) по двумъ различнымъ системамъ разсматриваетъ J. Kraus въ Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 37 (1892) стр. 321 и Bd. 39 (1894) стр. 11.

4963, данное по десятичной системѣ, перевести на двѣнадцатиричную систему, то:

$$4963 = 4\zeta^3 + 9 \cdot \zeta^2 + 6\zeta + 3.$$

Такъ какъ

$$\zeta^2 = 84; \ \zeta^3 = 84 \cdot \zeta = 6\varepsilon 4,$$

то получаемъ

$$(X)\ 4963 = (XII)\ 2394 + 630 + 50 + 3 = \\ = (XII)\ 2\zeta 57.$$

Въ дальнѣйшемъ, если не будемъ дѣлать особыхъ указаній, за основаніе системы счисленія будемъ принимать число 10.

§ 11. Основныя предложенія о дѣлимости чиселъ [1]).

A. Общій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ.

Уже въ § 6 A сказано, что если между тремя числами a, t, и m существуетъ равенство

$$a = t \cdot m,$$

то a называется кратнымъ t, а t дѣлителемъ a.

Если $a = 0$, $m = 0$, то это равенство справедливо при любомъ t; каждое число можетъ быть разсматриваемо поэтому, какъ дѣлитель нуля. Съ другой стороны если $t = 0$, то и a должно быть равно нулю, т.-е. никакое, отличное отъ нуля число не можетъ имѣть дѣлителемъ 0. Непосредственно изъ ассоціативнаго закона умноженія (§ 5, B, II) вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

I. Если τ есть дѣлитель t, а t въ свою очередь дѣлитель числа a, то и τ есть дѣлитель a.

На основаніи закона дистрибутивности при умноженіи (§ 5, C, I, II, IV) вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

II. Если t является общимъ дѣлителемъ чиселъ a и b, т.-е. какъ дѣлителемъ числа a, такъ и числа b, то t является дѣлителемъ и для $a+b$ и для $a-b$.

---

[1]) Въ существенныхъ чертахъ эти теоремы уже встрѣчаются въ знаменитыхъ «Элементахъ» Евклида, учившаго въ Александріи около 310 г. до Р. Х. Здѣсь мы въ существенныхъ чертахъ ведемъ изложеніе по «Vorlesungen über Zahlentheorie» Lejeune Dirichlet, въ изданіи R. Dedekind'a, и останавливаемся на этой темѣ лишь постольку, поскольку это намъ необходимо для слѣдующей главы.

Это предложеніе имѣетъ мѣсто и для суммы произвольнаго числа слагаемыхъ.

Любыя два числа a и b всегда имѣютъ одинъ общій дѣлитель, а именно 1.

Если они не имѣютъ другого общаго дѣлителя кромѣ 1, то про нихъ говорятъ, не принимая во вниманіе этого столь очевиднаго дѣлителя, что они общаго дѣлителя не имѣютъ, и называютъ или первыми между собой, или взаимно простыми. Такъ какъ общій дѣлитель чиселъ a и b не можетъ быть больше меньшаго изъ нихъ, то одинъ изъ ихъ общихъ дѣлителей долженъ быть наибольшимъ. Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ является въ высшей степени важной задачей, которую рѣшилъ уже Евклидъ („Элементы, книга VII, *Nr* 2, изданіе Heiberg, томъ II, стр. 191). Если $a=b$, то конечно общее значеніе обоихъ чиселъ одновременно является и ихъ наибольшимъ общимъ дѣлителемъ. Если же a обозначаетъ большее изъ двухъ чиселъ, то дѣлимъ a на b. Дѣленіе выполняется либо нацѣло, либо съ остаткомъ[1]). Въ первомъ случаѣ b является общимъ наибольшимъ дѣлителемъ, во второмъ случаѣ, если обозначить частное черезъ m, а остатокъ черезъ b_1, то получится равенство:

$$a=bm+b_1, \text{ гдѣ } b_1<b.$$

Дѣленіемъ b на b_1 получится слѣдующее равенство

$$b=b_1m_1+b_2, \text{ гдѣ } b_2<b_1.$$

Этотъ процессъ дѣленія продолжаемъ до тѣхъ поръ, пока дѣленіе не окончится, т.-е. пока въ остаткѣ не получится нуля, что необходимо должно имѣть мѣсто, такъ какъ каждый слѣдующій остатокъ меньше предыдущаго.

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую цѣпь равенствъ:

$$\text{III.}\qquad \begin{aligned} a&=bm+b_1,\\ b&=b_1m_1+b_2,\\ b_1&=b_2m_2+b_3,\\ &\ldots\ldots\\ b_{\nu-2}&=b_{\nu-1}\cdot m_{\nu-1}+b_\nu,\\ b_{\nu-1}&=b_\nu\cdot m_\nu. \end{aligned}$$

1) Ср. § 10 F. стр. 48—50.

Послѣднее равенство показываетъ, что b_ν есть дѣлитель $b_{\nu-1}$; изъ предпослѣдняго равенства на основаніи предложеній I и II этого § слѣдуетъ, что b_ν есть также дѣлитель и $b_{\nu-2}$ и т. д.; изъ второго равенства слѣдуетъ, что b_ν есть дѣлитель b и наконецъ изъ перваго, что b_ν есть дѣтитель a, а, слѣдовательно, есть общій дѣлитель чиселъ a и b. Съ другой стороны изъ перваго равенства этой цѣпи слѣдуетъ, что каждый общій дѣлитель чиселъ a и b есть дѣлитель b_1; изъ второго, — каждый общій дѣлитель b и b_1, является дѣлителемъ общимъ и b_2 и т. п.; наконецъ, изъ предпослѣдняго, что каждый общій дѣлитель $b_{\nu-2}$ и $b_{\nu-1}$ является дѣлителемъ b_ν. Поэтому каждый общій дѣлитель чиселъ a и b является также и дѣлителемъ b_ν. Изъ этихъ двухъ выводовъ, а именно изъ того, что, во-первыхъ, число b_ν есть общій дѣлитель чиселъ a и b, и, во-вторыхъ, что оно есть кратное каждаго общаго дѣлителя a и b, слѣдуетъ далѣе, что b_ν должно быть **общимъ наибольшимъ дѣлителемъ** a и b. Каждый общій дѣлитель двухъ чиселъ есть дѣлитель общаго наибольшаго дѣлителя этихъ чиселъ.

Тогда и только тогда, когда $b_\nu = 1$, числа a и b являются взаимно простыми. Для такихъ двухъ взаимно простыхъ (первыхъ между собой) чиселъ a и b имѣетъ мѣсто слѣдующая важная теорема.

IV. *Если a и b числа взаимно-простыя и k есть произвольное число, то каждый общій дѣлитель чиселъ $a \cdot k$ и b является общимъ дѣлителемъ k и b.*

Для доказательства представимъ себѣ цѣпь равенствъ III, написанную для случая $b_\nu = 1$ и каждое равенство умножимъ почленно на k:

$$a \cdot k = bmk + b_1 k,$$
$$bk = b_1 m_1 k + b_2 k,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{\nu-2} k = b_{\nu-1} m_{\nu-1} k + k.$$

Изъ этой цѣпи, при помощи тѣхъ же разсужденій, которыя мы примѣнили для цѣпи III, непосредственно вытекаетъ теорема, которую и слѣдовало доказать.

Необходимо выдѣлить два частныхъ случая въ виду ихъ особой важности.

IVa. *Если a и b суть два взаимно простыхъ числа и при этомъ $a \cdot k$ дѣлится на b, то k должно дѣлиться на b.*

IVb. Если и a и k являются взаимно простыми съ b, то ak должно быть тоже числомъ взаимно-простымъ съ b.

Повторное примѣненіе этой теоремы приводитъ къ слѣдующему обобщенію:

Если каждое изъ чиселъ $a, k, l, m, \cdots$ является взаимно простымъ съ b, то и ихъ произведеніе $a \cdot k \cdot l \cdot m \cdots$ есть также число взаимно простое съ b,

и къ такому слѣдствію:

Если каждое изъ чиселъ $a, k, l, m, \cdots$ является взаимно простымъ съ каждымъ изъ чиселъ $b, k', l', m', \cdots$ то и произведеніе $a \cdot k \cdot l \cdot m \cdots$ есть число взаимно простое съ произведеніемъ $b \cdot k' \cdot l' \cdot m' \cdots$

Всѣмъ этимъ мы будемъ пользоваться позднѣе, а, главнымъ образомъ, слѣдующимъ частнымъ случаемъ приведеннаго слѣдствія:

Если a и b числа, взаимно простыя, то и каждая степень a есть число взаимно простое съ любой степенью b.

B. Общее кратное нѣсколькихъ чиселъ.

Въ слѣдующей главѣ намъ придется для двухъ данныхъ чиселъ находить общія кратныя, т.-е. такія числа, которыя дѣлятся, какъ на a, такъ и на b; поэтому мы здѣсь и займемся рѣшеніемъ указанной задачи.

Если T есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b, т.-е. $a = a'T$, и $b = b'T$, при чемъ a' и b' должны быть числами взаимно простыми, то общее кратное чиселъ a и b должно быть прежде всего кратнымъ числа a и имѣть видъ $m \cdot a = m \cdot a'T$, гдѣ m есть какое-либо число. Для того, чтобы $ma'T$ было кратнымъ числа $b = b'T$, ma' должно дѣлиться на b', а такъ-какъ a' и b' числа взаимно простыя, то m должно дѣлиться на b' и поэтому имѣть видъ $\mu \cdot b'$. Каждое общее кратное чиселъ a и b равно произведенію $a'b'T$ на какое-либо число μ. Отсюда ясно, что и обратно, всякое произведеніе вида $\mu \cdot a'b'T$ есть кратное чиселъ a и b. Наименьшее изъ всѣхъ чиселъ $\mu a'b'T$, а, слѣдовательно, наименьшее общее кратное чиселъ a и b есть $a' \cdot b' \cdot T = a \cdot b : T$, а всѣ остальныя общія кратныя будутъ числами кратными этого общаго наименьшаго кратнаго.

Если требуется найти общее наименьшее кратное болѣе чѣмъ двухъ чиселъ, $a, a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$, то находимъ сперва общее наименьшее кратное m_1 чиселъ a и a_1, затѣмъ общее наименьшее кратное m_2 чиселъ m_1 и a_2 и т. д. и наконецъ, общее наименьшее кратное m_n чиселъ m_{n-1} и a_n. Тѣми-же пріемами, какъ и въ случаѣ двухъ чиселъ, можно показать, что m_n есть наименьшее изъ чиселъ дѣлящихся одновременно на a, на $a_1, \cdots$ на a_n, и всѣ остальныя числа, обладающія тѣмъ же свойствомъ, должны быть кратными m_n.

Если же числа a, a_1, $a_2, \cdots a_n$ окажутся попарно числами взаимно простыми, то ихъ наименьшее кратное равно произведенію $a \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$.

C. Представленіе любого числа въ видѣ произведенія простыхъ чиселъ.

Такъ какъ для каждаго числа имѣетъ мѣсто равенство: $a = a \cdot 1$, то каждое число дѣлится на 1 и на само себя. Число, имѣющее лишь эти два дѣлителя [1]), называется простымъ (первоначальнымъ).

Всякое число a, имѣющее, кромѣ a и 1, еще какой-либо другой дѣлитель, можетъ быть представлено, и при этомъ лишь единственнымъ образомъ, въ видѣ произведенія простыхъ чиселъ; поэтому его и называютъ составнымъ числомъ.

Доказательство. Если t есть дѣлитель числа a, отличный отъ a и единицы, то t либо число простое, либо имѣетъ дѣлитель t', отличный отъ t и 1. Если это число t' не будетъ числомъ простымъ, то оно имѣетъ дѣлитель t'', отличный отъ t' и 1 и т. д. Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы неизбѣжно дойдемъ до дѣлителя p, который будетъ уже простымъ числомъ, сдѣлавъ при этомъ менѣе, чѣмъ a пробъ, такъ какъ $a > t > t' > t'' > \cdots > 1$. По § 11 A,I, p будетъ дѣлителемъ и числа a, слѣдовательно, $a = p \cdot a'$; гдѣ или a' есть число простое или, согласно вышеприведенному разсужденію, дѣлится на простое число p', т.-е. $a' = p'a''$, слѣдовательно, $a = p \cdot p'a''$. Разсуждая такимъ же образомъ дальше, получимъ для числа a рядъ выраженій въ видѣ произведенія

$$a = p \cdot a' = p \cdot p' \cdot a'' = p \cdot p' \cdot p'' \cdot a''' = \cdots,$$

[1]) Единица дѣлится только на единицу. Слѣдовательно, здѣсь снова обнаруживается особый характеръ единицы (ср. стр. 2, сносъ 2). Остается открытымъ вопросъ, считать ли единицу простымъ числомъ; для удобства изложенія оказывается болѣе цѣлесообразнымъ не относить единицу къ простымъ числамъ.

въ каждомъ изъ которыхъ всѣ множители, кромѣ послѣдняго, несомнѣнно числа простыя; этотъ рядъ можно продолжать дальше до тѣхъ поръ, пока послѣдній множитель a', a'' и т. д. не окажется числомъ простымъ. Но такъ-какъ $a' > a'' > a''' > \cdots > 1$, то число этихъ послѣднихъ множителей меньше, чѣмъ a'; слѣдовательно, менѣе чѣмъ послѣ a' такихъ преобразованій, мы получимъ произведеніе, состоящее только изъ простыхъ сомножителей. Если предположить, что одно и то же число a можно представить въ видѣ двухъ различныхъ произведеній простыхъ чиселъ:

$$a = p \cdot p' \cdot p'' \cdots \quad \text{и} \quad a = q \cdot q' \cdot q'' \cdots$$

то изъ равенства

$$p \cdot p' \cdot p'' \cdots = q \cdot q' \cdot q'' \cdots$$

слѣдовало бы, что произведеніе, стоящее въ лѣвой части, дѣлится на q; слѣдовательно, не всѣ числа p, p', p'' и т. д. будутъ взаимно-простыми съ q (по § 11 A, IV B). Если же два простыхъ числа имѣютъ, кромѣ единицы, еще общій дѣлитель, то они совпадаютъ. Одинъ изъ множителей лѣвой части долженъ, слѣдовательно, равняться q. Если отбросить въ правой и лѣвой частяхъ равенства одинаковые множители и примѣнить такое же разсужденіе къ оставшемуся равенству, то можно убѣдиться, что какой-нибудь другой множитель въ лѣвой части долженъ равняться q'. Продолжая подобныя разсужденія, найдемъ, что каждый множитель правой части встрѣчается и въ лѣвой, а слѣдовательно, лѣвая часть во всякомъ случаѣ равна произведенію $q \cdot q' \cdot q'' \cdots$, умноженному на какое-либо число r. Но такъ какъ равенство:

$$(q \cdot q' \cdot q'' \cdots) \cdot r = q \cdot q' \cdot q'' \cdots$$

справедливо лишь при $r = 1$, то, если не принимать во вниманіе очевиднаго множителя 1, ясно, что совокупность простыхъ чиселъ p, p', p'', $\cdots$ тождественна съ совокупностью простыхъ чиселъ q, q', q'', $\cdots$; согласно этому любое число a можетъ быть представлено лишь **единственнымъ** образомъ, въ видѣ произведенія простыхъ сомножителей. При этомъ одно и то же простое число можетъ входить въ качествѣ множителя нѣсколько разъ. Если теперь произведеніе одинаковыхъ простыхъ чиселъ писать въ видѣ степени, то каждое составное число можетъ быть представлено въ видѣ:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

гдѣ $p_1, p_2, \cdots p_n$ простыя числа, отличныя другъ отъ друга, а $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ какія-либо числа.

На практикѣ, при разложеніи очень большого числа a на его простые сомножители, представляетъ вообще довольно большія затрудненія рѣшеніе вопроса, не будетъ ли такое число само простымъ. До Эйлера для рѣшенія, является ли данное число простымъ или нѣтъ, не было другого пріема, какъ дѣленіе этого числа на другое простое, квадратъ котораго $\leqq a$; въ самомъ дѣлѣ, если $a = r \cdot s$, то не можетъ быть одновременно и $r^2 > a$, и $s^2 > a$. Мы не можемъ останавливаться здѣсь на сравнительно новыхъ методахъ, сокращающихъ такое изслѣдованіе, такъ какъ они требуютъ болѣе глубокихъ познаній изъ теоріи чиселъ [1]). Теперь составлены таблицы [2]), которыя даютъ наименьшіе простые дѣлители для всѣхъ чиселъ, не превышающихъ извѣстнаго предѣла. Уже Евклиду (Элементы, кн. IX, No. XX) былъ извѣстенъ тотъ фактъ, что какъ бы далеко ни продолжать рядъ натуральныхъ чиселъ, мы никогда не встрѣтимъ послѣдняго простого числа, т.-е. такого простого числа, за которымъ уже нѣтъ простыхъ чиселъ. Пусть p какое-нибудь простое число; составимъ произведеніе $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p$ всѣхъ простыхъ чиселъ $\leqq p$, и къ полученному произведенію прибавимъ 1. Составленное такимъ образомъ число даетъ при дѣленіи на одно изъ простыхъ чиселъ $2, 3, 5, \cdots p$ остатокъ 1, т.-е. не дѣлится ни на одно изъ нихъ. Теперь являются мыслимыми лишь двѣ возможности: или это число само является простымъ, или оно дѣлится на какое-либо простое число, отличное отъ чиселъ $2, 3, 5, \cdots p$ [3]). Слѣдовательно, во всякомъ случаѣ, какъ бы велико ни было p, имѣется еще простое число, большее p. Изъ возможности разложить данное число на простые множители только однимъ способомъ слѣдуетъ, что никакой дѣлитель числа a не можетъ имѣть иныхъ простыхъ множителей, кромѣ входящихъ въ составъ a, и въ степе-

---

[1]) Enzyklopädie der Mathemat. Wissensch., I, Bd., 2 Teil., стр. 576.

[2]) L. Chermac, Cribrum arithmeticum, Deventer 1811 (до 1 020 000); J. Chr. Burckhardt, Tables des diviseurs jusqu'à 3 036 000, Paris 1814—1817; Z. Dase, Faktorentafeln (7te bis 9te Million), Hamburg, 1860, 63, 65; I. Glaisher, Factortables for the 4., 5., 6. Million, London 1879, 80, 83.

[3]) Первый случай имѣетъ мѣсто при $p = 2, 3, 5, 7, 11$,—второй при $p = 13$.

$$(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509)$$

Ср. Legendre, Théorie des nombres, нѣм. перев. Maser'a, Leipzig, 1886, Bd. I, стр. 15.

няхъ, не превышающихъ тѣхъ степеней, какія встрѣчаются въ разложеніи числа a. Каждый дѣлитель числа a имѣетъ такимъ образомъ слѣдующій видъ:

$$p_1^{k_1}\cdot p^{k_2}\cdots p_n^{k_n},\ \text{гдѣ}\ 0\leqq k_\nu\leqq\alpha_\nu\quad(\nu=1,\ 2,\cdots n),$$

и число всѣхъ дѣлителей числа a (включая 1 и a) равно

$$(\alpha_1+1).\ (\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1).$$

Согласно этому всякое число, кратное a, непремѣнно содержитъ простые множители числа a и притомъ каждый въ той же самой или въ болѣе высокой степени, слѣдовательно, оно должно имѣть видъ: $p_1^{\lambda_1}\cdot p_2^{\lambda_2}\cdots p_n^{\lambda_n}\cdot q$, гдѣ $\lambda_\nu\geqq\alpha_\nu$ для $\nu=1,\ 2,\cdots n$ и q число первое съ a.

На основаніи этого замѣчанія мы можемъ, для задачи о нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя и общаго наименьшаго кратнаго, рѣшенной въ A и B, дать еще другое рѣшеніе, которое и является болѣе предпочтительнымъ, если только извѣстно разложеніе данныхъ чиселъ на простые сомножители.

Чтобы найти общій наибольшій дѣлитель, беремъ каждое простое число, которое встрѣчается въ каждомъ изъ данныхъ чиселъ и пишемъ его съ наименьшимъ показателемъ, съ которымъ оно входитъ въ разложенія данныхъ чиселъ. Произведеніе полученныхъ такимъ образомъ степеней простыхъ чиселъ является дѣлителемъ каждаго изъ данныхъ чиселъ; но если этотъ дѣлитель умножить на какое-либо простое число, то полученное произведеніе уже не будетъ содержаться по крайней мѣрѣ въ одномъ изъ данныхъ чиселъ; слѣдовательно, это и будетъ искомый общій наибольшій дѣлитель.

Чтобы найти общее наименьшее кратное, беремъ каждый простой множитель, входящій хотя бы въ одно изъ данныхъ чиселъ и пишемъ его съ наибольшимъ показателемъ, встрѣчающимся при этомъ множителѣ въ разложеніяхъ. Произведеніе опредѣленныхъ такимъ образомъ степеней простыхъ чиселъ и будетъ кратнымъ каждаго даннаго числа; если это произведеніе раздѣлить на какое-либо простое число, то оно уже не будетъ дѣлиться хотя бы на одно изъ данныхъ чиселъ; слѣдовательно, это есть общее наименьшее кратное данныхъ чиселъ.

§ 12. Нѣкоторыя понятія и предложенія изъ элементовъ теоріи чиселъ (необходимыя для слѣдующей главы).

A. Сравненія.

Если намъ даны два произвольныхъ числа g и m, то при помощи дѣленія g на m мы всегда можемъ найти единственную пару такихъ чиселъ q и r, что

$$g = q\cdot m + r, \text{ гдѣ } q \geqq 0,$$
$$0 \leqq r \leqq m-1.$$

Пусть при дѣленіи другого числа g' на m получается частное q' и остатокъ r', такъ что

$$g' = q'm + r'.$$

Если теперь

$$r = r', \text{ а, слѣдовательно, } g - g' = (q - q')m$$

(или же $g' - g = (q' - q)m$), есть число кратное m, то, согласно обозначенію, введенному Гауссомъ въ его „Disquisitiones Arithmeticae" Sectio Prima (1801), говорятъ что g сравнимо съ g' по модулю m, и пишутъ $g \equiv g'$ (мод. m); такое соотношеніе между g и g' называютъ сравненіемъ [1]).

Не трудно усмотрѣть и обратное: если $g - g'$ (при чемъ мы предполагаемъ $g > g'$) дѣлится на m, то при дѣленіи g и g' на m обязательно получается одинъ и тотъ же остатокъ. Въ самомъ дѣлѣ изъ

$$g - g' = (q - q')m + r - r',$$

а если $r < r'$,

$$= (q - q')m - (r' - r)$$

слѣдуетъ, согласно сдѣланному предположенію, что $r - r'$ (а въ послѣднемъ случаѣ $r' - r$) должно дѣлиться на m, что возможно

---

[1]) Слово «congruum» въ томъ же смыслѣ, въ какомъ имъ пользовался Гауссъ, еще много раньше (1732) примѣнялъ Goldbach въ своемъ трактатѣ «Criteria quaedam aequationum, quarum nulla radix rationalis est» (Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1732 et 1733, Bd. VI. 98—102). Ср. M. Cantor, Vorlesungen, Bd. III, стр. 611. Мы здѣсь пользуемся терминомъ «сравненіе» ради краткости выраженія, не желая входить въ теорію болѣе подробно.

лишь при условіи $r-r'=0$, т.-е. при $r=r'$, такъ-какъ $r \leqq m-1$, $r' \leqq m-1$.

Произвольное число g сравнимо по модулю m съ числомъ r, опредѣляемымъ равенствомъ $g=q\,m+r$, гдѣ r есть одно (и только одно) изъ чиселъ $0, 1, 2 \cdots m-1$. Такое число r называется наименьшимъ вычетомъ g по модулю m.

Каждое сравненіе, имѣющее мѣсто для модуля m, будетъ справедливо и для всякаго дѣлителя числа m, если его принять за модуль. Если въ разсужденіи всѣ сравненія имѣютъ одинаковый модуль и онъ остается безъ измѣненія, то мы не будемъ повторять его при каждомъ сравненіи.

Для сравненій имѣетъ мѣсто рядъ предложеній, аналогичныхъ высказаннымъ для равенствъ.

I. Если

$$\left.\begin{array}{l} g \equiv g' \\ \underline{g \equiv g'',} \\ g' \equiv g'' \end{array}\right\} \text{(мод. } m);$$

то и

въ силу того, что если при дѣленіи g, g', g'' на m соотвѣтственно получаются остатки r, r', r'', то изъ $r=r'$ и $r=r''$ слѣдуетъ, что и $r'=r''$.

II. Если

$$g_\nu \equiv g'_\nu \text{ (для } \nu=1, 2, \cdots n),$$

то и

$$g_1+g_2+\cdots+g_n \equiv g_1'+g_2'+\cdots+g_n'.$$

Такъ какъ сложеніе n равенствъ

$$g_\nu = q_\nu m + r_\nu$$

даетъ

$$g_1+g_2+\cdots+g_n=(q_1+q_2+\cdots+q_n)m+r_1+r_2+\cdots+r_n,$$

а сложеніе n равенствъ

$$g_\nu' = q_\nu' m + r_\nu$$

даетъ:

$$g_1'+g_2'+\cdots+g_n'=(q_1'+q_2'+\cdots+q_n')m+r_1+r_2+\cdots+r_n,$$

то отсюда слѣдуетъ, что суммы $g_1+g_2+\cdots+g_n$ и $g_1'+g_2'+$ $+\cdots+g_n'$ при дѣленіи на m даютъ одинаковые остатки.

III. Аналогичнымъ пріемомъ можно показать, что если

$$\begin{array}{l} g_1 \equiv g_1' \\ \underline{g_2 \equiv g_2',} \\ g_1-g_2 \equiv g_1'-g_2'. \end{array}$$

и

то

IV. Если

$$g_1 \equiv g_1'$$

и

$$g_2 \equiv g_2',$$

то и

$$g_1 \cdot g_2 \equiv g_1' \cdot g_2'.$$

При перемноженiи обоихъ равенствъ

$$g_1 = q_1 m + r_1 \qquad g_2 = q_2 m + r_2,$$

а такъ же и равенствъ

$$g_1' = q_1' m + r_1 \qquad g_2' = q_2' m + r_2$$

получаемъ

$$g_1 \cdot g_2 = (q_1 q_2 m + r_1 q_2 + r_2 q_1) m + r_1 r_2$$

и

$$g_1' \cdot g_2' = (q_1' q_2' m + r_1 q_2' + r_2 q_1') m + r_1 r_2,$$

откуда и слѣдуетъ, что при дѣленiи $g_1 \cdot g_2$ и $g_1' \cdot g_2'$ на m получаются равные остатки.

При помощи заключенiя отъ n къ $n+1$ (§ 3 B, стр. 11) можно распространить эту теорему и на произведенiе любого числа сомножителей. Допуская равенство отдѣльныхъ сомножителей, получаемъ изъ этой обобщенной теоремы такое слѣдствiе:

IV a., если

$$g \equiv g',$$

то и

$$g^n \equiv g'^n.$$

Изъ II, IV и IVa слѣдуетъ далѣе:

IV b., что, если

$$a_\nu \equiv a_\nu' \text{ (для } \nu = 0, 1, 2, \cdots n)$$

и

$$g \equiv g',$$

то

$$a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot g + a_0 \equiv a_n' \cdot g'^n + a'_{n-1} \cdot g'^{n-1} + \cdots + a_1' \cdot g' + a_0'.$$

V. Если

$$k \cdot g \equiv k \cdot g' \text{ (мод. } m)$$

и кромѣ того k есть число простое съ m, то должно быть

$$g \equiv g' \text{ (мод. } m);$$

такъ какъ $k \cdot g - k \cdot g' = k \cdot (g - g')$, можетъ, при допущенномъ предположенiи, лишь въ томъ случаѣ дѣлиться на m, если $g - g'$ есть кратное m (§ 11 A, IVa).

Предложенiя, начиная со II и до IVb, служатъ обоснованiемъ извѣстной повѣрки правильности произведеннаго вычисленiя. Если изъ какихъ-либо данныхъ чиселъ при помощи сложенiй, вычитанiй, умноженiй и возведенiй въ степень получено число N, то для повѣрки слѣдуетъ замѣнить каждое изъ данныхъ чиселъ его наименьшимъ вычетомъ, по какому-нибудь модулю m, и выполнить надъ этими наименьшими вычетами тѣ же самыя дѣйствія; пусть при этомъ въ результатѣ получится число n. Необходимое (но конечно не достаточное) условіе правильности числа N, состоитъ въ томъ, что N и n должны имѣть одинаковые наименьшіе вычеты по модулю m. Всего удобнѣе при производствѣ повѣрокъ брать модулемъ 9 или 11, такъ какъ при десятичной системѣ счисленія для этихъ чиселъ легко и быстро опредѣляются наименьшіе вычеты [1]). (Сравни, отдѣлъ D, II этого параграфа, стр. 75 и д.).

B. Число чиселъ, меньшихъ даннаго числа m и простыхъ съ нимъ.

Во многихъ изслѣдованіяхъ имѣетъ большое значеніе число чиселъ, меньшихъ даннаго числа m и не имѣющихъ съ m другихъ общихъ дѣлителей, кромѣ единицы. По Гауссу (Disquisitiones Arithmeticae, Nr 38) это число принято обозначать черезъ $\varphi(m)$ [2]).

I. Для простого числа p, $\boldsymbol{\varphi(p)=p-1}$.

II. Степень простого числа p^α имѣетъ общихъ дѣлителей лишь со всѣми числами кратными p; $\varphi(p^\alpha)$ есть, слѣдовательно, разность между числомъ $p^\alpha-1$ всѣхъ чиселъ меньшихъ p^α, и числомъ $p^{\alpha-1}-1$ чиселъ кратныхъ p:

$$1\cdot p,\ 2\cdot p, \cdots (p^{\alpha-1}-1)\cdot p,$$

меньшихъ p^α; отсюда

$$\boldsymbol{\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}=p^{\alpha-1}\cdot(p-1).}$$

---

[1]) Повѣрка девятью была извѣстна уже индусамъ (M. Cantor. Vorlesungen I, стр. 571), отъ которыхъ ее узнали арабы. Обоснованіе этой повѣрки даетъ Леопардо изъ Пизы (около 1200). M. Cantor, Vorlesungen II, стр. 9. Повѣрка одиннадцатью, впервые, повидимому, встрѣчается у арабскихъ математиковъ (M. Cantor I, стр. 722). Арабъ Ibn Albannâ (конецъ XIII столѣтія) примѣняетъ уже повѣрку семью (M. Cantor I, стр. 759). Эти повѣрки и подобныя имъ при помощи другихъ чиселъ встрѣчаются вновь въ руководствахъ XV-го и XVI-го столѣтій. Особенно эти повѣрки были важны тогда, когда числа во время выполненія вычисленій стирались и замѣнялись другими, что затрудняло непосредственную повѣрку.

[2]) Во Франціи то же самое число (по Cauchy) называютъ «indicateur» числа m, въ Англіи (по Sylvester'у)—«totient» и пишутъ $\tau(m)$.

III. Пусть теперь m представляетъ изъ себя произведеніе $P \cdot Q$ — двухъ чиселъ, не имѣющихъ общихъ дѣлителей. Любое число тогда и только тогда оказывается простымъ съ $m = P \cdot Q$, если оно простое какъ съ P, такъ и съ Q (§ 11 A, IVb). Теперь мы должны изъ совокупности чиселъ $1, 2, 3, \cdots m-1$ выбрать тѣ числа, которыя не имѣютъ общаго дѣлителя ни съ P, ни съ Q. Для этой цѣли числа $0, 1, 2, \cdots m-1$ расположимъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{lllll} 0, & Q, & 2Q, & \cdots & (P-1)Q, \\ 1, & Q+1, & 2Q+1, & \cdots & (P-1)Q+1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k, & Q+k, & 2Q+k, & \cdots & (P-1)Q+k, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q-1, & Q+(Q-1), & 2Q+(Q-1), & \cdots & (P-1)Q+(Q-1). \end{array}$$

Если k $(< Q)$ имѣетъ дѣлитель общій съ Q, то всѣ члены строки, начинающейся съ k, имѣютъ тотъ же самый общій дѣлитель съ Q (§ 11 A, (II)); если же напротивъ k есть число простое съ Q, то всѣ члены этой строки будутъ числами простыми съ Q; такъ какъ, если бы $z = \nu \cdot Q + k$ имѣло общій дѣлитель съ Q, то и k въ силу того, что $k = z - \nu Q$, имѣло бы тотъ же дѣлитель; слѣдовательно, намъ надо сохранить только тѣ строки, которыя начинаются съ чиселъ k, простыхъ съ Q. Число этихъ строкъ равно $\varphi(Q)$.

Два члена одного и того же ряда не могутъ быть сравнимы по модулю P, такъ какъ изъ

$$\mu Q + k \equiv \nu Q + k \text{ (мод. } P)$$

слѣдовало бы

$$\mu Q \equiv \nu Q,$$

а отсюда (по § 12 A, (V)):

$$\mu \equiv \nu,$$

что возможно только въ томъ случаѣ, когда $\mu = \nu$, такъ какъ $\mu < P$, $\nu < P$.

Такимъ образомъ, члены одной и той же строки, при дѣленіи на P, даютъ различные остатки. Такъ какъ число возможныхъ остатковъ при дѣленіи на P въ точности равно числу членовъ одного ряда, то каждый изъ остатковъ $0, 1, 2, \cdots P-1$ встрѣчается въ каждомъ ряду одинъ и только одинъ разъ. Число же можетъ оказаться лишь тогда простымъ съ P, когда его наименьшій вычетъ по мод. P обладаетъ этимъ свойствомъ. Число членовъ одного ряда, простыхъ съ P, равно, слѣдовательно, числу чиселъ, заключающихся между остатками $0, 1, 2, \cdots P-1$ и простыхъ съ P, т.-е. равно $\varphi(P)$.

Чтобы получить всѣ числа, первыя съ $m=P\cdot Q$, слѣдуетъ изъ каждой $\varphi(Q)$ строкъ взять $\varphi(P)$ членовъ; тогда число этихъ чиселъ равно:

$$\varphi(m)=\varphi(P)\cdot\varphi(Q).$$

IV. При помощи заключенія отъ n къ $n+1$ (§ 3 B, стр. 11), можно сейчасъ же обобщить эту формулу и на тотъ случай, когда m представляетъ изъ себя произведеніе произвольнаго числа множителей $P_1, P_2, \cdots P_n$, простыхъ между собой. Для этого придется воспользоваться теоремой (§ 11 A, IV в): если въ ряду $P_1, P_2, \cdots P_n$ всѣ числа попарно взаимно простыя, то каждое изъ этихъ чиселъ будетъ простымъ съ произведеніемъ любого числа остальныхъ чиселъ.

Если $P_\nu=p_\nu^{\alpha_\nu}$ (при $\nu=1, 2, \cdots n$), гдѣ p_ν означаютъ отличныя другъ отъ друга простыя числа, то сдѣланное для P_ν предположеніе выполнено, и поэтому:

$$\varphi(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n})=\varphi(p_1^{\alpha_1})\,\varphi(p_2^{\alpha_2})\cdots\varphi(p_n^{\alpha_n})=$$
$$=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1)\,.$$ [1]

C. Степенные вычеты и теорема Фермата.

Если g и m означаютъ два какихъ-либо числа простыхъ между собой, то и всѣ степени числа g (по § 11 A, IV b.), а слѣдовательно, и всѣ ихъ наименьшіе вычеты по мод. m будутъ числами простыми съ m. Число различныхъ остатковъ, получаемыхъ при дѣленіи всѣхъ возможныхъ степеней g на m не можетъ быть больше, чѣмъ $\varphi(m)$. Поэтому уже въ рядѣ

$$g^0,\ g^1,\ g^2\cdots g^{\varphi(m)}$$

встрѣчаются по крайней мѣрѣ два члена, дающихъ одинъ и тотъ же остатокъ, а слѣдовательно, сравнимыхъ другъ съ дру-

---

[1]) Этотъ результатъ полученъ Эйлеромъ (Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata, Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, T. 8 (1760/61), стр. 74). Въ учебникахъ по теоріи чиселъ встрѣчаются и различныя другія доказательства этой формулы.

гомъ по мод. m, пусть первое изъ нихъ есть g^n, а второе g^{n+t}, гдѣ

$$0 \leqq n < \varphi(m),$$
$$0 < t \leqq \varphi(m).$$

Изъ

$$g^{n+t} \equiv g^n \text{ (мод. } m)$$

по § 12 A, V, слѣдуетъ, такъ какъ g^n является простымъ съ m, что

$$g^t \equiv 1 \text{ (мод. } m).$$

Слѣдовательно, несомнѣнно существуетъ, хотя бы одно такое число t, отличное отъ 0 и $\leqq \varphi(m)$, что при дѣленіи t-ой степени числа g на m, получается въ остаткѣ 1.

Но тогда и для всякаго числа ν, (§ 12 A, IV a)

$$g^{\nu t} \equiv 1 \text{ (мод. } m);$$

т.-е. получается неопредѣленное число степеней g, сравнимыхъ съ единицей по мод. m. Если теперь подъ t (что́ и впередъ всегда станемъ дѣлать) будемъ подразумѣвать наименьшій, отличный отъ нуля показатель, для котораго $g^t \equiv 1$ (мод. m), то можно показать, что если

$$g^T \equiv 1 \text{ (мод. } m),$$

то T должно быть кратнымъ числа t. Пусть теперь T приведено къ виду $\nu t + t'$, гдѣ $\nu \geqq 0$, $0 \leqq t' \leqq t-1$; тогда изъ

$$\left.\begin{array}{lr} & g^{\nu t+t'} \equiv 1 \\ \text{и} & g^{\nu t} \equiv 1 \\ \hline \text{слѣдуетъ} & g^{\nu t} \cdot g^{t'} \equiv g^{\nu t}; \\ \text{а отсюда (§ 12 A, V)} & g^{t'} \equiv 1 \end{array}\right\} \text{ (мод. } m),$$

что́ въ силу предположенія, слѣданнаго относительно t, возможно только въ томъ случаѣ, если $t' = 0$, а потому и $T = \nu t$. Если t наименьшій, отличный отъ 0 показатель, для котораго $g^t \equiv 1$ (мод. m), то, слѣдуя Гауссу (Disquisitiones Arithmeticae, Nr. 53), говорятъ „g принадлежитъ къ показателю t для числа m". Степени $g^1, g^2, \cdots g^t$ даютъ при дѣленіи на m различные остатки; сравнимость двухъ изъ этихъ степеней имѣла бы слѣдствіемъ то, что уже степень ниже t была бы сравнима съ 1 (мод. m).

Такъ какъ при n равномъ произвольному числу $= \nu t + t'$ ($\nu \geqq 0$, $0 \leqq t' \leqq t-1$),

$$g^n \equiv g^{t'} \text{ (мод. } m)$$

то, какъ бы далеко мы ни продолжали рядъ степеней g, при дѣленіи на m мы будемъ получать всегда тѣ же остатки, что и при дѣленіи $g^0, g^1, \cdots g^{t-1}$. Поэтому, если $t < \varphi(m)$, то остатки отъ дѣленія всѣхъ степеней g не исчерпаютъ совокупности всѣхъ чиселъ, меньшихъ m и простыхъ съ нимъ. Если въ этомъ случаѣ обозначить черезъ r одно изъ такихъ чиселъ простыхъ съ m, которыя не встрѣчаются среди остатковъ отъ дѣленія степеней g, то остатки отъ дѣленія

$$rg^0,\ rg^1, \cdots rg^{t-1}$$

1) всѣ будутъ простыми съ m, 2) различными между собой, 3) отличными отъ остатковъ, получаемыхъ при дѣленіи $g^0, g^1, \cdots g^{t-1}$.

Первое утвержденіе вытекаетъ изъ § 11 A, IV b. Допущеніе, противоположное 2-му, имѣло бы слѣдствіемъ то, что уже степень g болѣе низкая, чѣмъ t-ая, была бы сравнима съ 1 (мод. m).

Если бы, наконецъ, имѣло мѣсто

$$rg^{t'} \equiv g^{t''},$$

то, для случая $(t'' \geqq t')$,

$$r \equiv g^{t''-t'},$$

а для случая $(t'' < t')$,

$$r \equiv g^{t+t''-t'}.$$

что противорѣчитъ предположенію, сдѣланному относительно r, и такимъ образомъ утвержденіе 3 доказано.

Если и теперь остатками, полученными отъ дѣленія

$$g^0,\ g^1, \cdots g^{t-1}$$

и

$$rg^0,\ rg^1, \cdots rg^{t-1}$$

не будутъ еще исчерпаны всѣ числа меньшія m и простыя съ нимъ, и если черезъ ρ обозначить число, не встрѣчавшееся какъ остатокъ, то слѣдуетъ, какъ и раньше, что остатки отъ дѣленія

$$\rho g^0,\ \rho g^1, \cdots \rho g^{t-1}$$

будутъ 1) простыми съ числомъ m, 2) различными между собой, 3) отличными отъ всѣхъ встрѣчавшихся до сихъ поръ остатковъ. Разсуждая дальше такимъ же образомъ, мы убѣдимся, что до тѣхъ поръ, пока еще можно найти число простое съ m, меньшее его и не встрѣчавшееся среди нашихъ остатковъ, каждое такое число даетъ t новыхъ чиселъ того же свойства.

Слѣдовательно, всѣ $\varphi(m)$ чиселъ меньшихъ m и простыхъ съ нимъ, распадаются при $t < \varphi(m)$ на группы по t членовъ въ каждой; поэтому $\varphi(m)$ должно быть или равно t, или быть числомъ кратнымъ t.

Но отсюда слѣдуетъ (§ 12 A, IV a)

$$g^{\varphi(m)} \equiv 1 \quad (\text{мод. } m).$$

Это важное сравненіе принято называть обобщенной теоремой Фермата. Геніальный французскій математикъ Pierre-de-Fermat высказалъ его впервые [1]) правда безъ доказательства для частнаго случая, когда m простое число, а $\varphi(m)$, слѣдовательно, равно $m-1$. (Письмо къ Frénicle'ю отъ 18 окт. 1640). Первое доказательство находится въ сочиненіи Leibniz'а „Nova algebrae promotio" (около 1700) [2]), которому открытіе Фермата, по всей вѣроятности, извѣстно не было. Но такъ какъ это сочиненіе не было напечатано, а, напротивъ, его нашли лишь послѣ смерти Лейбница, то оно не могло оказать вліянія на современниковъ. Впервые опубликованныя доказательства этого предложенія принадлежали Л. Эйлеру (Comment. Petrop. ad annum 1736, т. 8, стр. 141—146; Novi Comment. Petrop. ada nnum 1758/59, т. 7, стр. 49—82. Novi Comment, Petrop. ad annum 1760/61, т. 8, стр. 74 и д., гдѣ въ самомъ концѣ доказана обобщенная теорема Фермата).

D. Признаки дѣлимости систематическихъ чиселъ.

Часто можно, не выполняя дѣленія, узнать, дѣлится ли написанное въ систематической формѣ число

$$A = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$$

на другое число.

I. Дѣлимость на число, не содержащее другихъ простыхъ множителей, кромѣ множителей числа g.

Каждое такое число есть или дѣлитель числа g, или его степень съ какимъ угодно большимъ показателемъ.

Такъ какъ

$$A \equiv a_0 \ (\text{мод. } g),$$
$$A \equiv a_1 g + a_0 \ (\text{мод. } g^2),$$
$$A \equiv a_2 g^2 + a_1 g + a_0 \ (\text{мод. } g^3) \text{ и т. д.}$$

[1]) M. Cantor, Vorlesungen II. стр. 776—777.

[2]) M. Cantor, Vorlesungen III, стр. 331.

то A будетъ дѣлиться на g, или на дѣлитель g, если это имѣетъ мѣсто для a_0; — будетъ дѣлиться на g^2 или на его дѣлители, если на нихъ дѣлится $a_1 g + a_0$,—будетъ дѣлиться на g^3 или его дѣлителей, если то же самое справедливо и для $a_2 g^2 + a_1 g + a_0$.

Для $g = 10$, получаемъ признаки дѣлимости на

10, 2, 5;
100, 4, 20, 25, 50;
1000, 8, 40, 125, 200, 250, 500 и т. д.;

при $g = 12$ тѣ же самыя сравненія даютъ признаки дѣлимости, для слѣдующихъ (по десятичной системѣ написанныхъ) чиселъ

12, 2, 3, 4, 6;
144, 8, 9, 16, 18, 24, 36, 48, 72;
1728, 27, 32, 54, 64, 96, 108, 192, 216, 288, 432, 576, 864 и т. д. [1]).

II. Дѣлимость на число m, простое съ g.

Чтобы вмѣсто даннаго числа

$$A = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \cdots + a_{n-1} g^{n-1} + a_n g^n$$

получить меньшее число, сравнимое съ нимъ по мод. m, само собой напрашивается замѣна степеней g ихъ наименьшими вычетами (мод. m).

Если g принадлежитъ къ показателю t для модуля m, то, какъ мы это видѣли въ отдѣлѣ C этого §

$$\begin{array}{llll} g^0, & g^t, & g^{2t}, \ldots & \text{даютъ одинъ и тотъ же остатокъ } 1, \\ g^1, & g^{t+1}, & g^{2t+1}, \ldots & \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \gamma_1, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g^{t-1}, & g^{2t-1}, & g^{3t-1}, \ldots & \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \gamma_{t-1}, \end{array}$$

а поэтому для модуля m

$$A \equiv a_0 + a_t + a_{2t} + \cdots + \gamma_1(a_1 + a_{t+1} + a_{2t+1} + \cdots) + \cdots$$
$$+ \gamma_{t-1}(a_{t-1} + a_{2t-1} + a_{3t-1} + \cdots).$$

A тогда и только тогда дѣлится на m, если на m дѣлится правая часть. Примѣненіе этого признака удобно и просто въ тѣхъ случаяхъ, когда t имѣетъ небольшое значеніе.

---

[1]) Преимущество вычисленій по двѣнадцатиричной системѣ основывается на томъ, что въ ней существуютъ такіе простые признаки дѣлимости для большаго числа чиселъ, чѣмъ по десятичной системѣ.

Пусть

1. $m = g - 1$.

Въ этомъ случаѣ $g \equiv 1$ (мод. m), слѣдовательно, $t = 1$ и

$$A \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \text{ (мод. } g - 1).$$

Получаемъ правило: число тогда и только тогда дѣлится на $g - 1$, или на дѣлитель $g - 1$, если „сумма цыфръ" дѣлится на соотвѣтствующее число. При $g = 10$ это правило является признакомъ дѣлимости на 9 и 3; при $g = 12$, — признакомъ дѣлимости на 11.

2. $m = g + 1$.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{r} g \equiv m - 1 \\ g^2 \equiv m^2 - 2m + 1 \\ \text{слѣдовательно, } g^2 \equiv 1 \end{array}\right\} \text{ (мод. } m).$$

Поэтому

$$t = 2, \ \gamma_1 = m - 1$$

и

$$A \equiv a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + (m - 1)(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$$

или

$$A \equiv m(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) + (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - \\ - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots),$$

или

$$\equiv m(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) - [(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) - (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots)],$$

въ зависимости отъ того, будетъ ли

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) \gtrless (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots).$$

Отсюда слѣдуетъ, что A тогда и только тогда дѣлится на $m = g + 1$ (или на дѣлитель числа $g + 1$), если на это же число дѣлится разность:

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots), \text{ или} \\ (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) - (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots).$$

При $g = 10$, мы имѣемъ признакъ дѣлимости на 11; при $g = 12$, — признакъ дѣлимости на 13.

Оставляя въ сторонѣ примѣненіе этого общаго признака къ бóльшему числу частныхъ случаевъ [1]), положимъ еще

[1]) Сравнительно простыя правила получаются еще, напримѣръ, въ предположеніи $g = 10$, для $m = 27$ и $m = 37$; для этихъ значеній $t = 3$. Для $m = 13$, $t = 6$.

3. $m = 7$ при $g = 10$.

По отношенію къ модулю 7 имѣемъ

$$10^0 \equiv 1,\ 10^1 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 2,\ 10^3 \equiv 6,\ 10^4 \equiv 4,\ 10^5 \equiv 5,\ 10^6 \equiv 1,$$

слѣдовательно:

$$A \equiv 1 \cdot a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \\ + 1 \cdot a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} + \cdots$$ [1]).

Вмѣсто того, чтобы воспользоваться для непосредственнаго полученія признака дѣлимости на 7 этимъ сравненіемъ, нѣсколько цѣлесообразнѣе замѣнить сначала 6 черезъ $7 - 1$, 4 черезъ $7 - 3$ и 5 черезъ $7 - 2$.

Тогда получается:

$$A = 7 \cdot S + 1 \cdot a_0 + 3a_1 + 2a_2 - 1 \cdot a_3 - 3a_4 - 2a_5 + \\ + 1 \cdot a_6 + 3a_7 + 2 \cdot a_8 - 1 \cdot a_9 - 3a_{10} - 2a_{11} + \cdots,$$

гдѣ

$$S = a_3 + a_4 + a_5 + a_9 + a_{10} + a_{11} + \cdots$$

Отсюда для рѣшенія вопроса о дѣлимости какого-либо числа на 7 получается слѣдующее правило: разбиваемъ это число, начиная съ единицъ, на группы по 3 цыфры въ каждой, умножаемъ цыфры каждой группы, начиная каждый разъ съ младшаго въ данной группѣ разряда, на 1, на 2, и на 3, уменьшая при этомъ получаемое произведеніе до наименьшаго вычета по мод. 7. Составляемъ, съ одной стороны, сумму вычетовъ — первой, третьей, пятой и т. д. группъ, съ другой стороны, сумму вычетовъ второй, четвертой, шестой и т. д. группъ; данное число тогда и только тогда дѣлится на 7, если разность между этими обѣими суммами дѣлится на 7.

Къ признакамъ дѣлимости можно прійти еще и другимъ путемъ. Ограничимся теперь только числами десятичной системы и представимъ число A написаннымъ въ видѣ $10A_0 + a_0$ $(a < 10)$, тогда имѣемъ:

$$A \equiv 10A_0 + a_0 \pm \mu m a_0 \quad (\text{мод. } m),$$

гдѣ μ означаетъ произвольное число.

---

[1]) Несомнѣнно, соотвѣтствующее этому сравненію правило нахожденія наименьшаго остатка числа (мод. 7) даетъ уже арабъ Ibn Albannâ, около конца XIII столѣтія. (Ср. стр. 69, прим. I). Этимъ правиломъ затѣмъ часто пользовались, съ одной стороны, для повѣрки 7-ю, а съ другой стороны, для опредѣленія дѣлимости числа на 7.

Это число μ подчинимъ тому условію, чтобы $\mu m+1$ или $\mu m-1$ было числомъ кратнымъ 10, напримѣръ $\nu\cdot 10$.

Тогда получаемъ сравненіе

$$A\equiv 10A_0\pm\nu\cdot 10\cdot a_0 \text{ (мод. } m).$$

Такъ какъ въ силу того, что m есть число простое съ 10, оба сравненія

$$\left.\begin{array}{ll} & 10A_0\pm\nu\cdot 10a_0\equiv 0 \\ \text{и} & A_0\pm\nu\cdot a_0\equiv 0\end{array}\right\} \text{ (мод. } m)$$

эквивалентны, то $A=10A_0+a_0$ тогда и только тогда дѣлится на m, если на то же число дѣлится и $A_0\pm\nu a_0$. Это число $A\pm\nu a_0$ по тому же способу можно замѣнить меньшимъ числомъ и т. д.

Напримѣръ, для $m=7$ имѣемъ

$$\left.\begin{array}{ll} & A\equiv 10A_0+a_0-3\cdot 7\cdot a_0 \\ \text{или} & A\equiv 10A_0-20a_0\end{array}\right\} \text{ (мод. } 7).$$

Вмѣсто того, чтобы узнавать, дѣлится ли на 7 число A, можно изслѣдовать дѣлимость на 7 числа A_0-2a_0 [1]). Если намъ дано число 25403, то образуемъ послѣдовательно равенства:

$$\begin{aligned} 2540-\ \ 6&=2534,\\ 253-\ \ 8&=\ \ 245,\\ 24-10&=\ \ \ \ 14;\end{aligned}$$

слѣдовательно, 25403 дѣлится на 7.

Аналогичное правило легко установить и для признака дѣлимости на какое-либо число простое съ 10 [2]).

Для нѣкоторыхъ чиселъ, и именно для дѣлителей чиселъ $10^\nu+1$, гдѣ ν означаетъ произвольное число, можно установить болѣе удобный признакъ дѣлимости, если A написать въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{aligned} A&=A_\nu\cdot 10^\nu+A_\nu', \text{ гдѣ } A_\nu'<10^\nu,\\ &=A_\nu\cdot(10^\nu+1)+A_\nu'-A_\nu\end{aligned}$$

---

[1]) Конечно A и A_0-2a_0, вообще не имѣютъ одного и того же наименьшаго вычета (мод. 7): совпаденіе имѣетъ мѣсто при вычетѣ 0.

[2]) Ср. Zerlang, Hoffmanns Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht. Bd. II (1871) стр. 337; Dickstein, Hoffmanns Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht. Bd. IV (1873) стр. 404; Masing, Hoffmanns Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht. Bd. IV (1873), стр. 407.

или $$= A_\nu \cdot (10^\nu + 1) - (A_\nu - A_\nu'),$$

въ зависимости отъ того будетъ ли $A_\nu' \gtrless A_\nu$.

Подобная форма числа A указываетъ, что оно тогда и только тогда дѣлится на $10^\nu + 1$ или на дѣлитель этого числа, если на то же число дѣлится и $A_\nu' - A_\nu$ или $A_\nu - A_\nu'$.

Если положить $\nu = 3$, то

$$10^\nu + 1 = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13,$$

и, такимъ образомъ, получаемъ признакъ дѣлимости на 1001, 7, 11, 13.

Напримѣръ число 113945 дѣлится на 13, такъ какъ $945 - 113 = 832$ есть число кратное 13. Очевидно, пользуясь этимъ принципомъ, можно установить аналогичные признаки дѣлимости на $10^\nu - 1$, на $10^\nu \pm 2$ и т. д. [1]); болѣе подробно мы не будемъ распространяться объ этомъ, такъ какъ эти признаки для практики не имѣютъ большого значенія.

III. **Дѣлимость на число, имѣющее по крайней мѣрѣ одинъ множитель, общій съ g, и по крайней мѣрѣ одинъ, отличный отъ множителей g.**

Подобное число z всегда можно представить въ видѣ произведенія числа μ, имѣющаго одинаковые простые множители съ g, и числа m, простого съ g. Число тогда и только тогда дѣлится на z, когда оно дѣлится какъ на μ, такъ и на m. Необходимость этого условія ясна сама по себѣ; но при этомъ оно и достаточно, такъ какъ каждое число, кратное чиселъ μ и m, должно дѣлиться на ихъ общее наименьшее кратное; но такъ какъ числа μ и m взаимно простыя, то это кратное равно произведенію $\mu \cdot m = z$ (§ 11 B, стр. 61). Этимъ самымъ (III) сводится къ (I) и (II).

---

[1]) Ср. Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, Leipzig 1888, стр. 151.

ГЛАВА II.

Дробныя числа и въ особенности простыя дроби.

§ 1. Опредѣленіе дробныхъ чиселъ.

Къ понятію числа въ главѣ I, § 1 мы пришли, исходя изъ разсмотрѣнія множества какихъ-либо вещей, при чемъ отвлекались отъ особыхъ свойствъ этихъ вещей, и принимали во вниманіе лишь ихъ раздѣльность; каждое, полученное путемъ такого отвлеченія и, конечно, равносильное другимъ понятіе мы называли „единицей", и всѣ эти единицы коллективно соединяли въ нашемъ сознаніи въ одно цѣлое. Выработанное такимъ образомъ понятіе числа является примѣнимымъ потому, что мы часто имѣемъ дѣло со множествами, отдѣльные индивидуумы которыхъ мы можемъ считать тождественными въ интересующихъ насъ цѣляхъ, несмотря на ихъ нѣкоторое различіе [1]); такое множество мы можемъ вполнѣ охарактеризовать, указавъ, съ одной стороны, число, полученное вышеуказаннымъ путемъ, а, съ другой стороны, указавъ опредѣленнымъ наименованіемъ комплексъ тѣхъ признаковъ, на которые только и было обращено вниманіе.

Часто мы имѣемъ дѣло со множествомъ вещей, которыя въ извѣстныхъ цѣляхъ не могутъ быть разсматриваемы, какъ равноцѣнныя; напротивъ мы часто имѣемъ дѣло съ такими множествами, въ которыхъ вещь одного рода E имѣетъ какъ разъ такую цѣнность какъ 2, или 3, 4 или вообще n вещей рода N. Если въ какомъ-либо множествѣ встрѣчается g вещей рода E, и z вещей рода N, то для нашихъ цѣлей нѣтъ смысла это множество обозначать просто черезъ $g+z$. Если мы имѣемъ, на-

[1]) Рѣшеніе вопроса о томъ, допустимо ли это, не относится къ ариѳметикѣ, а къ той области (скажемъ къ физикѣ или коммерческой практикѣ), къ которой какъ разъ мы и желаемъ примѣнить правила ариѳметики.

примѣръ, кучу различныхъ монетъ, то, конечно, въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ мы можемъ ихъ разсматривать, какъ равнозначащія; чтобы вполнѣ описать это множество, мы можемъ совершенно отвлечься отъ отдѣльныхъ свойствъ каждой монеты, разсматривая каждую, какъ „единицу", эти единицы коллективно соединить въ цѣлое, соотвѣтствующее этому множеству число, и затѣмъ къ этому числу присоединить слово „монета". Если эти монеты мы хотимъ употребить для покупокъ, то разсматривать ихъ, какъ равноцѣнныя, не годится: марка въ этомъ случаѣ имѣетъ точно такую же цѣнность какъ и сотня пфениговъ[1]) и т. д., и мы не можемъ уже опредѣлять и называть число описаннымъ ранѣе способомъ.

Чтобы быть въ состояніи и въ такихъ случаяхъ характеризовать множество числомъ и названіемъ, вновь отвлечемся отъ особенныхъ свойствъ отдѣльныхъ вещей; но теперь къ ихъ раздѣльности въ нашемъ сознаніи еще присоединяется и ихъ относительная цѣнность. Пусть множество содержитъ вещи двухъ родовъ, при чемъ вещь перваго рода E разсматривается какъ равноцѣнная n вещамъ втораго рода N; если вещь перваго рода, отвлекаясь отъ всѣхъ ея особенныхъ свойствъ, принять за „единицу" и удержать въ сознаніи лишь сравнительную цѣнность вещи второго рода по отношенію къ вещи перваго рода, не обращая вниманія на особыя свойства вещей второго рода, то вещь второго рода придется обозначить черезъ $\frac{1}{n}$; коллективное же соединеніе 2-хъ, 3-хъ и вообще z, полученныхъ путемъ указаннаго отвлеченія понятій, черезъ $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\cdots$ $\frac{z}{n}$. Понятія $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\cdots$ $\frac{z}{n}$, всецѣло устанавливаемыя при помощи этого опредѣленія станемъ теперь тоже называть числами. Чтобы отличить ихъ отъ чиселъ, съ которыми мы исключительно имѣли дѣло до сихъ поръ: $1, 2, 3, \cdots$, мы назовемъ эти послѣднія „цѣлыми числами", а вновь введеныя „дробными числами" или „дробями". Въ $\frac{z}{n}$ число z называется „числителемъ", а n „знаменателемъ" дроби. Коллективное соединеніе цѣлаго числа g и дроби $\frac{z}{n}$, мы будемъ разсматривать какъ число, и въ отличіе отъ другихъ чиселъ назовемъ „смѣшаннымъ числомъ". Множество, содержащее g вещей, которыя въ нашихъ цѣляхъ раз-

[1]) Конечно, лишь для этой цѣли равноцѣнность не имѣетъ уже мѣста съ точки зрѣнія физики или химіи.

сматриваются какъ равноцѣнныя, и z вещей, которыя также могутъ разсматриваться какъ равноцѣнныя между собой, но изъ которыхъ n вещей можно замѣнить одной вещью перваго рода, можетъ быть для данныхъ цѣлей вполнѣ охарактеризовано числомъ $g+\frac{z}{n}$ съ присоединеніемъ къ нему названія вещи перваго рода.

Чтобы наши разсужденія можно было примѣнить ко всѣмъ множествамъ, отдѣльные индивидуумы которыхъ связаны между собой какими-либо отношеніями сравнительной цѣнности, мы ихъ распространимъ не только на цѣлыя числа, но и на дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\cdots \frac{z}{n}, \cdots$, гдѣ n есть произвольное цѣлое число. Такъ какъ выраженіе, что вещь одного рода равноцѣнна нулю вещей другого рода, не имѣетъ никакого смысла, то для знаменателя n мы совершенно исключаемъ значеніе 0.

Дробь со знаменателемъ 1, какъ это ясно изъ опредѣленія, равна своему числителю, т.-е. равна цѣлому числу. Если числитель z есть число кратное знаменателя n, напр. $z=\zeta\cdot n$, то согласно опредѣленію, имѣемъ:

$$\frac{z}{n}=\frac{\zeta\cdot n}{n}=\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}^{(\zeta n\text{ слагаемыхъ})}=$$

$$=\overbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(n\text{ слагаемыхъ})}+\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(n\text{ слагаемыхъ})}+\cdots+\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(n\text{ слагаемыхъ})}}^{(\zeta\text{ частныхъ суммъ})}=$$

$$=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{(\zeta\text{ слагаемыхъ})}=\zeta,$$

слѣдовательно, $\frac{z}{n}$ равно цѣлому числу, и обратно можно утверждать, что любое цѣлое число ζ, можетъ быть представлено безчисленнымъ множествомъ способовъ въ видѣ дроби $\frac{\zeta\cdot n}{n}$, гдѣ n можетъ обозначать любое цѣлое число. Слѣдовательно, совокупность дробей заключаетъ въ себѣ также и всѣ цѣлыя числа.

Только что доказанное равенство $\frac{z}{n}=\frac{\zeta\cdot n}{n}=\zeta$ показываетъ, что, если z есть кратное числа n, дробь $\frac{z}{n}$ можно разсматривать, какъ выраженіе результата дѣленія $z:n$; послѣднее справедливо и въ томъ случаѣ, когда z не дѣлится нацѣло на n. Чтобы убѣдиться въ томъ, что дѣйствительно дробь $\frac{z}{n}$, гдѣ z и n произвольныя цѣлыя числа (n отлично отъ нуля), является результатомъ дѣленія $z:n$ [1]), достаточно показать, что n—кратное повтореніе дроби $\frac{z}{n}$ даетъ z. По опредѣленію имѣемъ:

$$\frac{z}{n}=\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}^{(z\text{ слагаемыхъ})}$$

а, слѣдовательно, n—кратное повтореніе дроби $\frac{z}{n}$ даетъ

$$\overbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(z\text{ слагаемыхъ})}+\cdots+\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(z\text{ слагаемыхъ})}}^{(n\text{ частныхъ суммъ})}=$$

$$=\overbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(n\text{ слагаемыхъ})}+\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(n\text{ слагаемыхъ})}+\cdots+\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(n\text{ слагаемыхъ})}}^{(z\text{ частныхъ суммъ})}=$$

$$=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{(z\text{ слагаемыхъ})}=z.$$

Слѣдовательно, задача $z:n$ всегда разрѣшима, благодаря установленному понятію дроби $\frac{z}{n}$. **Введеніе дробей, согласно этому, приноситъ ту выгоду, что дѣленіе одного цѣлаго числа на другое, которое въ области цѣлыхъ чиселъ возможно лишь въ исключительныхъ случаяхъ, теперь является всегда выполнимымъ.**

Историческія и критическія замѣчанія.

Примѣненіе дробей къ вычисленіямъ ведетъ свое начало съ очень древняго времени. Уже древнѣйшее, извѣстное намъ математическое руководство египтянъ, папирусъ **Ahmes'a**, ко-

[1]) Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что $z:n$ представляетъ задачу, слѣдовательно, нѣкоторое требованіе; $\frac{z}{n}$, напротивъ, означаетъ нѣкоторое, вполнѣ опредѣленное число.

торсе составлено между 2000 — 1700 годами до Р. Х., даетъ намъ ученіе о дробяхъ въ достаточно высокой степени совершенства. Составитель оперируетъ главнымъ образомъ только съ долями (единичными дробями), т. е. такими дробями, числители которыхъ равны 1; всѣ остальныя дроби сводятся къ этимъ послѣднимъ (ср. M. Cantor, Vorlesungen I, ст. 22 и д.). Отъ египтянъ вычисленіе съ долями перешло къ грекамъ, отъ нихъ къ арабамъ, а отъ послѣднихъ къ христіанскимъ математикамъ среднихъ вѣковъ. Такъ какъ при дѣйствіяхъ съ долями, числитель всегда равенъ 1, то нѣтъ надобности давать его отдѣльно, и, на самомъ дѣлѣ, египтяне изображали дробь, ставя просто точку надъ знаменателемъ. Индусы же, наоборотъ, обозначали дроби почти такъ же, какъ и мы; они помѣщали числитель надъ знаменателемъ, — отсутствовала лишь черта. Употребленіе же черты при обозначеніи дробей впервые можно констатировать у Леонардо Пизанскаго, въ Liber abaci, но возможно, что и раньше еще оно примѣнялось у арабовъ. Употребленіе черты въ обозначеніи дробей стало всеобщимъ съ конца XV столѣтія.

Въ новѣйшихъ учебникахъ ариѳметики, обращающихъ главное вниманіе на точность изложенія, дробь $\frac{z}{n}$ (ср. O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik; I Teil, Abschnitt, III; J. Tannery, Leçons d'Arithmétique, Chapitre VI; H. Weber, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, Bd. I, 3. Abschnitt). большею частью опредѣляется какъ совокупность, система двухъ цѣлыхъ, въ неизмѣняемомъ порядкѣ взятыхъ чиселъ [1]). Такое опредѣленіе получаетъ извѣстное содержаніе только тогда, когда установлены извѣстныя соглашенія о равенствѣ и неравенствѣ такихъ системъ и о смыслѣ дѣйствій надъ ними. Хотя, такимъ образомъ, теорія дробей, безъ сомнѣнія, можетъ быть обоснована строго логически, мы все-таки не избрали этого пути, такъ какъ подобное опредѣленіе не даетъ само по себѣ дроби того смысла, который она имѣетъ во всѣхъ примѣненіяхъ; и, кромѣ того, тѣ основныя соглашенія, о которыхъ говорилось, должны учащимся показаться произвольными, когда на самомъ дѣлѣ этого нѣтъ; напротивъ, эти соглашенія являются необходимыми слѣдствіями опредѣленій, данныхъ въ нашемъ изложеніи для дро-

1) «Пара» чиселъ. (Ред.).

бей, и соотвѣтствующихъ опредѣленій для цѣлыхъ чиселъ въ зависимости отъ множествъ, индивидуумы которыхъ можно разсматривать, какъ однородные.

Чисто формальное построеніе понятія числа имѣется у Heine (Crelles Journ. Bd. 74, S. 172), Thomae, (Theorie der analytischen Functionen einer komplexen Veränderlichen, § 1—11), а въ примѣненіи къ элементарному преподаванію особенно у Reichel'я (Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe, Teil I. Berlin 1886). Эти математики разсматриваютъ дроби (какъ и всѣ позднѣе вводимыя числа), какъ чистые символы, — какъ воспроизведенныя чернилами, типографской краской, или мѣломъ фигуры, для употребленія которыхъ должны быть даны правила въ родѣ, напримѣръ, правилъ движенія фигуръ при игрѣ въ шахматы. При такомъ пониманіи сама ариѳметика становится пустой игрой въ символы и дѣлается пригодной для примѣненія въ геометріи, физикѣ и т. д. лишь въ томъ случаѣ, если въ концѣ концовъ все-таки откажешься отъ чисто-формальной точки зрѣнія и вновь вернешься къ собственному внутреннему смыслу дроби. Подробную критику этой формальной теоріи даетъ Frege, во второй части своихъ „Grundgesetze der Arithmetik“ (Jena 1903).

§ 2. Сравненіе дробныхъ чиселъ.

Очевидно, что всѣ числа, обозначенныя символомъ $\frac{1}{n}$, равны между собой; въ самомъ дѣлѣ, хотя $\frac{1}{n}$ можно получить абстрагированіемъ отъ свойствъ одной вещи или какой-либо другой съ ней несходной, тѣмъ не менѣе при такомъ абстрагированіи мы не принимаемъ во вниманіе никакихъ особенностей за исключеніемъ отношенія къ единицѣ, а это послѣднее сохраняетъ свое значеніе пока n остается неизмѣннымъ. Такъ и

$$\frac{z}{n}=\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}^{(z\text{ слагаемыхъ})}$$

означаетъ всегда единственное опредѣленное число. Изъ нашего опредѣленія дроби необходимо слѣдуетъ, что могутъ быть равными и такія дроби, которыя являются въ неодинаковой формѣ.

Прежде всего легко показать, что если n и t означаютъ произвольныя цѣлыя числа, то всегда $\frac{t}{t \cdot n} = \frac{1}{n}$.

$\frac{1}{t \cdot n}$ согласно опредѣленію есть такая дробь, $(t \cdot n)$ кратное которой равно 1; слѣдовательно,

$$1 = \overbrace{\frac{1}{t \cdot n} + \frac{1}{t \cdot n} + \cdots + \frac{1}{t \cdot n}}^{(tn \text{ слагаемыхъ})} =$$

$$= \overbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{t \cdot n} + \cdots + \frac{1}{t \cdot n}\right)}^{(t \text{ слагаемыхъ})} + \cdots + \overbrace{\left(\frac{1}{t \cdot n} + \cdots + \frac{1}{t \cdot n}\right)}^{(t \text{ слагаемыхъ})}}^{(n \text{ частныхъ суммъ})};$$

это значитъ, что n кратное дроби $\overbrace{\left(\frac{1}{t \cdot n} + \cdots + \frac{1}{t \cdot n}\right)}^{(t)} = \frac{t}{t \cdot n}$ равно 1; такимъ образомъ мы должны дробь $\frac{t}{tn}$ примать за равнозначащую $\frac{1}{n}$. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что если z также означаетъ произвольное число, то

$$\overbrace{\frac{t}{tn} + \cdots + \frac{t}{tn}}^{(z \text{ слагаемыхъ})} = \overbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{(z \text{ слагаемыхъ})},$$

или

$$\frac{t \cdot z}{t \cdot n} = \frac{z}{n}.$$

Слѣдовательно, дробь равнозначна всякой другой, которая получится изъ нея, если числитель и знаменатель умножить на одно и то же число, или числитель и знаменатель раздѣлить на одно и то же число (дробь сократить).

Если числитель и знаменатель дроби имѣютъ общій дѣлитель, то можно эту дробь замѣнить дробью, выраженной меньшими числами, раздѣливъ числитель и знаменатель на ихъ общій наибольшій дѣлитель, найденный способомъ, указаннымъ въ гл. I, § 11 A.

Если z и n взаимно простыя цѣлыя числа, то дробь $\frac{z}{n}$ разсматриваютъ какъ приведенную или нормальную форму всѣхъ дробей $\frac{2z}{2n}$, $\frac{3z}{3n}$, $\frac{4z}{4n}$ и т. д., которыя, согласно только что доказанному, равны $\frac{z}{n}$. Такъ какъ каждую изъ этихъ дробей въ какомъ-либо аггрегатѣ можно замѣнить черезъ $\frac{z}{n}$ то и любыя двѣ такихъ дроби можно замѣнять одну другою.

Равенство $\frac{t \cdot z}{t \cdot n} = \frac{z}{n}$ позволяетъ любыя данныя дроби замѣнить другими, имѣющими одинаковый знаменатель или, какъ говорятъ, одноименными. Пусть намъ даны дроби $\frac{z_1}{n_1}, \frac{z_2}{n_2}, \ldots \frac{z_m}{n_m}$; находимъ по гл. I § 11 B или C общее наименьшее кратное N отдѣльныхъ знаменателей $n_1, n_2, \ldots n_m$, (такъ называемый общій знаменатель) такъ, что $N = \nu_\mu \cdot n_\mu$ (для $\mu = 1, 2, \ldots m$), а затѣмъ числитель и знаменатель первой дроби умножаемъ на ν_1, — второй дроби на ν_2 и т. д. и, наконецъ, числитель и знаменатель m-той дроби на ν_m; тогда будемъ имѣть:

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{\nu_1 z_1}{N}, \ \frac{z_2}{n_2} = \frac{\nu_2 z_2}{N}, \ldots \frac{z_m}{n_m} = \frac{\nu_m z_m}{N}.$$

Такимъ образомъ мы можемъ множество, состоящее изъ вещей, (находящихся во всевозможныхъ отношеніяхъ къ вещамъ опредѣленнаго рода), замѣнить множествомъ такихъ вещей, отношенія которыхъ къ вещамъ этого рода одинаковы.

Пусть N' означаетъ любое общее кратное всѣхъ знаменателей; тогда, по гл. I § 11 B, число N' есть кратное числа N, напр. $N' = k \cdot N$; данныя дроби могутъ быть поэтому написаны и въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{k \cdot \nu_1 \cdot z_1}{N'}, \ \frac{z_2}{n_2} = \frac{k \cdot \nu_2 \cdot z}{N'} \ldots \frac{z_m}{n_m} = \frac{k \cdot \nu_m \cdot z_m}{N'}.$$

Если намъ нужно сравнить двѣ какія-либо дроби $\frac{z_1}{n_1}$ и $\frac{z_2}{n_2}$, то мы опредѣляемъ общее наименьшее кратное N, ихъ знаменателей n_1 и n_2 и замѣняемъ данныя дроби дробями со знаменателемъ N, такъ что

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{Z_1}{N} \text{ и } \frac{z_2}{n_2} = \frac{Z_2}{N}.$$

Мы имѣемъ теперь дѣло съ вещами одного и того же рода, слѣдовательно, здѣсь примѣнимо опредѣленіе, данное въ гл. I, § 2, откуда вытекаетъ:

$$\frac{Z_1}{N} \gtrless \frac{Z_2}{N},$$

смотря по тому, будетъ ли

$$Z_1 \gtreqless Z_2.$$

Если общимъ знаменателемъ взять какое-либо другое число $N' = k \cdot N$, общее кратное чиселъ n_1 и n_2, то получится $\frac{z_1}{n_1} = \frac{kZ_1}{N'}$ и $\frac{z_2}{n_2} = \frac{kZ_2}{N'}$. Такъ какъ если $Z_1 \gtreqless Z_2$, по гл. I, § 5 D и $k \cdot Z_1 \gtreqless k \cdot Z_2$ и наоборотъ, то, слѣдовательно, условія равенства или неравенства двухъ дробей не зависятъ отъ выбора общаго знаменателя. Этимъ самымъ сравненіе двухъ дробей по величинѣ сводится къ сравненію по величинѣ двухъ цѣлыхъ чиселъ; поэтому предложенія, доказанныя для неравенствъ (въ гл. I, § 3 C) между цѣлыми числами примѣнимы безъ дальнѣйшихъ оговорокъ и къ неравенствамъ между дробями. Къ этому приходится добавить только слѣдующее:

Если z и n числа взаимно простыя, то, какъ мы раньше видѣли, дробь $\frac{z}{n}$ равна всѣмъ дробямъ, получающимся изъ нея умноженіемъ числителя и знаменателя на одно и то же число. Обратно, покажемъ теперь, что если $\frac{z'}{n'} = \frac{z}{n}$, и z и n числа первыя между собой, то необходимо чтобы z' было кратнымъ z и n' было такимъ же кратнымъ числа n.

Общее наименьше кратное n' и n обозначимъ черезъ $N = \nu \cdot n = \nu' \cdot n'$. Тогда изъ равенства обѣихъ дробей слѣдуетъ: $\nu' z' = \nu z$, или, если обѣ части равенства умножить на $n \cdot n'$:

$$\nu' n' \cdot n z' = \nu n \cdot n' z;$$

слѣдовательно,

$$n z' = n' z.$$

Но такъ какъ по нашему предположенію z и n числа взаимно простыя, то по гл. I § 11 A IVa, въ силу того, что $n \cdot z'$ дѣлится на z, z' должно дѣлиться на z; итакъ $z' = tz$, отсюда:

$$ntz = n'z,$$

откуда слѣдуетъ:

$$n' = tn,$$

что и доказываетъ наше утвержденіе.

Если, кромѣ того, и z' и n' будутъ взаимно простыми, то и z и n будутъ имѣть одинаковую кратность; z по отношенію къ z', а n къ n'; но послѣднее возможно только въ томъ случаѣ, если $z'=z$ и $n'=n$. Двѣ несократимыя дроби только тогда равны между собой, если отдѣльно равны ихъ числители и знаменатели; а двѣ произвольныя дроби равны только въ томъ случаѣ, если онѣ произошли отъ умноженія на одинаковыя числа числителя и знаменателя одной и той же несократимой дроби.

Изъ опредѣленія равенства или неравенства двухъ дробей непосредственно слѣдуетъ, что 1) каждая дробь, въ которой числитель равенъ знаменателю, имѣетъ значеніе 1; 2) всякая дробь, въ которой числитель больше знаменателя, имѣетъ значеніе, бóльшее 1, и 3) каждая дробь, въ которой числитель меньше знаменателя, имѣетъ значеніе, меньшее 1. Дроби послѣдняго вида называются правильными, а остальныя неправильными.

Дробь $\frac{n_1}{z_1}$, которая получается изъ дроби $\frac{z_1}{n_1}$ перестановкой числителя и знаменателя, называется дробью, обратной дроби $\frac{z_1}{n_1}$; также $\frac{n_2}{z_2}$ — обратной дроби $\frac{z_2}{n_2}$ и т. д.

Изъ данныхъ опредѣленій равенства и неравенства дробей, получается, какъ это не трудно видѣть:

если

1. $\frac{z_1}{n_1}=\frac{z_2}{n_2}$, то и $\frac{n_1}{z_1}=\frac{n_2}{z_2}$,
2. $\frac{z_1}{n_1}>\frac{z_2}{n_2}$, то непремѣнно $\frac{n_1}{z_1}<\frac{n_2}{z_2}$,
3. $\frac{z_1}{n_1}<\frac{z_2}{n_2}$, то непремѣнно $\frac{n_1}{z_1}>\frac{n_2}{z_2}$.

§ 3. Сложеніе и вычитаніе.

Сумму двухъ дробей опредѣляемъ такъ же, какъ и сумму двухъ цѣлыхъ чиселъ, т.-е. какъ число, опредѣляющее множество, которое образуется отъ соединенія множествъ, соотвѣтствующихъ даннымъ дробямъ. Въ силу этого, сумма одноименныхъ дробей есть не что иное, какъ:

$$\frac{Z_1}{N}+\frac{Z_2}{N}+\frac{Z_3}{N}+\cdots=\frac{Z_1+Z_2+Z_3+\cdots}{N}.$$

Дроби, имѣющія различные знаменатели, могутъ быть замѣнены дробями имъ равнозначащими, но имѣющими одинаковый знаменатель. Этимъ опредѣляется сумма любыхъ дробей. Такъ какъ любое цѣлое число равнозначаще дроби съ произвольнымъ знаменателемъ и надлежащимъ образомъ подобраннымъ числителемъ, то и каждое смѣшанное число (сумма цѣлаго и дроби) можетъ быть представлено въ видѣ дроби. Такимъ образомъ, совокупность дробей охватываетъ всѣ цѣлыя, а также и всѣ смѣшанныя числа.

Соотвѣтственно этому и разность двухъ дробей съ одинаковыми знаменателями есть: $\frac{Z_1}{N}-\frac{Z_2}{N}=\frac{Z_1-Z_2}{N}$, а разность двухъ произвольныхъ дробей сейчасъ же можно свести къ разности одноименныхъ дробей. Такъ какъ сложеніе и вычитаніе дробей приводятся къ сложенію и вычитанію цѣлыхъ чиселъ, то всѣ предложенія, доказанныя для сложенія и вычитанія цѣлыхъ чиселъ въ главѣ I, §§ 3 и 4, справедливы и для дробныхъ чиселъ.

§ 4. Умноженіе и дѣленіе.

Произведеніе, въ которомъ множитель есть цѣлое число, согласно главѣ I, § 5 A, означаетъ сумму, въ которой каждое слагаемое равно множимому, а число слагаемыхъ равно множителю; согласно этому имѣемъ:

$$\frac{z}{n}\cdot m=\overbrace{\frac{z}{n}+\frac{z}{n}+\cdots+\frac{z}{n}}^{(m\text{ слагаемыхъ})}=$$

$$=\frac{\overbrace{z+z+z+\cdots+z}^{(m)}}{n}=\frac{z\cdot m}{n}.$$

Наше прежнее опредѣленіе оказывается недостаточнымъ, если множителемъ служитъ дробь; такого рода произведеніе прежде всего не имѣетъ смысла. Какимъ же образомъ, и уже съ давнихъ временъ, стали примѣнять такія произведенія на практикѣ, напр., въ торговомъ дѣлѣ?

Къ наиболѣе простымъ и весьма часто встрѣчающимся задачамъ практическаго характера принадлежатъ вопросы слѣдующаго рода:

1 килограммъ нѣкотораго товара стоитъ m марокъ; сколько будутъ стоить k килограммовъ? или, другими словами: при торговомъ обмѣнѣ килограммъ нѣкотораго товара равноцѣненъ m маркамъ; сколькимъ маркамъ равноцѣнны k килограммовъ? Пред-

положимъ сначала, что k и m будутъ цѣлыми числами, тогда получимъ:

$$k \text{ килогр.} = \overbrace{1 \text{ килогр.} + 1 \text{ килогр.} + \cdots + 1 \text{ килогр.}}^{(k)}$$

Если каждый килограммъ можетъ быть замѣненъ m марками, то можно, вообще говоря[1]), каждый килограммъ написанной суммы замѣнить m марками и, такимъ образомъ, k килограммовъ будутъ равноцѣнны:

$$\overbrace{m \text{ мк.} + m \text{ мк.} + \cdots + m \text{ мк.}}^{(k)}$$

или $(m \cdot k)$ марокъ. Стоимость k килограммовъ есть число марокъ, которое получается въ произведеніи множимаго m и множителя k. Пусть k есть дробное число $\frac{z}{n}$.

И $\frac{z}{n}$ килограммовъ изображаютъ изъ себя нѣкоторую сумму; она состоитъ изъ z слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое отдѣльно представляетъ изъ себя такое количество вещества, n-кратное котораго равнозначно 1 килограмму. Если каждый отдѣльный килограммъ можетъ быть замѣненъ m марками, то, вообще говоря[1]), каждое новое слагаемое можетъ быть замѣнено такой суммой денегъ, n-кратное которой равно m маркамъ, т.-е. $\frac{m}{n}$ марками; слѣдовательно, $\frac{z}{n}$ килограммовъ могутъ быть замѣнены:

$$\overbrace{\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}\right)}^{(z)} \text{ мк.} = \frac{m \cdot z}{n} \text{ мк.}$$

Если въ первомъ случаѣ стоимость k килограммовъ, изъ которыхъ каждый стоитъ m марокъ, обозначимъ черезъ $m \cdot k$, то и для случая $k = \frac{z}{n}$ дробь $\frac{m \cdot z}{n}$ слѣдуетъ разсматривать, какъ значеніе произведенія: $m \cdot \frac{z}{n}$. Согласно этому дадимъ слѣдующее опредѣленіе: произведеніе $m \cdot \frac{z}{n}$ должно обозначать дробь $\frac{m \cdot z}{n}$. Такъ какъ раньше было показано, что $\frac{z}{n} \cdot m = \frac{z \cdot m}{n}$, и по § 5 B, гл. I,

---

[1]) Не всегда: часто цѣна k килограммовъ ниже, чѣмъ k-кратное цѣны одного килограмма, а иногда даже и выше. Рѣшеніе этого вопроса не относится къ ариѳметикѣ. Здѣсь мы отвлекаемся отъ этихъ исключительныхъ случаевъ.

$m \cdot z = z \cdot m$, то мы видимъ, что для произведенія цѣлаго числа на дробное число справедливъ коммутативный законъ [1]).

Подобнымъ же образомъ можно притти къ значенію произведенія и въ томъ случаѣ, когда и множимое и множитель числа дробныя. Если въ нашей задачѣ и m означаетъ дробное число $\frac{\zeta}{\nu}$, то и въ ранѣе указанной суммѣ

$$\overbrace{\frac{1}{n}\text{ килогр.} + \frac{1}{n}\text{ килогр.} + \cdots + \frac{1}{n}\text{ килогр.}}^{(z\text{ слагаемыхъ})}$$

каждое слагаемое слѣдуетъ замѣнить такой суммой денегъ, n-кратная которой будетъ $\frac{\zeta}{\nu}$ марокъ, т.-е. $\frac{\zeta}{\nu \cdot n}$ марками $\left(\text{такъ какъ } \frac{\zeta}{\nu \cdot n} \cdot n = \frac{\zeta n}{\nu \cdot n} = \frac{\zeta}{\nu}\right)$. Слѣдовательно, при обмѣнѣ, $\frac{z}{n}$ килограммовъ эквивалентны

$$\overbrace{\left(\frac{\zeta}{\nu \cdot n} + \frac{\zeta}{\nu \cdot n} + \cdots + \frac{\zeta}{\nu \cdot n}\right)}^{(z)} \text{ маркамъ}$$

---

[1]) Чтобы опредѣлить значеніе произведенія $m \cdot \frac{z}{n}$, непосредственно не имѣющаго смысла, можно исходить также и изъ коммутативнаго закона. Если съ самаго начала установить требованіе, что для опредѣляемаго произведенія остается въ силѣ коммутативный законъ, то подъ $m \cdot \frac{z}{n}$ слѣдуетъ подразумѣвать то же самое, что и подъ $\frac{z}{n} \cdot m$, т.-е. дробь $\frac{z \cdot m}{n} = \frac{m \cdot z}{n}$. По Hankel'ю (Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, § 3) этотъ методъ, при которомъ дѣйствія, непосредственно не имѣющія смысла, для вновь введенныхъ чиселъ опредѣляются такъ, что законы, справедливые для соотвѣтствующихъ операцій надъ ранѣе введенными числами, остаются въ силѣ и для новыхъ чиселъ, называется принципомъ перманентности формальныхъ законовъ; именно Ганкель, по крайней мѣрѣ въ Германіи, впервые его ясно сформулировалъ и примѣнилъ. Этотъ принципъ въ новѣйшей математикѣ играетъ важную роль, и намъ позднѣе придется имъ воспользоваться. Здѣсь для опредѣленія мы этимъ принципомъ не воспользовались, такъ какъ, по нашему мнѣнію, значеніе произведенія, множитель котораго есть дробь, уже давно установлено (это сдѣлано еще до того, какъ стали принимать во вниманіе справедливость теоремы о перестановкѣ сомножителей) и такъ какъ, соотвѣтственно этому, значеніе такого произведенія въ указанномъ ранѣе въ текстѣ смыслѣ можетъ быть сдѣлано (конечно, въ менѣе абстрактной формѣ) доступнымъ ученикамъ квинты (второго класса), которыми вся важность коммутативнаго закона усвоена сознательно быть не можетъ.

т.-е. $\frac{\zeta \cdot z}{\nu \cdot n}$ маркамъ. Если стоимость k килограммовъ, изъ которыхъ каждый въ отдѣльности стоитъ m марокъ, при $k = \frac{z}{n}$ и $m = \frac{\zeta}{\nu}$, должна быть изображена въ видѣ произведенія $(m \cdot k)$ марокъ, то подъ произведеніемъ $\frac{\zeta}{\nu} \cdot \frac{z}{n}$ мы должны разумѣть дробь $\frac{\zeta \cdot z}{\nu \cdot n}$.

Теперь мы покажемъ, что если замѣнить множимое $\frac{\zeta}{\nu}$ равной ей дробью $\frac{\zeta'}{\nu'}$, и множитель $\frac{z}{n}$ равной ей дробью $\frac{z'}{n'}$, то значеніе произведенія не измѣнится. Пусть N есть общее наименьшее кратное чиселъ ν и ν' и $\mathsf{N} = \tau\nu = \tau'\nu'$ и пусть N есть общее наименьшее кратное чиселъ n и n', и $N = tn = t'n'$.

Изъ

$$\frac{\zeta}{\nu} = \frac{\zeta'}{\nu'} \text{ слѣдуетъ } \tau \cdot \zeta = \tau' \cdot \zeta',$$

а изъ

$$\frac{z}{n} = \frac{z'}{n'}, \qquad \text{,,} \qquad t \cdot z = t' \cdot z'.$$

Тогда имѣемъ

$$\frac{\zeta}{\nu} \cdot \frac{z}{n} = \frac{\zeta \cdot z}{\nu \cdot n} = \frac{\tau \cdot \zeta \cdot t \cdot z}{\mathsf{N} \cdot N}$$

и

$$\frac{\zeta'}{\nu'} \cdot \frac{z'}{n'} = \frac{\zeta' \cdot z'}{\nu' \cdot n'} = \frac{\tau' \cdot \zeta' \cdot t' \cdot z'}{\mathsf{N} \cdot N}.$$

Такъ какъ обѣ правыя части равны другъ другу, то получаемъ:

$$\frac{\zeta}{\nu} \cdot \frac{z}{n} = \frac{\zeta'}{\nu'} \cdot \frac{z'}{n'}.$$

Справедливость коммутативнаго закона для произведенія двухъ дробей вытекаетъ непосредственно изъ его справедливости для произведенія двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Также легко обнаруживается и ассоціативный законъ для произведенія трехъ дробей. Чтобы показать наличность дистрибутивнаго закона, приведемъ данныя намъ дроби $\frac{z_1}{n_1}, \frac{z_2}{n_2}, \ldots \frac{z_m}{n_m}$ къ общему знаменателю $N = t_\mu \cdot n_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$.

Тогда мы будемъ имѣть

$$\left(\frac{z_1}{n_1}+\frac{z_2}{n_2}+\cdots+\frac{z_m}{n_m}\right)\cdot\frac{\zeta}{\nu}=\frac{t_1z_1+t_2z_2+\cdots+t_mz_m}{N}\cdot\frac{\zeta}{\nu}=$$

$$=\frac{t_1z_1\zeta+t_2z_2\zeta+\cdots+t_mz_m\zeta}{N\cdot\nu}=$$

$$=\frac{t_1z_1\cdot\zeta}{N\cdot\nu}+\frac{t_2z_2\cdot\zeta}{N\cdot\nu}+\cdots+\frac{t_mz_m\cdot\zeta}{N\cdot\nu}=$$

$$=\frac{z_1}{n_1}\cdot\frac{\zeta}{\nu}+\frac{z_2}{n_2}\cdot\frac{\zeta}{\nu}+\cdots+\frac{z_m}{n_m}\cdot\frac{\zeta}{\nu}.$$

Такъ какъ на основанiи законовъ коммутативнаго, ассоцiативнаго и дистрибутивнаго безъ труда получаются всѣ формулы [1]), приведенныя въ гл. I, § 5, B, C, D, то мы можемъ ихъ считать пригодными для произведенiя и въ томъ случаѣ, если оба множителя—дроби; поэтому мы можемъ надъ такимъ произведенiемъ (хотя оно и не имѣетъ уже того же смысла) выполнять дѣйствiя такъ же, какъ и надъ произведенiемъ цѣлыхъ чиселъ.

Согласно опредѣленiю, данному (гл. I, § 6 A) для частнаго двухъ цѣлыхъ чиселъ, подъ частнымъ двухъ дробей $\frac{z}{n}:\frac{\zeta}{\nu}$ будемъ разумѣть такое число, которое, будучи умножено на дѣлитель $\frac{\zeta}{\nu}$, даетъ дѣлимое $\frac{z}{n}$. Что такое число должно быть единственнымъ, — слѣдуетъ какъ и для цѣлыхъ чиселъ изъ предложенiя: если въ произведенiи одинъ изъ множителей становится больше или меньше, то и произведенiе мѣняется въ томъ же

---

[1]) А также для неравенствъ. Только въ гл. I, § 5 D не вполнѣ ясно высказанное предложенiе, что произведенiе двухъ цѣлыхъ чиселъ никогда не меньше одного изъ сомножителей, не всегда справедливо для произведенiя двухъ дробей. Для сравненiя значенiя произведенiя двухъ дробей $\frac{z}{n}\cdot\frac{\zeta}{\nu}$ съ значенiемъ перваго сомножителя слѣдуетъ замѣнить его дробью $\frac{z\cdot\nu}{n\cdot\nu}$ и будетъ видно, что $\frac{z}{n}\cdot\frac{\zeta}{\nu}\gtreqless\frac{z}{n}$, смотря по тому, будетъ ли $z\cdot\zeta\gtreqless z\cdot\nu$ или $\zeta\gtreqless\nu$, т.-е. упомянутый законъ, справедливый для произведенiя двухъ цѣлыхъ чиселъ, остается въ силѣ лишь для умноженiя на неправильную дробь, между тѣмъ какъ при умноженiи на правильную дробь произведенiе меньше перваго сомножителя. Дѣйствительно, такое отклоненiе долгое время (въ теченiе среднихъ вѣковъ и довольно долго и въ новѣйшее время) доставляло большiя затрудненiя составителямъ ариѳметикъ; на это указываютъ разъясненiя, имѣющiяся въ руководствахъ для устраненiя этого кажущагося противорѣчiя. (Ср. Tropfke. Geschichte der Elementarmathematik. Bd. I. S. 84) — см. русск. переводъ Д. Бема и Р. Струве подъ ред. I. Чистякова. (Ред.).

смыслѣ. Въ то время, какъ въ области цѣлыхъ чиселъ часто (даже въ большинствѣ случаевъ) не существуетъ числа удовлетворяющаго этому требованію, — въ области дробныхъ чиселъ такое число всегда существуетъ, если только исключить случай, когда дѣлитель имѣетъ значеніе 0, такъ какъ всегда имѣетъ мѣсто:

$$\frac{z}{n} : \frac{\zeta}{\nu} = \frac{z \cdot \nu}{n \cdot \zeta}, \text{ потому что } \frac{z \cdot \nu}{n \cdot \zeta} \cdot \frac{\zeta}{\nu} = \frac{z \cdot \nu \cdot \zeta}{n \cdot \zeta \cdot \nu} = \frac{z}{n};$$

слѣдовательно, при дѣленіи одной дроби на другую первая умножается на дробь, обратную второй.

Такъ какъ при равенствѣ двухъ дробей равны и дроби имъ обратныя и такъ какъ при умноженіи двухъ дробей равныя дроби могутъ замѣнять другъ друга, то такую замѣну можно производить и при дѣленіи. Въ силу приведенныхъ (стр. 28, примѣч. 2) соображеній мы можемъ непосредственно заключить, что формулы, данныя въ гл. I, § 6 B, пригодны и въ томъ случаѣ, если встрѣчающіяся тамъ числа суть дроби. Ограниченіе (дѣлимое должно быть кратнымъ дѣлителя), указанное въ концѣ гл. I, § 6 B, въ области дробныхъ чиселъ отпадаетъ.

§ 5. Возведеніе въ степень, извлеченіе корня и логариѳмированіе.

A. Степени, основаніями которыхъ служатъ дроби, а показателями цѣлыя числа.

Въ силу даннаго нами опредѣленія произведенія двухъ дробей устанавливается понятіе о степени съ дробнымъ основаніемъ и цѣлымъ показателемъ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ опредѣленія степени (гл. I, § 7 A) слѣдуетъ

$$\text{(I)} \qquad \left(\frac{z}{n}\right)^e = \overbrace{\frac{z}{n} \cdot \frac{z}{n} \cdots \frac{z}{n}}^{(e \text{ множителей})} = \frac{z^e}{n^e}.$$

Пользуясь этимъ равенствомъ легко показать, что формулы (I) — (V) гл. I § 7 B остаются справедливыми и тогда, когда основаніями степеней служатъ дроби.

Изъ (I) и опредѣленія неравенства двухъ дробей вытекаетъ предложеніе I гл. I § 7 C. Степень правильной дроби есть дробь правильная, а степень дроби неправильной есть неправильная дробь, такъ какъ (ср. прим. 1, стр. 94) при умноженіи на правильную дробь число уменьшается, а при умноженіи на неправильную дробь—увеличивается, (оно остается безъ измѣненія лишь тогда, когда неправильная дробь $=1$). Отсюда далѣе слѣдуетъ, что предложеніе II, гл. I § 7 B, („если $e>f$, то и $a^e>a^f$") справедливо для дробнаго основанія a только въ томъ случаѣ, если числитель больше знаменателя; наоборотъ, при $e>f$ въ томъ случаѣ, если основаніе a есть правильная дробь, получается обратное соотношеніе $a^e<a^f$. Если k означаетъ какое-либо цѣлое или дробное число, то, какъ и въ § 7 C, III главы I, для каждаго цѣлаго значенія числа e имѣетъ мѣсто неравенство

$$(1+k)^e>1+ke.$$

Если g означаетъ какое угодно большое число, то e всегда можетъ быть выбрано такъ, что

$$ke>g$$

$\left(\text{для этого достаточно } e \text{ дать цѣлое значеніе больше } \frac{g}{k}\right)$; отсюда слѣдуетъ, что при надлежащемъ выборѣ e всегда можно достигнуть того, чтобы e-тая степень какого-либо цѣлаго или дробнаго числа, большаго 1, оказалась больше произвольно взятаго числа g. Если найдено значеніе e, при которомъ $(1+k)^e>g$, то это неравенство подавно справедливо и для показателя, значеніе котораго больше найденнаго для e.

Если $\frac{z}{n}$ есть правильная дробь, то $\frac{n}{z}>1$, (ср. § 2. стр. 89). Слѣдовательно, мы можемъ, если g есть произвольно большое число, e всегда выбрать такъ, что $\left(\frac{n}{z}\right)^e>g$, или $\left(\frac{z}{n}\right)^e<\frac{1}{g}$ (ср. § 2, стр. 89).

Если какое-либо произвольно малое число обозначимъ черезъ δ, то всегда можно g подобрать такъ, что $g>\frac{1}{\delta}$, слѣдовательно, $\frac{1}{g}<\delta$; такимъ образомъ, можно отыскать такое число ε, что при $e\geqq\varepsilon$ будетъ $\left(\frac{z}{n}\right)^e<\delta$.

B. Степени съ дробными показателями.

Теперь возникаетъ вопросъ, можетъ ли дробное число служить и показателемъ степени. Ясно, что въ этомъ случаѣ опредѣленіе, данное для степени (гл. I, § 7 A), уже непримѣнимо; произведеніе, которое должно состоять изъ дробнаго числа сомножителей, не имѣетъ смысла; дѣйствительно, и практическія вычисленія не приводятъ непосредственно къ выраженіямъ такой формы. Все назрѣвающая потребность въ полнотѣ теоретическаго построенія ариѳметики привела математиковъ къ необходимости формулы, установленныя первоначально для цѣлыхъ чиселъ, примѣнить для всевозможныхъ другихъ вновь введенныхъ чиселъ и задать себѣ вопросъ, какой надо придать теперь смыслъ этимъ формуламъ.— Детальное изслѣдованіе показываетъ, что соотношенія, данныя для дѣйствій съ корнями (гл. I, § 8 B) имѣютъ большое сходство съ формулами степеней (гл. I, § 7 B), и даже первыя являются частнымъ случаемъ вторыхъ, если станемъ корень разсматривать, какъ степень съ дробнымъ показателемъ. Дѣйствительно, символъ $a^{\frac{1}{n}}$, не имѣющій на первый взглядъ смысла, лишь тогда стоитъ, а съ практической точки зрѣнія и цѣлесообразно, разсматривать какъ степень, если съ нимъ можно оперировать по тѣмъ правиламъ, какъ и со степенями съ цѣлыми показателями, а это станетъ возможнымъ тогда и только тогда, если придать ему такой смыслъ, чтобы формулы гл. I § 7 B остались справедливыми. Между прочимъ должно имѣть мѣсто, слѣдующее соотношеніе:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a;$$

т.-е. $a^{\frac{1}{n}}$ должно означать такое число (если вообще такое существуетъ въ нашей числовой области) n-ая степень котораго равна a; но это число (Гл. I, § 8 A) мы обозначили посредствомъ $\sqrt[n]{a}$. Согласно этому мы опредѣляемъ, что $a^{\frac{1}{n}}$ должно быть корнемъ n-ой степени изъ a; и $a^{\frac{z}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^z = \sqrt[n]{a^z}$ [1]).

---

[1]) Мы придемъ къ тому же опредѣленію степени съ дробнымъ показателемъ, если будемъ основываться на томъ фактѣ, что послѣдовательныя степени числа a

$$a^1,\ a^2,\ a^3, \ldots ,\ a^m$$

образуютъ геометрическій рядъ, въ то время какъ показатели

$$1,\ 2\ 3,\ \ldots\ m$$

являются членами ариѳметическаго ряда. Между каждыми двумя членами по-

Первая наша задача будетъ заключаться въ томъ, чтобы показать, что при такомъ опредѣленіи справедливы всѣ формулы гл. I § 7 B для степеней съ дробными показателями.

$$\text{(I)}\qquad a^{\frac{z}{n}}\cdot a^{\frac{\zeta}{\nu}}=\sqrt[n]{a^z}\cdot\sqrt[\nu]{a^\zeta}=\sqrt[n\cdot\nu]{a^{z\cdot\nu}}\cdot\sqrt[n\cdot\nu]{a^{\zeta\cdot n}}\qquad\text{(Гл. I, § 8 B, IV)}$$
$$=\sqrt[n\nu]{a^{z\nu+\zeta n}}=\qquad\text{(Гл. I, § 8 B, I)}$$
$$=a^{\frac{z\nu+\zeta n}{n\nu}}=a^{\frac{z}{n}+\frac{\zeta}{\nu}}.$$

Также слѣдуетъ:

$$\text{(II)}\qquad a^{\frac{z}{n}}:a^{\frac{\zeta}{\nu}}=a^{\frac{z}{n}-\frac{\zeta}{\nu}}.$$

$$\text{(III)}\qquad a^{\frac{z}{n}}\cdot b^{\frac{z}{n}}=\sqrt[n]{a^z}\cdot\sqrt[n]{b^z}=\sqrt[n]{(ab)^z}=(ab)^{\frac{z}{n}}.$$

слѣдняго легко вставить $(n-1)$ число такъ, чтобы рядъ остался ариѳметическимъ.

$$1, 1+\frac{1}{n}, \ 1+\frac{2}{n}, \ \ldots\ 1+\frac{n-1}{n}, 2, 2+\frac{1}{n}, \ 2+\frac{2}{n}, \ \ldots\ 2+\frac{n-1}{n}, \ 3, \ldots$$

Если, кромѣ того, требуется между двумя членами a^1, a^2 геометрическаго ряда помѣстить $(n-1)$ другихъ $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, такъ, чтобы частное двухъ послѣдовательныхъ членовъ всегда имѣло значеніе q, то должно имѣть мѣсто:

$$\frac{x_1}{a}=q, \frac{x_2}{x_1}=q, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}=q, \frac{a^2}{x_{n-1}}=q.$$

Перемножая эти n равенствъ, получаемъ

$$a=q^n,$$

слѣдовательно,

$$q=\sqrt[n]{a}.$$

Полученный интерполяціей геометрическій рядъ имѣетъ поэтому слѣдующій видъ:

$$a, \ a\sqrt[n]{a}, \ a\left(\sqrt[n]{a}\right)^2, \ldots a\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}, \ a^2, \ldots$$

или

$$a, \ \sqrt[n]{a^{n+1}}, \ \sqrt[n]{a^{n+2}}, \ldots \sqrt[n]{a^{2n-1}}, a^2, \ \ldots$$

Если и теперь геометрическій и ариѳметическій ряды должны соотвѣтствовать другъ другу такъ, что любой членъ геометрическаго ряда можно разсматривать, какъ степень числа a, показатель которой есть соотвѣтствующій членъ ариѳметическаго ряда, то подъ $a^{\frac{n+1}{n}}$ мы должны понимать значеніе $\sqrt[n]{a^{n+1}}$, а подъ $a^{\frac{n+2}{n}}$ значеніе $\sqrt[n]{a^{n+2}}$ и т. д.

а также:

(IV) $a^{\frac{z}{n}} : b^{\frac{z}{n}} = (a:b)^{\frac{z}{n}}$.

(V) $\left(a^{\frac{z}{n}}\right)^{\frac{\zeta}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(a^{\frac{z}{n}}\right)^{\zeta}} = \sqrt[\nu]{\left(\sqrt[n]{a^{z}}\right)^{\zeta}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[n]{a^{z\zeta}}}$ (Гл. I, § 8 B, III).

$$= \sqrt[n\cdot\nu]{a^{z\cdot\zeta}} \quad \text{(Гл. I, § 8 B, V)}$$

$$= a^{\frac{z\cdot\zeta}{n\cdot\nu}} = a^{\frac{z}{n}\cdot\frac{\zeta}{\nu}}.$$

Предложенія (ср. гл. I, § 7 C, I и II) о томъ, что, если

$$a > a' \text{ то } a^{\frac{z}{n}} > a'^{\frac{z}{n}}$$

и если $\frac{z}{n} > \frac{\zeta}{\nu}$, то $a^{\frac{z}{n}} > a^{\frac{\zeta}{\nu}}$, при $a > 1$

и, наоборотъ, $a^{\frac{z}{n}} < a^{\frac{\zeta}{\nu}}$, при $a < 1$,

легко доказываются при помощи соотвѣтствующихъ неравенствъ для цѣлыхъ показателей и опредѣленія, даннаго для $a^{\frac{z}{n}}$.

Если

$$a > 1,$$

то также и

$$a^{\frac{1}{n}} > 1.$$

Пусть теперь

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta_n;$$

слѣдовательно,

$$a = (1 + \delta_n)^n,$$

откуда

$$a > 1 + n\delta_n.$$

Отсюда вытекаетъ

$$\delta_n = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Если для n взять достаточно большое значеніе, то можно достигнуть того, что разность $a^{\frac{1}{n}} - 1$ будетъ произвольно мала.

Если $a < 1$, то

$$\frac{1}{a} > 1, \ \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta'_n,$$

гдѣ δ'_n подборомъ достаточно большого значенія для n можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ, а слѣдовательно:

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\delta'_n} = 1 - \frac{\delta'_n}{1+\delta'_n}.$$

$a^{\frac{1}{n}}$ въ этомъ случаѣ остается всегда < 1, разность же $1 - a^{\frac{1}{n}}$ будетъ произвольно мала при достаточно большомъ значеніи n.

Изъ формулы гл. I § 8 B IV слѣдуетъ, что и въ показателяхъ степеней равныя дроби могутъ замѣнять другъ друга.

Пусть, напримѣръ,

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2}$$

и

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_1 \nu_1}{N}, \quad \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_2 \cdot \nu_2}{N}$$

гдѣ $N = \nu_1 n_1 = \nu_2 n_2$ есть общее наименьшее кратное чиселъ n_1 и n_2; тогда имѣемъ:

$$a^{\frac{z_1}{n_1}} = \sqrt[n_1]{a^{z_1}} = \sqrt[N]{a^{z_1 \nu_1}},$$
$$a^{\frac{z_2}{n_2}} = \sqrt[n_2]{a^{z_2}} = \sqrt[N]{a^{z_2 \nu_2}}$$

а изъ $z_1 \nu_1 = z_2 \nu_2$ получается:

$$a^{\frac{z_1}{n_1}} = a^{\frac{z_2}{n_2}}.$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ основанія могутъ быть и дробными числами, лишь при томъ ограниченіи, что встрѣчающіеся корни должны имѣть смыслъ въ нашей числовой области[1]).

---

[1]) Степени съ дробными показателями были уже введены французскимъ математикомъ (и епископомъ) Oresme (около середины XIV столѣтія) въ его Algorismus proportionum (ср. Cantor II, стр. 128—137). Его способъ обозначенія и письма, конечно, нѣсколько иной, чѣмъ нашъ — позднѣйшій; по существу же, его опредѣленіе вполнѣ совпадаетъ съ нашимъ; онъ даетъ уже и большую часть правилъ умноженія и возведенія въ степень такихъ степеней. Но прошло болѣе 300 лѣтъ, а именно почти вплоть до появленія Ньютоновой Philosophiae naturalis principia mathematica (1687), пока дробные показатели получили полныя права гражданства въ ариѳметикѣ. Математики — голландецъ Стевинъ (L'Arithmétique 1585) и англичанинъ Wallis (Arithmetica infinitorum 1655), хотя и были знакомы съ понятіемъ степени съ дробнымъ показателемъ, но не примѣняли его. Причину этого, повидимому, слѣдуетъ искать въ томъ, что изображеніе корня въ видѣ степени съ дробнымъ показа-

C. Корни.

Корни съ цѣлыми показателями, какъ только что мы сейчасъ выяснили, можно разсматривать какъ степени и пользоваться этимъ при вычисленіяхъ. То же самое относится и къ корнямъ съ дробными показателями. Подъ выраженіемъ $\sqrt[\frac{z}{n}]{a}$ мы должны понимать такое число x, $\left(\frac{z}{n}\right)$-ая степень котораго равна a.

Но изъ того, что $x^{\frac{z}{n}} = a$, слѣдуетъ

$$x = \sqrt[\frac{z}{n}]{a} = a^{\frac{n}{z}}.$$

Намъ, слѣдовательно, нѣтъ необходимости входить въ подробныя изслѣдованія дѣйствій надъ корнями; въ виду дальнѣйшаго примѣненія мы выдѣлимъ лишь нѣкоторые пункты.

I. Въ B, IV стр. 99 дана формула:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

телемъ сперва представляло мало практическихъ выгодъ. Умноженіе и дѣленіе корней съ различными показателями степени, гдѣ было выгодно пользоваться степенями съ дробными показателями, въ разсматриваемыхъ ими задачахъ попадались не особенно часто. Въ гл. V, § 5 A. мы увидимъ, почему въ XVII столѣтіи не было необходимости пользоваться степенями съ дробными показателями при введеніи логариѳмовъ. Преимущество введенія такихъ степеней стало очевиднымъ лишь по изобрѣтеніи и счисленія безконечно малыхъ, когда выяснилось, что производная и интегралъ любого корня изъ какой-либо степени перемѣннаго получаются особенно легко, а именно такъ же, какъ и для степени съ цѣлымъ показателемъ, если корень написать въ видѣ степени съ дробнымъ показателемъ. Особенно большое значеніе для всеобщаго признанія опредѣленія корня, какъ $\left(\frac{1}{n}\right)$-ой степени $(1+x)$, имѣло сдѣланное Ньютономъ открытіе (ср. письмо Ньютона къ Oldenburg'у отъ 24 октября 1676; Cantor III, стр. 69—71): если въ разложеніи $(1+x)^e$, имѣющемъ мѣсто для цѣлыхъ значеній e, замѣнить e дробью $\frac{1}{n}$, то получается рядъ, n-я степень котораго равна $1+x$, а слѣдовательно онъ представляетъ $\sqrt[n]{1+x}$. Въ прикладной математикѣ только въ послѣднее время стали часто пользоваться степенями съ дробными показателями для большей наглядности формулъ размѣрности величинъ въ абсолютной системѣ единицъ.

Слѣдовательно, можно извлечь корень n-ой степени изъ дроби, извлекая его отдѣльно изъ числителя и знаменателя и дѣля первый полученный результатъ на второй. Если b не оказывается n-ой степенью цѣлаго числа, то всегда можно найти такое цѣлое число b', что $b \cdot b' = \beta^n$, гдѣ β есть нѣкоторое цѣлое число. Тогда имѣемъ:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b'}{\beta^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab'}}{\beta};$$

такимъ образомъ: **нахожденіе корня n-ой степени изъ дроби всегда сводится къ вычисленію корня n-ой степени изъ цѣлаго числа и къ дѣленію на цѣлое число.**

II. Если n и C означаютъ произвольныя цѣлыя числа, то, вообще говоря, нѣтъ цѣлаго числа (гл. I, § 8, A), которое равнялось бы $\sqrt[n]{C}$. Теперь легко убѣдиться, что если нѣтъ такого цѣлаго числа, n-ая степень котораго $= C$, то нѣтъ и дроби, обладающей тѣмъ же свойствомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы подобная дробь существовала, то мы ее прежде всего, при помощи сокращенія на общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя, привели бы къ нормальной формѣ $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q числа взаимно простыя и q отлично отъ 1.

Тогда, по § 11 A, IV b. гл. I, и p^n и q^n должны быть числами взаимно-простыми, а изъ

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n} = C$$

слѣдовало бы, что p^n и q^n имѣютъ общій, отличный отъ единицы, дѣлитель q^n. Итакъ, наше предположеніе приводитъ къ противорѣчію. Слѣдовательно, введеніе дробей не расширяетъ области извлекаемыхъ корней.

III. Теперь сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній о наиболѣе часто встрѣчающемся корнѣ, а именно—квадратномъ. Если вообще не имѣется цѣлаго, а, слѣдовательно, какъ сейчасъ показано, и дробнаго числа, квадратъ котораго равенъ произвольно данному цѣлому числу C, то мы все-таки знаемъ способъ (гл. I, § 10 G; стр. 52—55), при помощи котораго можемъ найти наибольшее цѣлое число a, квадратъ котораго меньше C, другими словами, при помощи указаннаго способа мы всегда можемъ найти такое цѣлое число, что

$$a^2 \leqq C < (a+1)^2.$$

Остатокъ R, который получается при такомъ вычисленіи, равенъ разности $C - a^2$; сравненіе цѣлыхъ чиселъ R и a даетъ возможность безъ затрудненій заключить C между квадратами двухъ чиселъ, разность между которыми равна $\frac{1}{2}$. А именно, если $R \leqq a$, то и подавно $R < a + \frac{1}{4}$, слѣдовательно,

$$(a+\tfrac{1}{2})^2 = a^2 + a + \tfrac{1}{4} > a^2 + R,$$

поэтому

$$a^2 \leqq C < (a+\tfrac{1}{2})^2.$$

Если же $R > a$, а слѣдовательно, $R \geqq a + 1$, то $R > a + \frac{1}{4}$, и отсюда

$$(a+\tfrac{1}{2})^2 = a^2 + a + \tfrac{1}{4} < a^2 + R,$$

а поэтому

$$(a+\tfrac{1}{2})^2 < C < (a+1)^2.$$

Мы можемъ поступать такъ и дальше и безъ труда найти два числа, которыя отличаются только на $\frac{1}{n}$ (гдѣ n произвольное цѣлое число) и между квадратами которыхъ заключено число C. Пусть эти оба числа написаны въ видѣ дробей со знаменателемъ n; обозначимъ ихъ числители соотвѣтственно черезъ z и $z+1$; тогда мы можемъ написать

$$\left(\frac{z}{n}\right)^2 \leqq C < \left(\frac{z+1}{n}\right)^2.$$

Эти неравенства существуютъ тогда и только тогда, если

$$z^2 \leqq C \cdot n^2 < (z+1)^2.$$

Итакъ, способъ, указанный въ § $10G$, гл. I достаточно примѣнить теперь къ цѣлому числу Cn^2 и найденныя числа z и $z+1$ раздѣлить на n.

Такъ, напримѣръ, получаемъ при $C = 3$, $n = 12$, $z = 20$:

$$\left(\frac{20}{12}\right)^2 < 3 < \left(\frac{21}{12}\right)^2.$$

О томъ, особенно важномъ случаѣ, когда n оказывается степенью основанія 10, мы будемъ говорить подробнѣе въ слѣдующей главѣ.

Если C есть смѣшанное число $G+\varepsilon$, гдѣ G наибольшее цѣлое число, содержащееся въ C, а слѣдовательно, ε означаетъ правильную дробь, то изъ

$$a^2 \leqq G < (a+1)^2,$$

слѣдуютъ неравенства

$$a^2 < C < (a+1)^2 \text{ [1]}.$$

Первое изъ двухъ послѣднихъ неравенствъ очевидно. Чтобы убѣдиться въ правильности 2-го, разсуждаемъ такъ: изъ $G<(a+1)^2$ непосредственно вытекаетъ

$$G+1 \leqq (a+1)^2,$$

и отсюда:

$$C = G+\varepsilon < (a+1)^2.$$

Если требуется найти два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, между квадратами которыхъ должно быть заключено смѣшанное число C, то способъ, указанный въ § 10 G, гл. I, слѣдуетъ примѣнить лишь къ наибольшему числу G, содержащемуся въ числѣ C. Какъ и раньше, мы видимъ, что въ зависимости отъ того, будетъ ли остатокъ

$$R = G - a^2 \gtreqless a,$$

то и

$$C = G + \varepsilon \gtreqless (a+\tfrac{1}{2})^2.$$

Если $R=a$, то имѣемъ:

$$G+\varepsilon \gtreqless \left(a+\frac{1}{2}\right)^2,$$

въ зависимости отъ того, будетъ ли $\varepsilon \gtreqless \frac{1}{4}$.

Какъ результатъ всѣхъ соображеній, приведенныхъ въ этомъ отдѣлѣ III, можно установить слѣдующее правило:

Если дано произвольное дробное, цѣлое, или смѣшанное число, и требуется найти два числа, которыя отличаются другъ отъ друга только на $\frac{1}{n}$ (гдѣ n есть произвольное число) и между квадратами которыхъ заключено C, то способъ, указан-

[1] Какъ легко видѣть, аналогичныя заключенія справедливы и для любой степени.

ный въ § 10, G, гл. I, слѣдуетъ примѣнить къ наибольшему цѣлому числу G, заключающемуся въ произведенiи $C \cdot n^2$ и опредѣлить цѣлое число z такъ, чтобы

$$z^2 \leqq G < (z+1)^2,$$

тогда $\frac{z}{n}$ и $\frac{z+1}{n}$ будутъ искомыми числами; при достаточно большомъ значенiи n разность между ними можетъ быть сдѣлана произвольно малой.

Сравненiемъ z и остатка $R = G - z^2$ можно непосредственно рѣшить вопросъ, будетъ ли

$$C \gtreqless \left(\frac{z+\frac{1}{2}}{n}\right)^2.$$

Пусть, напримѣръ, если $C = 2\frac{2}{3}$ и если выбрать $n = 25$, то

$$C \cdot n^2 = \tfrac{8}{3} \cdot 625 = 1666\tfrac{2}{3}, \quad G = 1666,$$

слѣдовательно $z = 40$.

Поэтому:

$$\left(\frac{40}{25}\right)^2 < 2\tfrac{2}{3} < \left(\frac{41}{25}\right)^2,$$

и такъ какъ $R = G - z^2 = 66 > z$, то и

$$\left(\frac{40\frac{1}{2}}{25}\right)^2 < 2\tfrac{2}{3} < \left(\frac{41}{25}\right)^2.$$

Увеличивая число n, мы можемъ разность между квадратами:

$$\left(\frac{z+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{z}{n}\right)^2 = \frac{2z+1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(2\frac{z}{n} + \frac{1}{n}\right),$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ и каждую изъ разностей

$$C - \left(\frac{z}{n}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{z+1}{n}\right)^2 - C$$

сдѣлать меньше всякаго заданнаго напередъ сколь угодно малаго числа. Если, вообще говоря, въ нашей области чиселъ мы не можемъ извлечь квадратнаго корня изъ любого даннаго цѣлаго или дробнаго числа, то все-таки есть возможность указать такiя дроби, квадраты которыхъ произвольно мало отличаются отъ C. Въ практическихъ приложенiяхъ ариѳметики, гдѣ по существу дѣла не требуется абсолютной точности, а допустимая ошибка не должна превышать границы, опредѣляемой характеромъ самого заданія, почти всегда возможно при надлежащемъ выборѣ n замѣнить C однимъ изъ слѣдующихъ чиселъ: $\left(\frac{z}{n}\right)^2$ или $\left(\frac{z+1}{n}\right)^2$, въ зависимости отъ того, будетъ ли $C \lesseqgtr \left(\frac{z+\frac{1}{2}}{n}\right)^2$; и въ соотвѣтствіи съ этимъ не существующій въ нашей области чиселъ корень $\sqrt{C}$ замѣнить или черезъ $\frac{z}{n}$, или черезъ $\frac{z+1}{n}$.

Подобнаго рода разсужденія примѣнимы и къ корнямъ съ любыми показателями. Къ этому вопросу мы еще вернемся при изложеніи вопроса о корняхъ изъ систематическихъ дробей, почти исключительно примѣняемыхъ на практикѣ (Ср. гл. III, § 3 F).

D. Логариѳмы.

I. Послѣ введенія дробей въ качествѣ основаній и показателей степеней, остается установить понятіе логариѳма дроби при дробномъ основаніи; мы называемъ $\frac{p}{q}$ логариѳмомъ числа $\frac{z}{n}$, при основаніи $\frac{a}{b}$, а если $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{z}{n}$; напримѣръ $^{(\frac{4}{9})}\log\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, такъ какъ $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

Такъ какъ каждая (цѣлая или дробная) степень правильной дроби даетъ въ результатѣ тоже правильную дробь, а неправильной дроби — дробь неправильную, то дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{z}{n}$ должны быть или обѣ меньше единицы, или обѣ больше единицы. Но даже и при выполненіи этого условія, вообще говоря, нельзя опредѣлить $\frac{p}{q}$ при произвольно данныхъ дробяхъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{z}{n}$ такъ, чтобы

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{z}{n}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, при наличности этого равенства (при чемъ мы можемъ впередъ предполагать, что a и b, а также z и n суть числа первыя между собой) путемъ простыхъ преобразованій мы получили бы:

$$a^p \cdot n^q = b^p \cdot z^q.$$

Такъ какъ z и n числа взаимно простыя, то то же имѣетъ мѣсто и для z^q и n^q (глава I, § 11 A, IV b); на основаніи § 11 A, IV a, гл. I a^p должно дѣлиться на z^q, а такъ какъ и a^p и b^p тоже числа взаимно простыя, то на томъ же основанiи z^q должно дѣлиться на a^p; т.-е. $a^p = z^q$. Существованiе же такого равенства несомнѣнно невозможно, если a и z не содержатъ одинаковыхъ простыхъ множителей (гл. I, § 11, С).

Слѣдовательно, въ нашей числовой области произвольное число при любомъ основанiи не имѣетъ, вообще говоря, логариөма. Въ какомъ смыслѣ можно и въ области цѣлыхъ чиселъ говорить о лагориөмахъ и вычислять съ ними, мы изложимъ подробнѣе въ гл. V, § 5 В.

II. Справедливость логариөмическихъ формулъ § 8 С, I и II, гл. I, для того случая, когда входящiя въ нихъ буквы обозначаютъ и дроби, вытекаетъ изъ того, что справедливость формулъ степеней, на основанiи которыхъ выводятся и логариөмическiя формулы, доказаны уже для дробей (отд. А и В этого §).

Теперь остается только показать, что и въ формулѣ (гл. I, § 8 С, III).

$$^{(a)}\log(p^r) = r\cdot {}^{(a)}\log p$$

r можетъ быть равно дроби $\frac{z}{n}$.

Пусть

$$^{(a)}\log p = x, \text{ слѣдовательно, } a^x = p,$$

гдѣ a, p, x могутъ быть цѣлыми или дробными числами.

Если возведемъ предыдущее равенство въ степень $\frac{z}{n}$, то получимъ:

$$a^{\frac{z}{n}\cdot x} = p^{\frac{z}{n}}$$

и поэтому:

$$^{(a)}\log p^{\frac{z}{n}} = \frac{z}{n}\cdot x = \frac{z}{n}\cdot {}^{(a)}\log p.$$

Эти формулы, конечно, имѣютъ смыслъ лишь для тѣхъ значенiй основанiя и числа, для которыхъ въ нашей числовой области имѣются логариөмы.

ГЛАВА III.

Систематическія дроби.

§ 1. Опредѣленіе и способъ изображенія систематическихъ дробей.

Особенный интересъ представляютъ и заслуживаютъ особаго разсмотрѣнія дроби, у которыхъ числитель есть систематическое цѣлое число (ср. гл. I, § 10), а знаменатель степень основанія системы, т.-е. дроби вида:

$$a = \frac{a_\mu g^\mu + a_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + a_1 g + a_0}{g^\nu} = \frac{A}{g^\nu},$$

гдѣ $a_\lambda < g$, для $\lambda = 0, 1, \cdots \mu$.

Такія дроби называются систематическими, и въ частномъ случаѣ $g = 10$ — десятичными [1]). Въ послѣднее время, благодаря

---

[1]) Такъ какъ большинство разсужденій почти такъ же просто построить для произвольнаго g, какъ и для $g = 10$, то мы въ общемъ оставимъ g неопредѣленнымъ и лишь для примѣровъ предпочтемъ случай $g = 10$. Систематическія дроби, для которыхъ g не было равно 10-ти, долгое время примѣнялись на практикѣ. Вавилоняне для систематическаго построенія прежде всего цѣлыхъ чиселъ брали основаніе $g = 60$ (ср. стр. 5, прим. 2). У нихъ были установлены особыя названія для 60 (soss) и для 60^2 (sar) и соотвѣтственно этому они образовывали также и подраздѣленія этой единицы съ такимъ же знаменателемъ. Около 180 г. до Р. Х. эти сексагезимальныя дроби вошли и въ греческую науку, а арабскіе и христіанскіе ученые пользовались ими, главнымъ образомъ, для астрономическихъ вычисленій, въ теченіе всѣхъ среднихъ вѣковъ, слѣдовательно въ тѣ времена, когда 10 уже давно стало основаніемъ системы цѣлыхъ чиселъ. Понятно, что такого рода непослѣдовательность была нецѣлесообразна. Тѣмъ не менѣе прошло чрезвычайно много времени до тѣхъ поръ, пока не былъ совершонъ окончательный переходъ отъ сексагезимальнаго дѣленія къ десятичному. Смѣшеніе обоихъ принциповъ встрѣчается часто еще въ XV столѣтіи, и только въ концѣ XVI столѣтія французъ François Viète въ своемъ Canon mathematicus (1579), голландецъ Simon Stevin въ своемъ трудѣ La Disme (1585) и нѣмецъ-швейцарецъ Joost Bürgi въ

введенію десятичнаго дѣленія мѣръ, монетъ и вѣса, при практическихъ вычисленіяхъ можно пользоваться исключительно десятичными дробями; въ самомъ дѣлѣ, введены только такія монеты и вѣса̀, 10, 100, 1000 кратныя которыхъ равнозначащи основнымъ единицамъ или представляютъ кратныя такихъ монетъ и вѣсовъ; а кратныя другія дроби, кромѣ десятичныхъ, не имѣютъ, слѣдовательно, реальнаго примѣненія въ области денегъ и вѣса.

При преобразованіи систематической дроби a приходится различать два случая:

1. $\mu \geqq \nu$, тогда

$$a = a_\mu g^{\mu-\nu} + a_{\mu-1} g^{\mu-\nu-1} + \cdots + a_\nu + \frac{a_{\nu-1}}{g} + \frac{a_{\nu-2}}{g^2} + \cdots + \frac{a_0}{g^\nu};$$

2. $\mu < \nu$; тогда

$$a = \frac{a_\mu}{g^{\nu-\mu}} + \frac{a_{\mu-1}}{g^{\nu-\mu+1}} + \cdots + \frac{a_0}{g^\nu}.$$

Въ первомъ случаѣ a является суммой цѣлаго систематическаго числа и ряда дробей, знаменатели которыхъ являются послѣдовательными степенями g, а числители меньше g; во второмъ случаѣ a состоитъ только изъ суммы такихъ дробей.

Цѣлое систематическое число $a_\lambda g^\lambda + a_{\lambda-1} g^{\lambda-1} + \cdots + a_1 g + a_0$ мы можемъ, не опасаясь недоразумѣній, написать въ сокращенной формѣ: $a_\lambda a_{\lambda-1} \cdots a_1 a_0$ (ср. гл. I, § 10 А); при этомъ уста-

своей Arithmetica (1592) рѣшительно и окончательно перешли къ десятичнымъ дробямъ. Способъ изображенія послѣднихъ у этихъ авторовъ довольно близко походитъ на современный. Болѣе подробно смотри объ этомъ у Cantor, Vorlesungen II, стр. 583, стр. 615—617 и у J. Tropfke Geschichte der Elementarmathematik I, стр. 86—93. (Русск. пер. Д. Бема и Р. Струве, ред. I. Чистякова). Десятичное дѣленіе мѣръ длины, монетъ и мѣръ вѣса, котораго требовалъ уже Simon Stevin, какъ послѣдовательное продолженіе десятичной числовой системы, было введено прежде всего во Франціи (декретомъ отъ 24 іюля 1799). Послѣ того какъ нѣкоторыя другія страны уже раньше присоединились къ этой системѣ мѣръ, этому же послѣдовалъ сѣверо-германскій союзъ въ 1866 г. и вся Германія въ 1871/72 г. Исторія ариѳметики указываетъ еще и на другой видъ систематическихъ дробей. У римлянъ была опредѣленная двѣнадцатиричная система; у нихъ были особыя названія для дробей со знаменателями 12, 24, 48, 72, 144, 288. Эти названія относились первоначально лишь къ соотвѣтственнымъ долямъ *as*'а, мѣдной монеты опредѣленнаго вѣса, но затѣмъ перешли и къ долямъ другихъ вещей. Въ первой половинѣ среднихъ вѣковъ при практическихъ вычисленіяхъ часто пользовались этой двѣнадцатиричной системой. Ср. Cantor, Vorlesungen I, стр. 489 и Tropfke, Gesch. d. Elementarmathematik I, стр. 77.

навливается, что a_λ, $a_{\lambda-1}, \cdots a_1$, a_0, означаютъ коэффиціенты послѣдовательныхъ степеней g, расположенныхъ въ нисходящемъ порядкѣ, и что каждая отсутствующая степень g замѣняется знакомъ 0, а послѣдняя цыфра означаетъ число единицъ.

Этимъ способомъ мы можемъ пользоваться и при изображеніи систематическихъ дробей. Для этого достаточно только къ цыфрѣ, изображающей единицы, приписать числители дробей, имѣющихъ знаменателями $g, g^2, g^3 \cdots$, не мѣняя ихъ порядка, при соблюденіи требованія, что при отсутствіи одной изъ такихъ дробей, на мѣстѣ ея числителя ставится нуль. Очевидно, что послѣдняя цифра такого выраженія уже не будетъ означать единицъ; нельзя также утверждать, что она является числителемъ какой-либо изъ дробей, имѣющихъ знаменателемъ g^6 или g^{10} и т. д., если мы допускаемъ, что показатель степени g можетъ имѣть какое угодно большое значеніе. Нашей цѣли указать, какой степени g или $\frac{1}{g}$ соотвѣтствуетъ то или другое a, можно достигнуть, отмѣтивъ какимъ-либо значкомъ коэффиціентъ нѣкоторой, опредѣленной степени g, которая должна, конечно, встрѣчаться во всякой систематической дроби. Для этой цѣли избрали цыфру единицъ и отмѣтили ее поставленной послѣ нея запятой. Въ томъ случаѣ, если систематическая дробь не содержитъ цѣлой части, а начинается (см. случай 2, стр. 109) съ $\frac{a^\mu}{g_{\nu-\mu}}$, приходится, для возможности поставить запятую (чтобы можно воспользоваться введеннымъ знакомъ), мѣсто единицъ, а, слѣдовательно, и всѣхъ числителей отсутствующихъ дробей со знаменателями g^1, $g^2, \cdots g^{\nu-\mu-1}$, обозначать нулями. Въ первомъ случаѣ, систематическую дробь α мы написали бы такъ:

$$\overline{a_\mu a_{\mu-1} \cdots a_\nu;\ a_{\nu-1} a_{\nu-2} \cdots a_0},$$

а во второмъ случаѣ

$$0,\ \overbrace{00 \cdots 0}^{(\nu-\mu-1)\text{ нулей}}\ a_\mu a_{\mu-1} \cdots a_0.$$

Такъ какъ

$$\alpha = \frac{a_\mu g^\mu + a_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + a_1 g + a_0}{g^\nu} = \frac{A}{g^\nu}$$

можно разсматривать, какъ результатъ дѣленія числа A на g^ν, то въ такомъ представленіи систематической дроби скрыто правило: чтобы данное цѣлое число раздѣлить на ν-ую степень основанія g, слѣдуетъ отдѣлить запятой ν знаковъ въ числѣ A, при чемъ въ случаѣ $\nu > \mu$ это слѣдуетъ сдѣлать послѣ того, какъ передъ первой цыфрой числа a будетъ поставлено нужное число (именно $\nu - \mu$) нулей.

Систематическая дробь a не измѣняетъ своего значенія, если присоединить къ ней

$$\frac{0}{g^{\nu+1}} + \frac{0}{g^{\nu+2}} + \frac{0}{g^{\nu+3}} + \cdots$$

Поэтому простымъ приписываніемъ нулей систематическую дробь со знаменателемъ g^ν можно обратить въ другую, имѣющую знаменателемъ g въ болѣе высокой степени, и, такъ какъ общій знаменатель нѣсколькихъ систематическихъ дробей съ основаніемъ g, очевидно, есть наивысшая изъ степеней g, встрѣчающихся въ качествѣ знаменателя, то систематическія дроби необыкновенно легко, простымъ приписываніемъ нулей, приводятся къ общему знаменателю. А съ дробями, имѣющими общій знаменатель, можно производить дѣйствія, какъ съ цѣлыми числами; производя дѣйствія, можно отвлечься отъ отношенія къ единицѣ и разсматривать дроби съ одинаковымъ знаменателемъ, какъ полученныя путемъ отвлеченія отъ равноцѣнныхъ вещей. Въ томъ обстоятельствѣ, что систематическія дроби находятся въ такой близости къ цѣлымъ числамъ (такъ, что въ нѣкоторыхъ учебникахъ ихъ называютъ десятичными числами), заключается ихъ главное преимущество и основаніе простоты вычисленій съ ними.

§ 2. Сравненіе систематическихъ дробей.

А. Каждая систематическая дробь, не содержащая цѣлой части, напр.,

$$a = \frac{a_\mu}{g^{\nu-\mu}} + \frac{a_{\mu-1}}{g^{\nu-(\mu-1)}} + \cdots + \frac{a_1}{g^{\nu-1}} + \frac{a_0}{g^\nu}$$
$$(\nu > \mu),$$

меньше единицы, т.-е. дробь правильная. Въ самомъ дѣлѣ, если выполнимъ сложеніе дробей, то, на основаніи § 10 А, гл. I, стр. 41, слѣдуетъ, что въ

$$\frac{a_\mu g^\mu + a_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + a_1 g + a_0}{g^\nu},$$

такъ какъ $\nu > \mu$, числитель меньше знаменателя.

B. Двѣ правильныя систематическія дроби α и β всегда можно представить себѣ въ видѣ дробей, съ общимъ знаменателемъ g^ν:

$$\alpha = \frac{a_\mu g^\mu + a_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + a_1 g + a_0}{g^\nu} = \frac{A}{g^\nu},$$

$$\beta = \frac{b_\mu g^\mu + b_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + b_1 g + b_0}{g^\nu} = \frac{B}{g^\nu},$$

здѣсь, конечно, отдѣльные a и b могутъ быть нулями.

Согласно § 10 A, гл. I, оба числителя A и B, а, слѣдовательно, и дроби α и β, могутъ быть тогда и только тогда равны другъ другу, если каждое a равно b съ соотвѣтствующимъ индексомъ. Слѣдовательно, каждая дробь можетъ быть написана только однимъ образомъ, какъ систематическая дробь при данномъ основаніи g [1]), если исключить приписываніе къ ней нулей, которые можно присоединить къ любой систематической дроби, не мѣняя при этомъ ея значенія.

Далѣе, по § 10 A, гл. I, $A \gtrless B$, а отсюда и $\alpha \gtrless \beta$ въ зависимости отъ того, будетъ ли первое a (считая слѣва), отличное отъ соотвѣтствующаго b, больше или меньше, чѣмъ это b.

C. Пусть k и l означаютъ цѣлыя числа, α и β какія-либо правильныя систематическія дроби, тогда, если $k \gtrless l$, то и $k + \alpha \gtrless l + \beta$, если же $k = l$, то $k + \alpha \overset{>}{\underset{<}{=}} l + \beta$, въ зависимости отъ того, будетъ ли $\alpha \overset{>}{\underset{<}{=}} \beta$.

§ 3. Дѣйствія надъ систематическими дробями.

A. Сложеніе.

Любыя дроби можно сложить (см. гл. II, § 3), приведя ихъ къ общему знаменателю и составивъ сумму числителей; сложеніе систематическихъ дробей, данныхъ въ ихъ сокращенной записи, можетъ быть такимъ образомъ сведено къ сложенію цѣлыхъ— (ср. гл. I, § 10 C) систематическихъ чиселъ, если приписываніемъ нулей уравнять число десятичныхъ знаковъ послѣ запятой и затѣмъ произвести сложеніе, не обращая вниманія на запя-

[1]) Мы пока говоримъ лишь о систематическихъ дробяхъ, состоящихъ изъ конечнаго числа членовъ.

тую; въ полученной суммѣ слѣдуетъ отдѣлить запятой справа столько знаковъ, сколько ихъ было въ каждомъ слагаемомъ (послѣ приведенія къ общему знаменателю). Для примѣненія правила на практикѣ его можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ: систематическія дроби, данныя для сложенія, слѣдуетъ расположить такъ, чтобы запятыя и цыфры одинаковаго помѣстнаго значенія были расположены другъ подъ другомъ по вертикали, затѣмъ произвести сложеніе, какъ это дѣлается съ цѣлыми числами, и въ полученномъ результатѣ поставить запятую подъ запятыми слагаемыхъ.

B. **Вычитаніе** выполняется аналогично сложенію.

C. **Произведеніе** двухъ систематическихъ дробей

$$\alpha = \frac{A}{g^{\nu_1}} \text{ и } \beta = \frac{B}{g^{\nu_2}},$$

гдѣ A и B означаютъ цѣлыя систематическія числа, равно

$$\alpha \cdot \beta = \frac{A \cdot B}{g^{\nu_1 + \nu_2}}.$$

Слѣдовательно, чтобы перемножить двѣ систематическія дроби, данныя въ ихъ сокращенной записи, слѣдуетъ опустить запятыя, перемножить образовавшіяся такимъ образомъ цѣлыя числа, согласно § 10 E гл. I, и въ полученномъ произведеніи отдѣлить запятой справа столько цыфръ (именно $\nu_1 + \nu_2$), сколько десятичныхъ знаковъ послѣ запятой въ обоихъ сомножителяхъ вмѣстѣ. Конечно, это правило относится и къ тому случаю, когда одинъ изъ сомножителей, напр. β есть цѣлое число: тогда приходится принять значеніе ν_2 равнымъ 0 и въ произведеніи отдѣлить ν_1 десятичныхъ знаковъ.

Въ частномъ случаѣ, когда $\beta = g^{\mu}$, то $\alpha \cdot \beta = \frac{A \cdot g^{\mu}}{g^{\nu_1}}$, слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= \frac{A}{g^{\nu_1 - \mu}}, \text{ если } \mu < \nu_1 \\ &= A, \quad \text{если } \mu = \nu_1 \\ &= A \cdot g^{\mu - \nu_1} \text{ если } \mu > \nu_1. \end{aligned}$$

Эти три случая можно объединить въ общемъ правилѣ: чтобы умножить систематическую дробь на μ-тую степень основанія, слѣдуетъ перенести запятую черезъ μ знаковъ вправо, а если имѣется меньше, чѣмъ μ десятичныхъ знаковъ, то отбросить запятую и приписать столько нулей, сколько единицъ въ разности между числомъ μ и числомъ десятичныхъ знаковъ.

D. Дѣленіе.

Частное отъ дѣленія двухъ систематическихъ дробей

$$\alpha = \frac{A}{g^{\nu_1}} \text{ и } \beta = \frac{B}{g^{\nu_2}} \text{ есть } \alpha : \beta = \frac{A \cdot g^{\nu_2}}{B \cdot g^{\nu_1}}.$$

Послѣдняя дробь, послѣ сокращенія числителя и знаменателя на ихъ общій наибольшій дѣлитель, можетъ быть приведена къ виду $\frac{z}{n}$, гдѣ z и n цѣлыя числа, не имѣющія общаго дѣлителя. Такимъ образомъ дѣленіе систематическихъ дробей сводится къ дѣленію двухъ цѣлыхъ чиселъ. Въ случаѣ, если $A \cdot g^{\nu_2}$ не дѣлится нацѣло на $B \cdot g^{\nu_1}$, то частное $\alpha : \beta = \frac{z}{n}$ не будетъ числомъ цѣлымъ; такимъ образомъ возникаетъ вопросъ, нельзя ли эту дробь изобразить въ видѣ систематической. Если

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \cdots + \frac{q_{\rho-1}}{g^{\rho-1}} + \frac{q_\rho}{g^\rho},$$

гдѣ q_0 можетъ обозначать любое цѣлое число (включая и нуль), а $q_1, q_2, \cdots q_\rho$ цѣлыя числа, меньшія g, и ρ имѣетъ нѣкоторое опредѣленное цѣлое значеніе, то, умножая обѣ части равенства на g^ρ, получимъ:

$$\frac{z \cdot g^\rho}{n} = q_0 \cdot g^\rho + q_1 g^{\rho-1} + q_2 g^{\rho-2} + \cdots + q_{\rho-1} \cdot g + q_\rho.$$

Такъ какъ правая часть полученнаго равенства представляетъ изъ себя цѣлое число, то zg^ρ должно дѣлиться на n.

Обратно, если можно найти такую степень g, напримѣръ съ показателемъ ρ, чтобы g^ρ было кратнымъ n, то можно положить:

$$\alpha : \beta = \frac{z}{n} = \frac{\frac{zg^\rho}{n}}{g^\rho}$$

т.-е. равнымъ систематической дроби.

Частное $\alpha : \beta = \frac{z}{n}$ можетъ быть представлено въ видѣ систематической дроби съ основаніемъ g тогда и только тогда, если существуетъ такая степень числа g, напримѣръ g^ρ, для которой произведеніе zg^ρ дѣлится на n. На основаніи § 11 A, IV a, гл. I (такъ какъ z и n числа взаимно простыя), для выполненія нашего условія необходимо и достаточно, чтобы g^ρ было кратнымъ n; это послѣднее тогда и только тогда имѣетъ мѣсто, если n не содержитъ простыхъ множителей, не входящихъ въ g. Для $g=10$, n, на основаніи только что сказаннаго, должно имѣть видъ $2^{\nu_1}\cdot 5^{\nu_2}$, гдѣ ν_1 и ν_2 какія-либо цѣлыя числа (включая и нуль).

Если имѣется степень g (и наименьшая изъ такихъ степеней пусть будетъ имѣть показатель ρ), произведеніе которой на z дѣлится безъ остатка на n, то для обращенія[1] $\frac{z}{n}$ въ систематическую дробь, слѣдуетъ, согласно указанному въ § 10 F, гл. I способу, раздѣлить z на n; пусть при такомъ дѣленіи получается частное q_0 $(\geqq 0)$ и остатокъ r_0 $(< n)$, тогда имѣемъ:

$$z = q_0 n + r_0$$

или

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{r_0}{n}.$$

Полагая дальше $\frac{r_0}{n} = \frac{1}{g} \cdot \frac{r_0 g}{n}$, вычисляемъ теперь $r_0 g : n$, т.-е. приписываемъ къ r_0 нуль и образовавшееся число $r_0 g$ дѣлимъ на n; если это дѣленіе даетъ частное q_1 $(0 \leqq q_1 < g)$ и остатокъ r_1 $(< n)$, то имѣемъ

$$\frac{r_0}{n} = \frac{1}{g}\left(q_1 + \frac{r_1}{n}\right)$$

и

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{1}{g} \cdot \frac{r_1}{n}.$$

Къ вновь полученному остатку r_1 приписываемъ опять нуль и полученное число $r_1 g$ дѣлимъ вновь на n и пусть имѣемъ:

$$\frac{r_1 g}{n} = q_2 + \frac{r_2}{n} \qquad (0 \leqq q_2 < g,\ r_2 < n);$$

[1]) Въ этомъ случаѣ безразлично, имѣютъ ли z и n общихъ дѣлителей или нѣтъ.

тогда:

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \frac{1}{g^3} \cdot \frac{r_2 g}{n},$$

Поступая такимъ образомъ и дальше, получимъ наконецъ:

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \cdots + \frac{q_{\rho-1}}{g^{\rho-1}} + \frac{1}{g^\rho} \cdot \frac{r_{\rho-1} \cdot g}{n}$$

Умноженіемъ на g^ρ получаемъ:

$$\frac{z \cdot g^\rho}{n} = q_0 g^\rho + q_1 g^{\rho-1} + q_2 g^{\rho-2} + \cdots + q_{\rho-1} g + \cdot \frac{r_{\rho-1} \cdot g}{n}$$

Такъ какъ лѣвая часть, согласно нашему предположенію, есть число цѣлое, и каждое изъ ρ первыхъ слагаемыхъ правой части, очевидно, есть число цѣлое, то то же самое мы можемъ сказать и о послѣдней дроби $\frac{r_{\rho-1} \cdot g}{n}$, т.-е., если къ остатку $r_{\rho-1}$ приписать нуль, то дѣленіе на n выполняется нацѣло, и если дробь $\frac{r_{\rho-1} \cdot g}{n} = q_\rho$, то для $\frac{z}{n}$ имѣемъ разложеніе:

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \cdots + \frac{q_{\rho-1}}{g^{\rho-1}} + \frac{q_\rho}{g^\rho} =$$
$$= \overline{q_0, q_1 q_2 \cdots q_{\rho-1} q_\rho}.$$

Мы получимъ систематическую дробь непосредственно въ сокращенной ея записи, если послѣ цѣлаго числа q_0 напишемъ одно за другимъ частныя q_1, $q_2, \cdots q_{\rho-1}$, q_ρ, полученныя при послѣдовательныхъ дѣленіяхъ, и поставимъ запятую передъ q_1, т.-е. передъ тѣмъ частнымъ, которое получается отъ дѣленія послѣ присоединенія перваго нуля.

Систематическую дробь равную дроби $\frac{z}{n}$ можно получить и другимъ путемъ, который, ради сокращенія письма, укажемъ лишь при $g = 10$. Если $n = 2^{\nu_1} \cdot 5^{\nu_2}$, и если

1. $\nu_1 > \nu_2$, то $\frac{z}{n} = \frac{z \cdot 5^{\nu_1 - \nu_2}}{2^{\nu_1} \cdot 5^{\nu_1}} = \frac{z \cdot 5^{\nu_1 - \nu_2}}{10^{\nu_1}}$,

2. $\nu_1 = \nu_2$, то $\frac{z}{n} = \frac{z}{10^{\nu_1}} = \frac{z}{10^{\nu_2}}$,

и 3. $\nu_1 < \nu_2$, то $\frac{z}{n} = \frac{z \cdot 2^{\nu_2 - \nu_1}}{2^{\nu_2} \cdot 5^{\nu_2}} = \frac{z \cdot 2^{\nu_2 - \nu_1}}{10^{\nu_2}}$.

Число десятичныхъ знаковъ получаемой десятичной дроби въ каждомъ случаѣ равно наибольшему изъ двухъ показателей ν_1 и ν_2 [1]).

Только что разсмотрѣнное дѣленіе систематической дроби α на систематическую дробь β охватываетъ и тотъ случай, когда дѣлитель β есть цѣлое число.

Особенно просто выполняется дѣйствіе, если β есть степень g. Если $\alpha = \frac{A}{g^{\nu_1}}$ и $\beta = g^\lambda$, то получаемъ: $\alpha : \beta = \frac{A}{g^{\nu_1+\lambda}}$, это значитъ, что $\alpha : \beta$ въ сокращенномъ видѣ напишется тѣми же цыфрами, какъ и α, но имѣетъ послѣ запятой λ знаками больше. Слѣдовательно, чтобы α раздѣлить на g^λ, достаточно перенести запятую на λ мѣстъ влѣво. Въ томъ случаѣ, если до запятой находится меньше, чѣмъ λ цыфръ, то перенесеніе запятой выполняется послѣ того, какъ передъ первой цыфрой будетъ поставлено надлежащее число нулей.

E. Возведеніе въ степень.

Любую степень систематической дроби съ цѣлымъ показателемъ можно получить повторнымъ умноженіемъ.

F. Извлеченіе корня.

I. Квадратный корень.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ любой дроби было сведено (см. гл. II, § 5 C, (I)) къ вычисленію квадратнаго корня изъ цѣлаго числа и къ дѣленію также на цѣлое число. Согласно этому для систематической дроби получаемъ, если

$$\alpha = \frac{A}{g^{2\lambda}}, \qquad \sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{A}}{g^\lambda},$$

а если

$$\alpha = \frac{A}{g^{2\lambda-1}}, \quad \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{A \cdot g}{g^{2\lambda}}} = \frac{\sqrt{A \cdot g}}{g^\lambda}.$$

---

1) Несомнѣнно, второй способъ всегда ведетъ къ цѣли быстрѣе, чѣмъ первый, если извѣстно разложеніе чиселъ z и n на ихъ первоначальные множители. Для способа дѣленія, указаннаго ранѣе, этого не требуется.

Слѣдовательно, для извлеченія квадратнаго корня изъ систематической дроби поступаемъ слѣдующимъ образомъ: отбрасываемъ запятую, при чемъ, въ случаѣ нечетнаго числа десятичныхъ знаковъ, дѣлаемъ это, приписавъ предварительно нуль; изъ полученнаго цѣлаго числа извлекаемъ корень способомъ, указаннымъ въ § 10 G, гл. I, и въ полученномъ результатѣ отдѣляемъ, справа вдвое меньше знаковъ, чѣмъ ихъ имѣло послѣ запятой подкоренное количество, или, что то же, оставляемъ запятую въ подкоренномъ количествѣ и производимъ дѣйствіе, не обращая вниманія на нее, совершенно такъ же, какъ это указано для цѣлыхъ чиселъ въ § 10 G, гл. I; въ результатѣ ставимъ запятую непосредственно послѣ той цыфры, которая получилась послѣ того, какъ были приняты во вниманіе двѣ послѣднія цыфры подкоренного количества, стоящія передъ запятой.

Если нѣтъ цѣлаго числа, которое соотвѣтственно было бы равно $\sqrt{A}$ или $\sqrt{Ag}$, то нѣтъ и систематической дроби, которая обладала бы этимъ свойствомъ. (Ср. гл. II, § 5 C (II)), а слѣдовательно, нѣтъ и такой дроби, которая равнялась бы $\sqrt{a}$.

Но на основаніи правилъ, данныхъ въ § 5 C (III), гл. II, стр. 104, въ этомъ случаѣ можно найти всегда двѣ такія систематическія дроби $\frac{z}{g^\nu}$ и $\frac{z+1}{g^\nu}$ (гдѣ ν произвольное цѣлое число), что

$$\left(\frac{z}{g^\nu}\right)^2 < a < \left(\frac{z+1}{g^\nu}\right)^2;$$

для этого достаточно только способомъ, указаннымъ въ § 10 G гл. I, опредѣлить цѣлое число z такъ, чтобы

$$z^2 \leqq G < (z+1)^2,$$

гдѣ G *означаетъ такое цѣлое число, которое получится, если* a умножить на $g^{2\nu}$ и въ полученномъ произведеніи отбросить всѣ десятичные знаки. Такимъ образомъ всѣ вычисленія, необходимыя для этого, относятся полностью къ области цѣлыхъ чиселъ.

Если-же сравнить остатокъ $R = G - z^2$ съ z, то сейчасъ же можно рѣшить (см. стр. 103), будетъ ли $a \gtreqless \left(\frac{z+\frac{1}{2}}{g^\nu}\right)^2$.

II. Кубичный корень.

$$\text{Если } a = \frac{A}{g^{3\lambda}}, \qquad \text{то } \sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{A}}{g^\lambda};$$

$$\text{если } \alpha = \frac{A}{g^{3\lambda-1}}, \quad \text{то } \sqrt[3]{\alpha} = \frac{\sqrt[3]{Ag}}{g^{\lambda}};$$

$$\text{если } \alpha = \frac{A}{g^{3\lambda-2}}, \quad \text{то } \sqrt[3]{\alpha} = \frac{\sqrt[3]{Ag^2}}{g^{\lambda}}.$$

Такимъ образомъ, извлеченіе кубичнаго корня изъ любой систематической дроби сводится къ извлеченію кубичнаго корня изъ цѣлаго числа и къ дѣленію на степень основанія системы. Если въ нашей области чиселъ не существуетъ корня кубичнаго изъ A или изъ Ag, или изъ Ag^2, то то же самое можно сказать и о $\sqrt[3]{\alpha}$. Но въ такомъ случаѣ, совершенно подобно тому, какъ и при извлеченіи квадратнаго корня, мы можемъ, выбравъ произвольное цѣлое число ν, всегда найти двѣ систематическія дроби $\frac{z}{g^\nu}$ и $\frac{z+1}{g^\nu}$ такъ, чтобы $\left(\frac{z}{g^\nu}\right)^3 < \alpha < \left(\frac{z+1}{g^\nu}\right)^3$. Для этой цѣли достаточно способомъ, указаннымъ въ § 10 G, гл. I, опредѣлить цѣлое число z такъ, чтобы

$$z^3 \leqq G < (z+1)^3,$$

гдѣ G есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ произведеніи $\alpha \cdot g^{3\nu}$.

Уже въ главѣ II, § 5 C, (III), стр. 105—106, мы указали, въ какомъ смыслѣ и на основаніи какихъ соображеній мы имѣемъ право замѣнить несуществующій въ области нашихъ чиселъ корень любой степени изъ цѣлаго или дробнаго числа нѣкоторою дробью. Къ этому слѣдуетъ добавить, что съ этой цѣлью обыкновенно выбираютъ систематическія дроби $\frac{z}{g^\nu}$ и $\frac{z+1}{g^\nu}$, разность между которыми, подборомъ значенія ν можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой.

G. Логариѳмированіе.

Къ тому, что сказано о логариѳмахъ въ области дробныхъ чиселъ (см. § 5 D, гл. II, стр. 106) намъ слѣдуетъ добавить только, что какъ логариѳмы, такъ и дроби, замѣняющія логариѳмы несуществующіе въ нашей области чиселъ, принято писать исключительно въ формѣ систематическихъ дробей.

§ 4. Преобразованіе простой дроби въ систематическую дробь.

Такъ-какъ, согласно § 1, гл. II, стр. 83, каждую простую дробь $\frac{z}{n}$ можно разсматривать, какъ результатъ дѣленія $z:n$, то и обращеніе дроби $\frac{z}{n}$ въ систематическую съ основаніемъ g, есть не что иное, какъ изображеніе частнаго двухъ цѣлыхъ чиселъ въ видѣ систематической дроби (см. § 3 D, стр. 114 и д.). Мы видѣли уже раньше, что для случая, когда z и n числа взаимно простыя (а это мы, очевидно, всегда имѣемъ право предполагать съ самаго начала), такое представленіе возможно тогда и только тогда, если n не содержитъ множителей, не заключающихся въ g; для полученія самой систематической дроби нами уже указанъ способъ дѣленія на стр. 115. Послѣдній способъ примѣнимъ и въ томъ случаѣ, если только что указанное требованіе для n не выполнено. Противорѣчіе, на которое какъ-будто мы наталкиваемся въ томъ случаѣ, когда n содержитъ первоначальные множители, отличные отъ множителей g, падаетъ въ силу того, что при этомъ условіи дѣленіе не можетъ закончиться, сколько-бы разъ мы не приписывали нули къ остаткамъ. Чисто формальное примѣненіе нашего алгориѳма должно привести къ выраженію слѣдующаго вида:

$$q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \frac{q_3}{g^3} + \cdots,$$

которое никогда не заканчивается, а, наоборотъ, къ которому нужно присоединять все новые члены, сколько бы ихъ уже ни было написано. Если такой символъ, вообще говоря, можетъ имѣть смыслъ, то каковъ этотъ послѣдній? Ясно, что онъ не представляетъ изъ себя суммы въ томъ смыслѣ, какъ она опредѣлена раньше, такъ какъ до сихъ поръ въ понятіи суммы конечное число слагаемыхъ имѣло существенное значеніе; если же число слагаемыхъ становилось такъ велико, что мы не могли ихъ, благодаря нашей ограниченной способности представленія, соединить коллективно въ одно цѣлое однимъ мыслительнымъ актомъ, то всегда было возможно, образованіемъ частныхъ суммъ и постепеннымъ ихъ соединеніемъ, прійти къ понятію полной суммы. Но и это отпадаетъ, если приходится прибавлять все новыя и новыя слагаемыя, сколько бы ихъ раньше ни было соединено въ одну сумму, или если, какъ это принято говорить, число слагаемыхъ безконечно велико. Для выясненія того, возможно ли и въ этомъ случаѣ придать символу, являющемуся въ видѣ суммы $q_0+\frac{q_1}{g}+\frac{q_2}{g^2}+\frac{q_3}{g^3}+\cdots$ опредѣленное значеніе, необходимо болѣе подробно разсмотрѣть значенія чиселъ $q_1, q_2, q_3\cdots$ Эти числа получились (стр. 116—117), какъ частныя отъ дѣленія r_0g, r_1g, r_2g и т. д. на n, и, такимъ образомъ, имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства:

$$r_0g=nq_1+r_1,$$
$$r_1g=nq_2+r_2,$$
$$r_2g=nq_3+r_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots,\text{ при чемъ}$$

для любого значенія ν имѣемъ:

$$0\leqq q_\nu<g,$$
$$0<r_\nu<n.$$

Такъ какъ остатки r_ν могутъ имѣть только $(n-1)$ значеніе, а именно $1, 2, 3\cdots n-1$, то невозможно, чтобы оказалось болѣе $(n-1)$ первыхъ различныхъ между собой остатковъ $r_0, r_1,\cdots r_{n-2}$; напротивъ, въ крайнемъ случаѣ, n-ый остатокъ долженъ быть равенъ одному изъ предшествующихъ. Пусть r_s означаетъ первый остатокъ, который повторяется, и r_{s+t} ближайшій ему равный. Такъ какъ для всѣхъ значеній ν, остаткомъ r_ν однозначно опредѣляются числа $q_{\nu+1}$ и $r_{\nu+1}$, то изъ

$$r_{s+t}=r_s$$

слѣдуетъ, что

$$1.\ q_{s+1+t}=q_{s+1}\ \text{ и }\ 1a.\ r_{s+1+t}=r_{s+1},$$

а изъ 1 а слѣдуетъ также, что и

$$2.\ q_{s+2+t}=q_{s+2}\ \text{ и }\ 2a.\ r_{s+2+t}=r_{s+2}.$$

Вообще будемъ имѣть:

$$q_{s+\sigma+t}=q_{s+\sigma}\quad\text{и}\quad r_{s+\sigma+t}=r_{s+\sigma}$$

при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ σ.

Начиная съ q_{s+1} каждые два числа равны между собой, если ихъ индексы отличаются одинъ отъ другого на t, поэтому:

$$\begin{array}{lllll}
q_{s+1} & = q_{s+1+t} & = q_{s+1+2t} & = q_{s+1+3t} & = \cdots, \\
q_{s+2} & = q_{s+2+t} & = q_{s+2+2t} & = q_{s+2+3t} & = \cdots, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
q_{s+t-1} & = q_{s+t-1+t} & = q_{s+t-1+2t} & = q_{s+t-1+3t} & = \cdots, \\
q_{s+t} & = q_{s+2t} & = q_{s+3t} & = q_{s+4t} & = \cdots;
\end{array}$$

т.-е. въ символѣ $\overline{q_0, q_1q_2q_3\cdots}$, полученномъ изъ дроби $\frac{z}{n}$ при помощи дѣленія, начиная съ q_s, постоянно повторяется группа цыфръ $\overline{q_{s+1}q_{s+2}\cdots q_{s+t-1}q_{s+t}}$, которая въ этомъ случаѣ называется **періодомъ** разложенія. Получаемое выраженіе, если его написать болѣе подробно, имѣетъ видъ

$$q_0+\frac{q_1}{g}+\cdots+\frac{q_s}{g^s}+\frac{q_{s+1}}{g^{s+1}}+\cdots+\frac{q_{s+t}}{g^{s+t}}+\frac{q_{s+1}}{g^{s+1+t}}+\cdots+\frac{q_{s+t}}{g^{s+2t}}+\frac{q_{s+1}}{g^{s+1+2t}}+\cdots+\frac{q_{s+t}}{g^{s+3t}}+\cdots$$
$$=q_0+\frac{Q_s}{g^s}+\frac{Q_t}{g^{s+t}}+\frac{Q_t}{g^{s+2t}}+\frac{Q_t}{g^{s+3t}}+\cdots,$$

гдѣ для сокращенія введены обозначенія:

$$Q_s \text{ для } q_1g^{s-1}+q_2g^{s-2}+\cdots+q_{s-1}g+q_s,$$
$$Q_t \text{ для } q_{s+1}g^{t-1}+q_{s+2}g^{t-2}+\cdots+q_{s+t-1}g+q_{s+t}.$$

Числа $\frac{Q_t}{g^{s+t}}, \frac{Q_t}{g^{s+2t}}, \frac{Q_t}{g^{s+3t}}, \cdots$ имѣютъ ту особенность, что въ такомъ порядкѣ, какъ они записаны, каждое послѣдующее образуется изъ предыдущаго умноженіемъ на правильную дробь $\frac{1}{g^t}$; слѣдовательно, они образуютъ геометрическій рядъ (см. § 7 D, гл. I, прибавленіе стр. 32), въ которомъ первый членъ равенъ $\frac{Q_t}{g^{s+t}}$, а знаменатель $\frac{1}{g^t}$.

Такимъ образомъ, нашъ вопросъ о смыслѣ символа, полученнаго при логариѳмѣ дѣленія, сводится къ вопросу о существованіи и смыслѣ суммы геометрическаго ряда, знаменатель котораго e есть правильная дробь, а число членовъ безконечно велико.

Сумма s_n, n первыхъ членовъ геометрическаго ряда

$$a,\ ae,\ ae^2, \cdots,\ ae^{n-1}, \cdots$$

по § 7 D, доб. гл. I, равна

$$s_n = \frac{a}{1-e}(1-e^n) = \frac{a}{1-e} - e^n\frac{a}{1-e}.$$

Если образовывать сумму слѣдующимъ образомъ: къ первому члену прибавить второй, къ суммѣ этихъ—третій, къ найденной суммѣ четвертый и т. д., то ясно, что чѣмъ больше мы присоединимъ членовъ, тѣмъ большую сумму получимъ, т.-е. чѣмъ большія значенія придадимъ n, тѣмъ больше будетъ и s_n. А, такъ какъ для всѣхъ значеній n

$$1 - e^n < 1,$$

то и для всѣхъ значеній n имѣетъ мѣсто:

$$s_n < \frac{a}{1-e},$$

т.-е., если для образованія суммы брать все большее и большее число членовъ, то s_n, хотя и будетъ все увеличиваться, но никогда не достигнетъ значенія опредѣленнаго числа $\frac{a}{1-e} = A$.

Такъ какъ $e < 1$, то можно на основаніи § 5 A, гл. II (стр. 96), при достаточно большомъ n, сдѣлать степень e^n, а слѣдовательно, и произведеніе $e^n \cdot A$ произвольно малымъ, или выражаясь точнѣе: если дано произвольно малое число δ, то всегда можно найти такое число ν, что при всѣхъ значеніяхъ $n \geqq \nu$ будетъ имѣть мѣсто:

$$e^n < \frac{\delta}{A} \text{ или } A \cdot e^n < \delta$$

слѣдовательно, s_n подавно меньше A и отличается отъ него меньше, чѣмъ на произвольно малое число δ. Обычно это выражаютъ такъ: s_n, при условіи неограниченнаго возрастанія n, приближается къ предѣльному значенію или къ предѣлу A, (никогда его при этомъ не достигая) и пишутъ

$$\lim_{n=\infty} s_n = A.$$

Такъ какъ для всѣхъ значеній n, которыя $\geqq \nu$

$$A - \delta < s_n < A,$$

то и s_{n_1} и s_{n_2} въ случаѣ, если, $n_1 \geqq \nu$, а также $n_2 \geqq \nu$ не могутъ отличаться другъ отъ друга больше, чѣмъ на δ.

Только что приведенныя соображенія мы, прежде всего, разъяснимъ на простомъ примѣрѣ. Дроби $\frac{1}{2^0} = 1, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$ числители которыхъ суть 1, а знаменатели представляютъ изъ себя послѣдовательныя степени 2-хъ, образуютъ геометрическій рядъ съ первымъ членомъ, равнымъ 1 и знаменателемъ $\frac{1}{2}$. Поэтому для такого ряда:

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Если станемъ выполнять сложенія, складывая послѣдовательно $1 + \frac{1}{2}$, затѣмъ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$, затѣмъ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$ и т. д., то, очевидно, при каждомъ сложеніи сумма становится больше, а найденное выраженіе для s_n показываетъ, что сумма будетъ меньше числа 2, изъ сколькихъ бы членовъ мы ни составляли наши суммы.

Если δ данное произвольно малое число, то цѣлое число ν опредѣляемъ такъ, чтобы

$$1 + \nu > \frac{2}{\delta}.$$

Тогда для всѣхъ значеній $n \geqq \nu$

$$1 + n > \frac{2}{\delta},$$

слѣдовательно, такъ какъ

$$(1 + 1)^n > 1 + n \quad (\S\ 7\ C, \text{ гл. I, (III) стр. } 31),$$

то

$$2^n > \frac{2}{\delta}$$

и

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\delta}{2} \quad (\text{гл. II, } \S\ 2, \text{ стр. } 89).$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < \delta.$$

Для каждаго значенія n, большаго, чѣмъ напередъ заданное число ν (или даже для $n = \nu$), сумма s_n, хотя и меньше 2-хъ, но отличается отъ 2-хъ менѣе, чѣмъ на произвольно малое напередъ выбранное число δ; слѣдовательно, согласно только что введенному обозначенію, для нашего геометрическаго ряда имѣемъ право написать: $\lim\limits_{n=\infty} s_n = 2$.

Если снова обратиться къ изслѣдованію произвольнаго геометрическаго ряда со знаменателемъ < 1 и безконечнымъ числомъ членовъ, то ясно, что, хотя всѣ члены сложить нельзя, но всѣ суммы любого опредѣленнаго числа членовъ, превосходящаго извѣстное значеніе ν, отличаются отъ напередъ заданнаго предѣльнаго значенія $A = \frac{a}{1-e}$ на тѣмъ меньшую величину, чѣмъ большее число членовъ мы беремъ для образованія суммы [1]); послѣднее обстоятельство даетъ намъ право и возможность въ случаѣ геометрическаго ряда (полагая всегда знаменатель < 1), съ безконечно большимъ числомъ членовъ, для котораго, слѣдовательно, понятіе суммы въ прежнемъ смыслѣ непримѣнимо, опредѣлить, какъ сумму, это однозначно характеризуемое предѣльное значеніе $A = \frac{a}{1-e}$; къ этому значенію сумма n первыхъ членовъ приближается все болѣе и болѣе по мѣрѣ возрастанія числа n.

Само собою ясно, что для новыхъ суммъ, понимаемыхъ въ указанномъ смыслѣ, нельзя непосредственно примѣнять предложенія, доказанныя ранѣе для обыкновенныхъ суммъ. Въ данномъ случаѣ каждое предложеніе требуетъ особаго изслѣдованія его примѣнимости. Пока мы укажемъ только на слѣдующее предложеніе, которымъ придется пользоваться въ ближайшемъ будущемъ, и которое справедливо и для безконечнаго геометрическаго ряда со знаменателемъ < 1, а именно: „чтобы умножить (раздѣлить) сумму на число, слѣдуетъ каждое слагаемое умножить (раздѣлить) на это число“. Это предложеніе непосредственно вытекаетъ изъ слѣдующихъ двухъ равенствъ:

$$a + ae + ae^2 + \cdots + \text{до безк.} = \frac{a}{1-e}$$

---

1) Такъ, напримѣръ, всѣ суммы, которыя можно составить изъ членовъ ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, и которыя содержатъ не менѣе ста первыхъ членовъ, отличаются отъ числа 2. а слѣдовательно также и другъ отъ друга менѣе, чѣмъ на дробь, числитель которой 1, а знаменатель есть число въ 30 цыфръ.

и

$$ab + abc + abc^2 + \cdots + \text{до безк.} = \frac{ab}{1-c}.$$

Этимъ самымъ опредѣлено значеніе и символа, даннаго въ видѣ суммы безконечнаго числа слагаемыхъ и имѣющаго видъ:

$$\frac{Q_t}{g^{s+t}} + \frac{Q_t}{g^{s+2t}} + \frac{Q_t}{g^{s+3t}} + \cdots \text{до безкон.}$$

Согласно опредѣленію. установленному для суммы геометрическаго ряда съ безконечнымъ числомъ членовъ, мы должны подъ данной суммой понимать число:

$$\frac{Q_t}{g^{s+t}\left(1-\frac{1}{g^t}\right)} = \frac{Q_t}{g^s(g^t-1)}$$

и, такимъ образомъ, безконечная сумма

$$q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^{s+t}} + \frac{Q_t}{g^{s+2t}} + \cdots + \text{до безкон.}$$

имѣетъ слѣдующее опредѣленное значеніе: $q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^s(g^t-1)}$, которое для краткости будемъ въ дальнѣйшемъ обозначать черезъ P. Самую сумму, понимаемую въ болѣе широкомъ смыслѣ, называютъ также систематической дробью и притомъ „безконечной“ систематической дробью въ отличіе отъ исключительно разсматривавшихся ранѣе „конечныхъ“ систематическихъ дробей. Такъ какъ, начиная съ цыфры q_s, группа цыфръ $\overline{q_{s+1}\ q_{s+2}\cdots q_{s+t}}$ постоянно повторяется, то такую дробь называютъ періодической систематической дробью, знаки $\overline{q_{s+1}\cdots q_{s+t}}$ называются період омъ, а знаки $\overline{q_1\cdots q_s}$, которые не повторяются, „предперіодомъ“. Безконечная систематическая періодическая дробь пишется сокращенно такъ:

$$q_0,\ q_1 q_2 \cdots q_s\ \overline{q_{s+1}\cdots q_{s+t}}\cdots,$$

гдѣ цыфры, находящіяся подъ чертой, представляютъ періодъ.

Если $s=0$ и, слѣдовательно, „предперіодъ“ отпадаетъ, а періодъ начинается непосредственно послѣ запятой, то дробь называется чистой періодической систематической дробью; если $s>0$, а, слѣдовательно, предперіодъ существуетъ, то дробь называется смѣшанной періодической.

Безконечную періодическую систематическую дробь:

$$q_0,\ q_1 q_2 \cdots q_s \overline{q_{s+1} \cdots q_{s+t}} \cdots$$

мы получили, распространивъ чисто формальнымъ образомъ способъ дѣленія, указанный для обращенія дроби $\frac{z}{n}$ въ конечную систематическую при томъ условіи, что n не содержитъ первоначальныхъ множителей, отличныхъ отъ множителей g, и на тотъ случай, когда послѣднее условіе не выполнено. Теперь намъ остается доказать, что въ этомъ случаѣ только что опредѣленное для безконечной періодической систематической дроби значеніе P и на самомъ дѣлѣ равно дроби $\frac{z}{n}$, изъ которой мы исходили.

Если дѣленіе прервать на ν-томъ періодѣ, то получимъ (ср. стр. 116):

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^{s+t}} + \frac{Q_t}{g^{s+2t}} + \cdots + \frac{Q_t}{g^{s+\nu t}} + R_\nu,$$

гдѣ

$$R_\nu = \frac{1}{g^{s+\nu t}} \cdot \frac{r_{s+\nu t}}{n} < \frac{1}{g^s \cdot (g^t)^\nu},$$

или

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^{s+t}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{g^t}\right)^\nu}{1 - \frac{1}{g^t}} + R_\nu =$$

$$= q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^s(g^t-1)} - \frac{Q_t}{g^s(g^t-1)} \cdot \frac{1}{(g^t)^\nu} + R_\nu =$$

$$= P - \frac{Q_t}{g^s(g^t-1)} \cdot \frac{1}{(g^t)^\nu} + R_\nu.$$

Слѣдовательно:

$$\left|P - \frac{z}{n}\right| = \left|\frac{Q_t}{g^s(g^t-1)} \cdot \frac{1}{(g^t)^\nu} - R_\nu\right|.[1]$$

---

[1] Символомъ $|a-b|$ обозначается абсолютное значеніе $a-b$; онъ долженъ означать

$$a-b, \text{ если } a > b$$
$$b-a \quad » \quad a < b$$

и $\quad 0 \quad » \quad a = b.$

Это равенство справедливо при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ ν. Если черезъ δ обозначить произвольно малое число, то ν всегда можно выбрать столь большимъ, чтобы

$$1. \quad \frac{Q_t}{g^s(g^t-1)} \cdot \frac{1}{(g^t)^\nu} < \delta$$

и

$$2. \qquad R_\nu < \delta, \quad \text{(гл. II, § 5 A, стр. 96)},$$

а, слѣдовательно. и

$$\left|P - \frac{z}{n}\right| < \delta.$$

P такъ же, какъ и $\frac{z}{n}$ не зависитъ отъ ν, т.-е., они имѣютъ всегда одно и то же опредѣленное значеніе, независимо отъ того, каково значеніе ν; слѣдовательно, это же справедливо и для $\left|P - \frac{z}{n}\right|$. Такая постоянная разность можетъ быть меньше любой напередъ заданной произвольно малой величины лишь въ томъ случаѣ, если эта разность равна нулю. Отсюда слѣдуетъ, что на самомъ дѣлѣ $P = \frac{z}{n}$.

Что касается дѣйствій надъ безконечными періодическими систематическими дробями, то мы укажемъ на замѣчанія, сдѣланныя относительно геометрическаго ряда на стр. 125. Изъ даннаго тамъ предложенія непосредственно вытекаетъ, что и безконечную систематическую періодическую дробь можно умножить (раздѣлить) на степень основанія системы, т.-е. на g^α, для чего слѣдуетъ каждый десятичный знакъ умножить на это число, а при сокращенномъ письмѣ перенести запятую вправо (влѣво) черезъ α знаковъ. Въ равенствѣ

$$q_0, q_1 \cdots q_s \overline{/q_{s+1} \cdots q_{s+t}} \cdots = q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^s(g^t-1)}$$

уже рѣшена задача объ обращеніи безконечной систематической періодической дроби въ простую. Чтобы получить болѣе удобную формулировку правила этого обращенія, предполагаемъ, что систематическая дробь не имѣетъ цѣлой части и различаемъ здѣсь два случая:

1. Систематическая дробь является чистой періодической, а слѣдовательно $s = 0$. Тогда получимъ:

$$0, \overline{/q_1 q_2 \cdots q_t} \cdots = \frac{Q_t}{g^t - 1},$$

т.-е. каждая чистая періодическая систематическая дробь равна такой простой дроби, числитель которой равенъ періоду написанному въ видѣ систематическаго числа, а знаменатель есть систематическое число, каждая цыфра котораго равна $g-1$. Число этихъ цыфръ равно числу цыфръ періода. Напр., для $g=10$

$$0,\sqrt{324}\cdots=\frac{324}{999}=\frac{12}{37}.$$

Такъ какъ

$$Q_t=q_{s+1}\cdot g^{t-1}+q_{s+2}\cdot g^{t-2}+\cdots+q_{s+t-1}\cdot g+q_{s+t}$$
$$(q_{s+\tau}\leqq g-1,\ \text{для}\ \tau=1,\ 2,\ldots t)$$

и

$$g^t-1=(g-1)g^{t-1}+(g-1)g^{t-2}+\cdots+(g-1)g+(g-1),$$

то всегда

$$Q_t\leqq g^t-1.$$

Знакъ равенства можетъ имѣть мѣсто лишь въ томъ случаѣ, когда

$$q_{s+1}=q_{s+2}=\cdots=q_{s+t-1}=q_{s+t}=g-1,$$

слѣдовательно, только въ томъ случаѣ, если періодъ состоитъ изъ цыфры $g-1$. Въ этомъ случаѣ значеніе $\frac{Q_t}{g^t-1}$ періодической систематической дроби равно 1, а во всякомъ другомъ случаѣ оно меньше 1.

2. Періодическая дробь смѣшанная. Тогда имѣемъ:

$$0,\ q_1q_2\cdots q_s\sqrt{q_{s+1}q_{s+2}\cdots q_{s+t}}\cdots=\frac{Q_sg^t+Q_t-Q_s}{g^s(g^t-1)},$$
$$Q_sg^t+Q_t=\overline{q_1q_2\cdots q_sq_{s+1}\cdots q_{s+t}},$$
$$Q_s=\overline{q_1q_2\cdots q_s}.$$

Чтобы составить числитель этой дроби, слѣдуетъ написать въ видѣ систематическаго числа цыфры предперіода и перваго періода не измѣняя ихъ порядка и вычесть затѣмъ предперіодъ, разсматривая его, какъ систематическое число. Знаменатель есть систематическое число, содержащее цыфру $g-1$ столько разъ, сколько цыфръ въ періодѣ, и за нею столько нулей, сколько цыфръ въ предперіодѣ.

Напримѣръ при $g=10$ имѣемъ:

$$0,\ 23\sqrt{148}\cdots=\frac{23\ 148-23}{99\ 900}=\frac{23\ 125}{99\ 900}=\frac{25}{108}.$$

Въ частномъ случаѣ, если періодъ состоитъ изъ $g-1$ цыфры, то

$$t=1,\ Q_t=g-1,\ \frac{Q_t}{g^t-1}=1$$

и

$$0,\ q_1q_2\cdots q_s\,/\overline{(g-1)}\cdots=\frac{Q_s}{g^s}+\frac{1}{g^s}=$$
$$=0,\ q_1q_2\cdots q_{s-1}(q_s+1).$$

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ значеніе безконечной періодической систематической дроби равно значенію такой конечной систематической дроби, которую получимъ, отбросивъ періодъ и увеличивъ на единицу послѣднюю цыфру предперіода. Для $g=10$ имѣемъ:

$$2,\ 357\,/\overline{9}\cdots=2{,}358.$$

Если оборвать какую-либо систематическую періодическую дробь на знакѣ q_ρ, при чемъ безразлично, принадлежитъ ли q_ρ къ цыфрамъ предперіода или періода, то прежде всего ясно, что значеніе P безконечной систематической дроби больше, чѣмъ конечная систематическая дробь $P_\rho=q_0,\ q_1q_2q_3\cdots q_\rho$. Съ другой стороны, легко показать, что сумма безконечнаго числа отброшенныхъ десятичныхъ знаковъ меньше, чѣмъ единица послѣдняго удержаннаго десятичнаго знака.

Съ этой цѣлью данную систематическую дробь сравнимъ съ другой дробью P', у которой первые ρ десятичныхъ знаковъ совпадаютъ съ данной, а всѣ остальные представляютъ цыфру $(g-1)$, слѣдовательно, ея значеніе таково:

$$P'=q_0,\ q_1\cdots q_{\rho-1}\cdot(q_\rho+1)$$

Если $q_{\sigma+1}$ въ дроби P означаетъ первую изъ слѣдующихъ за q цыфръ, съ которой начинается періодъ, то можно P представить состоящимъ изъ конечной части $q_0,\ q_1q_2\cdots q_\rho\ q_{\rho+1}\cdots q_\sigma$ и безконечной

$$\frac{Q_t}{g^{\sigma+t}}+\frac{Q_t}{g^{\sigma+2t}}+\cdots$$

и, соотвѣтственно съ этимъ, P'

$$q_0,\ \overbrace{q_1q_2\cdots q_\rho(g-1)\cdots(g-1)}^{(\sigma\text{ десятичныхъ знаковъ})}+\left(\frac{Q'_t}{g^{\sigma+t}}+\frac{Q'_t}{g^{\sigma+2t}}+\cdots\right),$$

гдѣ Q'_t получается изъ Q_t замѣной каждой цыфры періода черезъ $g-1$. Теперь имѣемъ

$$1.\ q_0,\ q_1\cdots q_\rho q_{\rho+1}\cdots q_\sigma \leqq q_0,\ \overbrace{q_1\cdots q_\rho(g-1)\cdots(g-1)}^{(\sigma\text{ десятичныхъ знаковъ})}$$

и

$$2.\ \frac{Q_t}{g^{\sigma+t}}+\frac{Q_t}{g^{\sigma+2t}}+\cdots<\frac{Q'_t}{g^{\sigma+t}}+\frac{Q'_t}{g^{\sigma+2t}}+\cdots,$$

такъ какъ оба геометрическіе ряда имѣютъ одинъ тотъ же знаменатель, а первый членъ 1-го ряда меньше, чѣмъ 1-ый членъ 2-го ряда; слѣдовательно,

$$P<P',$$

а поэтому и на самомъ дѣлѣ

$$P_\rho<P<P_\rho+\frac{1}{g^\rho}.$$

Изъ этихъ неравенствъ мы прежде всего можемъ сдѣлать такое заключеніе: **двѣ систематическія безконечныя періодическія дроби только тогда могутъ быть другъ другу равны, если десятичные знаки одной совпадаютъ съ соотвѣтственными знаками другой**, за исключеніемъ того случая, когда періодъ одной состоитъ лишь изъ цыфръ $(g-1)$.

Пусть въ двухъ безконечныхъ систематическихъ дробяхъ

$$P=q_0,\ q_1q_2\cdots q_\rho q_{\rho+1}\cdots,$$
$$P'=q_0,\ q_1q_2\cdots q_\rho q'_{\rho+1}\cdots$$

цѣлыя числа и ρ первыхъ десятичныхъ знаковъ соотвѣтственно равны между собой, а

$$q'_{\rho+1}\geqq q_{\rho+1}+1.$$

Тогда будемъ имѣть

$$P'>P'_{\rho+1},$$

гдѣ $P'_{\rho+1}$ означаетъ конечную систематическую дробь

$$q_0,\ q_1q_2\cdots q_\rho q'_{\rho+1},$$

а, слѣдовательно, и

$$P'>P_{\rho+1}+\frac{1}{g^{\rho+1}};$$

но такъ какъ

$$P<P_{\rho+1}+\frac{1}{g^{\rho+1}},$$

то и

$$P' > P.$$

Двѣ безконечныя систематическія дроби оказываются неравными другъ другу, если только онѣ отличаются одна отъ другой хотя бы одной цыфрой; и большее значеніе имѣетъ та дробь, у которой больше первая разнящаяся цыфра. Это предложеніе не имѣетъ мѣста для того случая, когда періодъ одной изъ двухъ систематическихъ дробей состоитъ изъ цыфры $(g-1)$. Такъ, напримѣръ, для $g=10$ имѣемъ:

$$0{,}235/\overline{9} = 0{,}236/\overline{0} \cdots$$

Это исключеніе намъ нѣтъ необходимости разсматривать болѣе подробно, если только каждую систематическую дробь съ періодомъ $(g-1)$ замѣнять ей равной конечной систематической дробью; и тогда изъ послѣдняго предложенія можно будетъ сдѣлать заключеніе, что обыкновенную дробь можно только единственнымъ образомъ обратить въ систематическую дробь съ даннымъ основаніемъ.

Изъ неравенствъ: (стр. 131)

$$P_\rho < P < P_\rho + \frac{1}{g^\rho}$$

далѣе слѣдуетъ, что если данная простая дробь не равна какой-либо конечной систематической дроби съ основаніемъ g, то все-таки можно найти двѣ систематическія дроби, содержащія по ρ знаковъ $\left(\text{а именно } P_\rho \text{ или } P_\rho + \frac{1}{g^\rho}\right)$, отъ которыхъ данная простая дробь отличается меньше чѣмъ на $\frac{1}{g^\rho}$, т.-е. на такое число, которое съ возрастаніемъ ρ можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ. Эта возможность замѣнить любую простую дробь систематической конечной вытекаетъ уже и изъ разсужденій, приведенныхъ на стр. 116, а именно изъ равенства:

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \cdots + \frac{q_\rho}{g^\rho} + \frac{1}{g^\rho} \cdot \frac{r_\rho}{n},$$

гдѣ $r < n$.

Если принять за основаніе 2, то для любой дроби $\frac{z}{n}$ получимъ слѣдующее разложеніе: $q_0 + \frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{2^2} + \cdots + \frac{q_\rho}{2^\rho}$, гдѣ числа

$q_1, q_2, \cdots q_\rho$ могутъ имѣть значеніе только 0 и 1; при этомъ допущенная ошибка будетъ меньше, чѣмъ $\frac{1}{2^\rho}$; напримѣръ,

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots$$

Такое представленіе дроби $\frac{1}{3}$ позволяетъ воспользоваться имъ для одного геометрическаго приложенія. Такъ какъ каждый уголъ при помощи циркуля и линейки дѣлится на 2^2, 2^4, 2^6, и т. д. равныхъ частей, то написанное равенство даетъ приближенное построеніе для дѣленія угла на три равныя части. Если оборвать рядъ на членѣ $\frac{1}{2^\rho}$, то ошибка будетъ равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^\rho}$.

Что касается вопроса о правѣ замѣны обыкновенной или безконечной систематической дроби приближенно ей равной конечной систематической дробью, то мы сошлемся на тѣ разсужденія (стр. 105 и 119), которыя приведены относительно замѣны корня и логариѳма дробью. Если требуется какія-либо безконечныя систематическія періодическія дроби соединить путемъ элементарныхъ дѣйствій, то, выполнивъ эти дѣйствія надъ ихъ приближенными значеніями, данными въ видѣ конечныхъ систематическихъ дробей, мы можемъ полученнымъ результатомъ въ томъ же смыслѣ замѣнить искомый; въ самомъ дѣлѣ, если обозначить черезъ P_ρ и P'_ρ конечныя систематическія дроби, полученныя изъ безконечныхъ систематическихъ дробей P и P' отбрасываніемъ десятичныхъ знаковъ, слѣдующихъ за ρ-тымъ, и положить

$$P=P_\rho+\delta_\rho,$$
$$P'=P_\rho'+\delta_\rho',$$

гдѣ

$$\delta_\rho<\frac{1}{g^\rho}$$

и

$$\delta_\rho'<\frac{1}{g^\rho},$$

то слѣдующія равенства

$$P+P'=P_\rho+P_\rho'+\delta_\rho+\delta_\rho',$$
$$P-P'=P_\rho-P_\rho'+\delta_\rho-\delta_\rho',$$
$$P\cdot P'=P_\rho\cdot P_\rho'+\delta_\rho\cdot P_\rho'+\delta_\rho'\cdot P_\rho+\delta_\rho\cdot\delta_\rho',$$
$$\frac{P}{P_1}=\frac{P_\rho}{P_\rho'}+\frac{\delta_\rho\cdot P_\rho'-\delta_\rho'\cdot P_\rho}{P_\rho'(P_\rho'+\delta_\rho')},$$

указываютъ на то, что сумма, разность, произведеніе и частное двухъ безконечныхъ систематическихъ дробей отличаются отъ результатовъ тѣхъ же дѣйствій, выполненныхъ надъ приближенно равными имъ конечными систематическими дробями, на число, которое при достаточно большомъ значеніи ρ можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ. Какія значенія надо придать ρ, чтобы ошибка не превышала заданнаго предѣла, мы подробно разсмотримъ въ § 8 В этой главы.

§ 5. Соотношеніе между длиной періода періодической систематической дроби и знаменателемъ той простой дроби, изъ которой она получается.

Подъ „длиной" или „величиной" періода (у Гаусса „magnitudo") разумѣютъ число цыфръ, изъ которыхъ этотъ періодъ состоитъ, т.-е. то число, которое въ § 4 мы обозначали буквой t.

Для того, чтобы дробь $\frac{z}{n}$, числитель и знаменатель которой освобождены отъ общихъ дѣлителей, дала періодическую систематическую дробь, достаточно и необходимо, чтобы знаменатель n имѣлъ такіе первоначальные множители, которые не встрѣчаются въ основаніи g (§ 3, стр. 115; § 4, стр. 120).

Тотъ случай, когда n содержитъ какъ множители, встрѣчающіеся въ основаніи g, такъ и множители, въ немъ не содержащіеся, легко сводится къ случаю, когда знаменатель не имѣетъ простыхъ множителей общихъ съ g.

Пусть

$$n=\gamma\cdot\nu,$$

гдѣ γ есть произведеніе тѣхъ простыхъ чиселъ, которые содержатся и въ g, а ν и g числа взаимно простыя.

Обозначимъ черезъ α низшую степень g, дѣлящуюся на γ и $g^\alpha=\gamma'\cdot\gamma$. Предположивъ теперь, что $z<n$ и простое съ n, получимъ

$$\frac{z}{n}=\frac{z\cdot\gamma'}{g^\alpha\cdot\nu}.$$

Пусть дѣленіе $z\cdot\gamma'$ на ν даетъ частное q и остатокъ z_0, такъ что

$$z\cdot\gamma'=q\cdot\nu+z_0,$$

гдѣ q означаетъ или 0 или цѣлое число, которое, въ силу $z < n$, меньше чѣмъ g^α, и гдѣ $z_0 < \nu$.

Такъ какъ n простое съ z, то и ν простое съ z; ν также простое съ γ', такъ какъ γ' содержитъ только такіе простые множители, которые входятъ и въ g. Поэтому изъ послѣдняго равенства вытекаетъ, что и z_0 и ν не имѣютъ ни одного общаго дѣлителя. Раздѣлимъ это равенство на $g^\alpha \cdot \nu$, и получимъ:

$$\frac{z}{n} = \frac{q}{g^\alpha} + \frac{1}{g^\alpha} \cdot \frac{z_0}{\nu};$$

т.-е. данную дробь $\frac{z}{n}$ можно представить въ видѣ суммы конечной систематической дроби (содержащей α десятичныхъ знаковъ) и $(g^\alpha)^{\text{той}}$ доли правильной дроби $\frac{z_0}{\nu}$, гдѣ знаменатель ν есть число простое съ числителемъ z_0 и съ основаніемъ g. Поэтому намъ для изслѣдованія періода достаточно исходить отъ дроби послѣдняго вида, которую въ дальнѣйшемъ мы и будемъ обозначать черезъ $\frac{z}{n}$. Способъ дѣленія, пользуясь которымъ, мы обращали $\frac{z}{n}$ въ систематическую дробь, приводилъ къ слѣдующимъ равенствамъ (ср. § 3, стр. 115 и § 4, стр. 121).

$$\begin{aligned} z &= nq_0 + r_0, \\ r_0 g &= nq_1 + r_1, \\ r_1 g &= nq_2 + r_2, \\ r_2 g &= nq_3 + r_3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Такъ какъ теперь $z < n$, то изъ перваго равенства слѣдуетъ, что $q_0 = 0$ и $r_0 = z$. Остальныя равенства запишемъ въ видѣ сравненій по модулю n (ср. гл. I, § 12 A, стр. 66):

$$r_1 \equiv r_0 g; \quad r_2 \equiv r_1 g; \quad r_3 \equiv r_2 g \text{ и т. д.} \qquad (\text{мод. } n).$$

Если подставить значеніе r_0 въ первое сравненіе, значеніе r_1 во второе сравненіе и т. д., то получимъ:

$$r_0 = z; \quad r_1 \equiv zg, \quad r_2 \equiv zg^2. \quad r_3 \equiv zg^3 \text{ и т. д.} \qquad (\text{мод. } n).$$

Получающіе при нашемъ дѣленіи остатки $r_0, r_1, r_2, r_3 \cdots$, всѣ меньше n и представляютъ изъ себя наименьшіе вычеты чиселъ:

$$zg^0, \; zg^1, \; zg^2, \; zg^3 \text{ и т. д.}$$

по модулю n. Такъ какъ, согласно нашему предположенію, z и g числа простыя съ n, то то же самое можемъ сказать и про эти остатки. Число остатковъ, различныхъ между собой, не можетъ быть больше, чѣмъ $\varphi(n)$, гдѣ $\varphi(n)$ имѣетъ, опредѣленное въ § 12 B, гл. I значеніе. Какъ уже показано въ гл. I, § 12 C, среди остатковъ, получаемыхъ при дѣленія послѣдовательныхъ степеней g, несомнѣнно существуютъ отличные другъ отъ друга, именно тѣ, которые получаются при дѣленіи g^0, g^1, $g^2, \cdots g^{t-1}$, если g принадлежитъ къ показателю t по модулю n, т.-е., если $t^{\text{ая}}$ степень g есть низшая изъ тѣхъ, для которыхъ $g^t \equiv 1$ (мод. n). Не трудно замѣтить, что при томъ же предположеніи относительно t и остатки отъ дѣленія zg^0, zg^1, $zg^2, \cdots$, zg^{t-1}, а именно числа r_0, r_1, $r_2, \cdots$, r_{t-1}, различны между собой, а такъ какъ $zg^t \equiv zg^0$ (мод. n), то $r_t = r_0$.

Число t, опредѣленное въ § 4 (стр. 121 и 122), равно, слѣдовательно, показателю t, къ которому принадлежитъ g по модулю n, и введенное тамъ число s въ этомъ случаѣ имѣетъ значеніе 0, въ силу чего можно установить такое предложеніе:

Если n есть число взаимно простое съ числами z и g и если при этомъ $z < n$, то дробь $\frac{z}{n}$ равна правильной чистой періодической систематической дроби съ основаніемъ g, а длина періода этой дроби равна показателю t, къ которому принадлежитъ g по модулю n.

Отсюда ясно, что длина періода не зависитъ отъ числителя дроби и одинакова для всѣхъ дробей съ равными знаменателями. Изъ разсужденій, приведенныхъ въ началѣ этого § (на стр. 134), въ то же время слѣдуетъ: если n содержитъ первоначальные множители, входящіе въ составъ g, а также множители, не входящіе въ его составъ, если γ, ν и α имѣютъ тѣ же значенія, какъ и на стр. 134, то дробь $\frac{z}{n}$ равна такой смѣшанной періодической систематической дроби, предперіодъ которой содержитъ α цыфръ, а періодъ, начинающійся съ $\alpha+1$-ой цифры, опредѣляется множителемъ ν числа n, взаимно простымъ съ g.

По § 12 C, главы I, показатель t равенъ либо $\varphi(n)$, либо какому-нибудь дѣлителю $\varphi(n)$. Если требуется опредѣлить длину періода систематической дроби, равной дроби $\frac{z}{n}$, не выполняя дѣленія $z:n$, что при достаточно большомъ знаменателѣ весьма затруднительно, то слѣдуетъ опредѣлить тотъ наименьшій дѣлитель t числа $\varphi(n)$, для котораго $g^t \equiv 1$ (мод. n), а для этого необходимо составить наименьшіе вычеты всѣхъ степеней g, показатели которыхъ являются дѣлителями $\varphi(n)$. Такимъ образомъ, для $g = 10$ при помощи слѣдующихъ сравненій

$$10^1 \equiv 1 \qquad (\text{мод. } 3),$$
$$10^1 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 2,\ 10^3 \equiv 6,\ 10^6 \equiv 1 \qquad (\text{мод. } 7),$$
$$10^1 \equiv 10,\ 10^2 \equiv 1 \qquad (\text{мод. } 11),$$
$$10^1 \equiv 10,\ 10^2 \equiv 9,\ 10^3 \equiv 12,\ 10^6 \equiv 1 \qquad (\text{мод. } 13),$$

получаемъ: для знаменателя 3 число цифръ періода 1, для знаменателя 11 число цифръ періода 2, для знаменателей 7 и 13 число цифръ періода 6.

Задача особенно упрощается при помощи предложеній и методовъ теоріи чиселъ [1]) (болѣе подробное разсмотрѣніе которой не входитъ въ планъ нашей книги), въ томъ случаѣ, когда знаменатель есть простое число p, и, слѣдовательно, $t = p - 1$, или одному изъ дѣлителей $p-1$. Болѣе подробное изложеніе можно найти у Joseph Mayer'а „Ueber die Grösse der Periode eines unendlichen Decimalbruches, Programm der Königlichen Studienanstalt Burghausen für das Schuljahr 1887/88, München 1888", и у H. Bork, „Periodische Decimalbrüche, Programmabhandlung des Prinz-Heinrich-Gymnasiums zu Berlin 1895". Добавленіемъ къ этой послѣдней работѣ служитъ таблица, вычисленная F. Kessler'омъ и дающая длины періодовъ всѣхъ простыхъ чиселъ, меньшихъ 100000. Если знать длины періодовъ, соотвѣтствующихъ какимъ либо простымъ числамъ, то легко опредѣлить, какъ мы это сейчасъ покажемъ, длину періода для каждаго знаменателя, являющагося произведеніемъ любыхъ степеней этихъ простыхъ чиселъ. Пусть, напримѣръ, знаменателемъ будетъ степень простого числа p, напр., p^m.

Если $t^{\text{ая}}$ степень g есть наинизшая степень, для которой $g^t \equiv 1$ (мод. p), то возможно, что число $g^t - 1$ дѣлится не только на p, но и на какую-либо болѣе высокую степень p; пусть теперь p^μ есть наивысшая степень числа p, входящая въ составъ

---

1) А именно, ученія о квадратичныхъ, кубичныхъ, биквадратичныхъ и т. д. вычетахъ съ одной стороны, и теоріи индексовъ, съ другой стороны, (пользуясь таблицей индексовъ въ томъ видѣ, какъ она имѣется въ изданномъ Jacobi въ 1839 году Canon arithmeticus).

числа $g^t - 1$, такъ что для p^μ и всѣхъ низшихъ степеней числа p число g принадлежитъ къ показателю t; въ такомъ случаѣ мы можемъ утверждать, что g принадлежитъ къ показателю $t \cdot p^{m-\mu}$ по модулю p^m, если $m \geqq \mu$. По нашему предположенію:

$$g^t = 1 + kp^\mu,$$

гдѣ k означаетъ цѣлое число; вслѣдствіе этого

$$g^{2t} = 1 + 2kp^\mu + k^2p^{2\mu},$$
$$g^{3t} = 1 + 3kp^\mu + 3k^2p^{2\mu} + k^3p^{3\mu} \text{ и т. д.}$$

Такъ какъ

$$2\mu \geqq \mu + 1,$$

то можно написать:

$$\left.\begin{aligned} g^t &\equiv 1 + kp^\mu \\ g^{2t} &\equiv 1 + 2kp^\mu \\ g^{3t} &\equiv 1 + 3kp^\mu \end{aligned}\right\} \text{ (мод. } p^{\mu+1}).$$

Примѣняя способъ заключенія отъ n къ $n+1$ (см. гл. I. § 3 B, стр. 11) получаемъ непосредственно, что для каждаго цѣлаго значенія n

$$g^{nt} \equiv 1 + nkp^\mu \text{ (мод. } p^{\mu+1}).$$

Если сложить всѣ сравненія, полученныя изъ предыдущаго замѣной n числами $0, 1, 2, \cdots p-2, p-1$, то найдемъ:

$$1 + g^t + g^{2t} + \cdots + g^{(p-2)t} + g^{(p-1)t} \equiv p + kp^\mu(1 + 2 + \cdots + (p-2) + \\ + (p-1)) \text{ (мод. } p^{\mu+1}),$$

или на основаніи § 5 E, гл. I, доб. (стр. 25),

$$1 + 2 + \cdots + (p-2) + (p-1) = \frac{(p-1)p}{2};$$

слѣдовательно,

$$1 + g^t + (g^t)^2 + \cdots + (g^t)^{p-2} + (g^t)^{p-1} \equiv p + \frac{k(p-1)}{2} p^{\mu+1} \text{ (мод. } p^{\mu+1}).$$

Если исключить пока случай $p=2$, который потомъ разсмотримъ подробно, то $\frac{p-1}{2}$ есть цѣлое число, и поэтому

$$1 + g^t + (g^t)^2 + \cdots + (g^t)^{p-2} + (g^t)^{p-1} = p + lp^{\mu+1},$$

гдѣ l есть цѣлое число.

Такъ какъ $\mu+1 \geqq 2$, то лѣвая часть равенства дѣлится на p, не дѣлясь при этомъ на болѣе высокія степени p; припоминая, что p^{μ} есть наивысшая степень, входящая въ составъ множителей числа g^t-1, мы можемъ, основываясь на тождествѣ:

$$(g^t)^p-1=(g^t-1)[(g^t)^{(p-1)}+(g^t)^{(p-2)}+\cdots+g^t+1]$$

заключить, что число $g^{tp}-1$ дѣлится на $p^{\mu+1}$, не дѣлясь при этомъ на болѣе высокія степени p.

Если только что приведенное разсужденіе повторить съ замѣной g^t черезъ g^{tp}, p^{μ} черезъ $p^{\mu+1}$ и $p^{\mu+1}$ черезъ $p^{\mu+2}$, то прежде всего найдемъ, что сумма

$$(g^{tp})^{p-1}+(g^{tp})^{p-2}+\cdots+g^{tp}+1$$

дѣлится на p, не дѣлясь на болѣе высокую степень p; пользуясь теперь тождествомъ

$$(g^{tp})^p-1=(g^{tp}-1)[(g^{tp})^{p-1}+(g^{tp})^{p-2}+\cdots+g^{tp}+1],$$

заключаемъ, что $p^{\mu+2}$ есть высшая степень p, входящая въ составъ числа $g^{tp^2}-1$.

Допустимъ, что такимъ же способомъ доказано, что $g^{tp^{\nu}}-1$ дѣлится на $p^{\mu+\nu}$, но не дѣлится на высшія степени числа p; тогда, повторяя тѣ же самыя разсужденія и замѣняя g^t черезъ $g^{tp^{\nu}}$ и p^{μ} черезъ $p^{\mu+\nu}$, а также и $p^{\mu+1}$ черезъ $p^{\mu+\nu+1}$, найдемъ, что $g^{tp^{\nu+1}}-1$ дѣлится на $p^{\mu+\nu+1}$, не дѣлясь при этомъ на высшія степени числа p.

Разность $g^{tp^{\nu}}-1$ въ силу закона полной индукціи § 3 B, гл. I, стр. 11 обладаетъ, слѣдовательно, на самомъ дѣлѣ, вышеуказаннымъ свойствомъ для каждаго цѣлаго значенія ν. Если теперь замѣнить ν черезъ $m-\mu$, то придемъ къ результату, что $g^{tp^{m-\mu}}-1$ дѣлится на $p^{\mu+m-\mu}=p^m$, не дѣлясь при этомъ на болѣе высокія степени p.

Теперь остается только изслѣдовать, будетъ ли $g^{tp^{m-\mu}}$ низшей степенью g, которая сравнима съ единицей (мод. p^m). Показатель e этой низшей степени долженъ съ одной стороны (см. гл. I, § 12 C, стр. 72) быть кратнымъ t или равнымъ ему, такъ какъ изъ $g^e \equiv 1$ (мод. p^m), слѣдуетъ, что и g^e сравнимо съ 1 по модулю p. Съ другой стороны, на томъ же основаніи e должно быть дѣлителемъ $t \cdot p^{m-\mu}$, слѣдовательно, e необходимо должно имѣть видъ: $t \cdot p^{\lambda}$, гдѣ $0 \leqq \lambda \leqq m-\mu$; но мы раньше доказали, что $g^{t \cdot p^{\lambda}}-1$ дѣлится на $p^{\mu+\lambda}$, не дѣлясь при этомъ на высшія степени p. Если бы было

$\lambda < m - \mu$, а, слѣдовательно, $\mu + \lambda < m$, то $g^e - 1 = g^{t \cdot p^\lambda} - 1$ не могло бы дѣлиться на p^m.

Но въ виду того, что $g^e \equiv 1$ (мод. p^m), слѣдуетъ, что $\lambda = m - \mu$ и $e = t \cdot p^{m-\mu}$. Такимъ образомъ, мы можемъ формулировать слѣдующее предложеніе:

Если g принадлежитъ къ показателю t по простому модулю p и если $g^t - 1$ дѣлится на p^μ, не дѣлясь при этомъ на высшія степени p, то g по модулю p^m при $m \geqq \mu$ принадлежитъ къ показателю $t \cdot p^{m-\mu}$, а при $m \leqq \mu$ принадлежитъ, разумѣется, къ показателю t.

Условіе того, чтобы $g^t - 1$, дѣлясь на p^μ, не дѣлилось при этомъ на болѣе высокую степень p, можно дать въ нѣсколько иномъ видѣ. Пусть $\frac{z}{p}$ означаетъ любую правильную дробь со знаменателемъ p; тогда по § 4, стр. 128, имѣемъ

$$\frac{z}{p} = \frac{Q_t}{g^t - 1},$$

гдѣ Q_t означаетъ періодъ, написанный въ видѣ систематическаго числа; отсюда

$$z \cdot (g^t - 1) = p \cdot Q_t.$$

Такъ какъ z не дѣлится на простое число p, то изъ этого равенства слѣдуетъ, что если p^μ есть высшая степень, входящая въ составъ числа $g^t - 1$, то Q_t дѣлится на $p^{\mu-1}$, не дѣлясь при этомъ на болѣе высокую степень p.

Въ случаѣ $g = 10$ почти всѣ изслѣдованныя простыя числа даютъ для μ значеніе 1 и поэтому десятичная дробь, равная обыкновенной дроби со знаменателемъ p^m имѣетъ длину періода, равную $t \cdot p^{m-1}$. Напримѣръ, число 10 для $p = 11$ принадлежитъ къ показателю 2; $10^2 - 1 = 3 \cdot 3 \cdot 11$ дѣлится на 11 и не дѣлится на болѣе высокую степень 11, и періодъ 09 не содержитъ множителя 11. Для $p = 7$ и для $p = 13$ имѣемъ $t = 6$; $10^6 - 1 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ дѣлится на 7 и 13, не дѣлясь на болѣе высокія степени этихъ простыхъ чиселъ.

Періодъ 142857, соотвѣтствующій дроби $\frac{1}{7}$, не содержитъ множителя 7, періодъ 076923, соотвѣтствующій дроби $\frac{1}{13}$, не содержитъ множителя 13 и т. д. Исключеніе составляетъ наименьшее простое нечетное число $p = 3$. Для этого модуля 10 принадлежитъ къ показателю 1, и $10^1 - 1 = 9$ дѣлится не только на 3, но и на 3^2, слѣдовательно, для $p = 3$ (и $g = 10$) $\mu = 2$ и длина періода, соотвѣтствующая знаменателю 3^m равна 3^{m-2}. Въ качествѣ слѣдующаго исключенія при десятичномъ основаніи извѣстно лишь простое число 487, для котораго одного по Desmarest'y (Théorie des nombres, Paris, 1852, стр. 295) изъ чиселъ первой тысячи, сверхъ числа 3, $\mu = 2$; такимъ образомъ, періодъ дроби $\frac{1}{487}$ и дроби $\frac{1}{487^2}$ имѣетъ 486 цыфръ.

Если для g взять значеніе, отличное отъ 10, то, конечно, можно дать цѣлый рядъ меньшихъ простыхъ чиселъ, для которыхъ $\mu > 1$. Такъ напримѣръ, мы имѣемъ:

1. Для $g = 18$ и $p = 7$:

$$18^1 \equiv 4,\ 18^2 \equiv 2,\ 18^3 \equiv 1 \text{ (мод. 7)},$$

слѣдовательно, 18 по модулю 7 принадлежитъ къ показателю 3, и

$$18^3 - 1 = 7^3 \cdot 17$$

дѣлится не только на 7, но и на 7^3, такимъ образомъ, $\mu = 3$, и въ системѣ съ основаніемъ 18 періоды дробей $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{7^2}$, $\frac{1}{7^3}$ имѣютъ по 3 цыфры, а періоды дроби $\frac{1}{7^{3+\lambda}}$ имѣютъ $3 \cdot 7^\lambda$ цыфръ.

2. Для $g = 3$ и $p = 11$ имѣемъ:

$$3^1 \equiv 3,\ 3^2 \equiv 9,\ 3^3 \equiv 5,\ 3^4 \equiv 4,\ 3^5 \equiv 1 \text{ (мод. 11)},$$

слѣдовательно, 3 принадлежитъ къ показателю 5 (мод. 11), и такъ какъ $3^5 - 1 = 2 \cdot 11^2$, то $\mu = 2$. Періоды дробей $\frac{1}{11}$ и $\left(\frac{1}{11^2}\right)$ имѣютъ поэтому по 5 цыфръ, періодъ же дроби $\frac{1}{11^{2+\lambda}}$ имѣетъ $5 \cdot 11^\lambda$ цифръ. Дальнѣйшіе примѣры можно найти у A. Holtze, Über periodische Dezimalbrüche und ihr Analogon in anderen Zahlensystemen. Programm des Domgymnasiums zu Naumburg a. S., 1887. А также въ Crelles Journal, Bd. 3, стр. 301 u. Archiv für Math. u. Phys. (3) XIII, стр. 107.

При доказательствѣ предложенія, выведеннаго на стр. 140, мы отбросили случай $p = 2$. Этотъ случай не принимается во вниманіе при условіи: g равно десяти или какому-либо другому четному числу, такъ какъ относительно p и g введено условіе, что они числа взаимно простыя. При нечетномъ значеніи g, конечно,

p можетъ быть положено равнымъ 2, и этотъ случай на самомъ дѣлѣ требуетъ особаго разсмотрѣнія. Результатъ будетъ различенъ, смотря по тому будетъ ли $g \equiv 1$ или $g \equiv 3$ (мод. 4).

Пусть будетъ

1. $g = 4\gamma + 1$, гдѣ γ какое-либо цѣлое число: тогда

$$g^1 \equiv 1 \text{ (мод. 2)},$$

слѣдовательно,

$$t = 1,$$

и

$$g^1 - 1 = 4\gamma$$

дѣлится на 2^μ, гдѣ $\mu \geqq 2$.

$$g^2 - 1 = (g - 1)(g + 1) = 4\gamma \cdot 2 \cdot (2\gamma + 1)$$

дѣлится $2^{\mu+1}$, не дѣлясь на болѣе высокую степень двухъ.

Далѣе имѣемъ:

$$g^4 - 1 = (g^2 - 1)\ (g^2 + 1).$$

Такъ-какъ $g^2 \equiv 1$ (мод. 4), слѣдовательно, $g^2 + 1 \equiv 2$ (мод. 4), то $g^2 + 1$, дѣлясь на 2, не дѣлится при этомъ на болѣе высокую степень двухъ, а, слѣдовательно, $g^{2^2} - 1$ дѣлится на $2^{\mu+2}$, не дѣлясь при этомъ на болѣе высокую степень двухъ. Точно такъ же можно убѣдиться, что

$$g^{2^3} - 1 = (g^4 - 1)\ (g^4 + 1),$$

дѣлясь на $2^{\mu+3}$, не дѣлится на болѣе высокія степени двухъ, и вообще, что $2^{\mu+\lambda}$ есть высшая степень двухъ, которая входитъ въ составъ числа $g^{2^\lambda} - 1$. Если положить теперь $\lambda = m - \mu$, то совершенно такъ же, какъ на стр. 140, предложеніе, высказанное тамъ для нечетныхъ чиселъ, окажется справедливымъ для случая $p = 2$.

Пусть

2. $$g = 4\gamma + 3,$$

гдѣ γ означаетъ какое-нибудь цѣлое число.

$$g^1 - 1 = 4\gamma + 2$$

дѣлится на 2, не дѣлясь при этомъ на высшія степени 2-хъ Поэтому

$$t = 1 \text{ и } \mu = 1.$$

Если $g+1=4(\gamma+1)$ дѣлится на 2^ρ, гдѣ $\rho \geqq 2$, но не дѣлится на высшія степени двухъ, то въ составъ числа $g^2-1=$ $=(g-1)\cdot(g+1)$ входитъ $2^{\rho+1}$, но не входитъ высшей степени двухъ. Такъ какъ $g^2 \equiv 1$, а, слѣдовательно, $g^2+1 \equiv 2$ (мод. 4), то g^2+1 дѣлится только на 2^1, $g^4-1=(g^2-1)(g^2+1)$ на $2^{\rho+2}$, но не дѣлится на болѣе высокую степень двухъ. Продолжая разсуждать подобнымъ же образомъ, найдемъ, что $g^{2^\lambda}-1$ дѣлится на $2^{\rho+\lambda}$, не дѣлясь при этомъ на высшія степени двухъ. Отсюда при $\lambda=m-\rho$ вытекаетъ предложеніе, аналогичное выведенному на стр. 140: если $g\equiv 3$ (мод. 4) и если $g+1$ дѣлится на 2^ρ, но не дѣлится ни на какую высшую степень двухъ ($\rho \geqq 2$), то знаменателю 2 соотвѣтствуетъ однозначный періодъ, знаменателямъ 2^2, $2^3, \cdots 2^{\rho+1}$ двухзначный періодъ, а знаменателю 2^m, если $m \geqq \rho+2$, періодъ, содержащій $2^{m-\rho}$ цифръ.

Перейдемъ теперь къ тому случаю, когда знаменатель n простой дроби, обращающейся въ систематическую, есть произведеніе нѣсколькихъ взаимно простыхъ чиселъ n_1, $n_2, \cdots n_\nu$ (см. стр. 138).

Пусть g по модулю n_1 принадлежитъ къ показателю t_1,
„ g „ „ n_2 „ „ „ t_2,
. . . .
„ g „ „ n_ν „ „ „ t_ν
и g „ „ $n=n_1\cdot n_2\cdots n_\nu$ принадлеж. къ показат. t

Такъ какъ изъ $g^t\equiv 1$ (мод. n) слѣдуетъ ν сравненій:

$$g^t\equiv 1 \text{ (мод. } n_1), \; g^t\equiv 1 \text{ (мод. } n_2), \cdots g^t\equiv 1 \text{ (мод. } n_\nu),$$

то согласно § 12 С, гл. I, стр. 72, показатель t долженъ быть кратнымъ t_1, t_2 и т. д. и t_ν, слѣдовательно, онъ есть общее кратное чиселъ t_1, $t_2, \cdots t_\nu$. Такъ какъ каждое общее кратное нѣсколькихъ чиселъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и кратное ихъ общаго наименьшаго кратнаго (гл. I, § 11 В), то, слѣдовательно, t ни въ коемъ случаѣ не можетъ быть меньше, чѣмъ общее наименьшее кратное чиселъ n_1, $n_2, \cdots n_\nu$. Если же выбрать t равнымъ такому наименьшему кратному, то g^t-1 будетъ дѣлиться, какъ на n_1 такъ и $n_2, \cdots$ и на n_ν; а такъ какъ n_1, $n_2\cdots n_\nu$ числа взаимнопростыя, то по § 11 В, гл. I, g^{t-1} будетъ дѣлиться и на $n=$ $=n_1\cdot n_2\cdots n_\nu$. Такимъ образомъ, мы можемъ высказать слѣдующее предложеніе. Число t, къ которому принадлежитъ g

по модулю $n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_\nu$, при чемъ $n_1, n_2, \cdots n_\nu$ числа взаимно простыя, есть общее наименьшее кратное показателей $t_1, t_2, \cdots t_\nu$, къ которымъ принадлежитъ g по модулямъ $n_1, n_2, \cdots n_\nu$.

Условіе, что множители n_1, n_2 и т. д. n_ν числа взаимно простыя, несомнѣнно будетъ выполнено въ томъ случаѣ, если они являются степенями различныхъ простыхъ чиселъ.

Примѣры (по десятичной системѣ).

1. Знаменателю 7 соотвѣтствуетъ длина періода 6. Знаменателю 11 длина періода 2, слѣдовательно, знаменателю 77 длина періода 6.
2. Длина періода, соотвѣтствующая знаменателю $369 = 3^2 \cdot 41$, есть общее наименьшее кратное 1 и 5, т.-е. 5.
3. Длина періода, соотвѣтствующая знаменателю $297 = 3^3 \cdot 11$, есть общее наименьшее кратное 3 и 2, т.-е. 6 и т. д.

До сихъ поръ мы разсматривали вопросъ о томъ, какая длина періода соотвѣтствуетъ данному знаменателю; но возможна и обратная задача, а именно, какой знаменатель n соотвѣтствуетъ систематической дроби съ заданной длиной періода t? Другими словами, какія числа n являются дѣлителями $g^t - 1$, не будучи въ то же время дѣлителями другого числа $g^\tau - 1$, если τ есть цѣлое число, меньшее t. Ограничиваясь случаемъ $g = 10$, на основаніи разложеній [1]):

$$10^1 - 1 = 3^2,$$

$$10^2 - 1 = 3^2 \cdot 11,$$

$$10^3 - 1 = 3^3 \cdot 37,$$

$$10^4 - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101,$$

$$10^5 - 1 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271,$$

---

[1]) Ср. Bernoulli. Recherche sur les diviseurs de quelques nombres très grands compris dans la somme de la progression géométrique.

$$1 + 10^1 + 10^2 + \ldots + 10^T$$

(Nouveaux mémoires de l'Académie Royale de Berlin 1771, стр. 318); Reuschle. Neue zahlentheoretische Tabellen, Programm des Königl. Gymnasiums zu Stuttgart 1856, гдѣ помѣщено разложеніе на множителя числа $10^m - 1$ для довольно большого числа значеній m, и Bickmore, Nouvelles Annales (3) XV, стр. 222—227.

$$10^6 - 1 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37,$$

$$10^7 - 1 = 3^2 \cdot 239 \cdot 4649,$$

$$10^8 - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137,$$

$$10^9 - 1 = 3^4 \cdot 37 \cdot 333667,$$

$$10^{10} - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091,$$

$$10^{11} - 1 = 3^2 \cdot 21649 \cdot 513239,$$

$$10^{12} - 1 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901 \text{ и т. д.},$$

можемъ сдѣлать заключеніе, что періодъ будетъ:

однозначный для знаменателей: 3, 9 (дѣлители $10^1 - 1$),

двузначный для знаменателей: 11, 33, 99 (дѣлители $10^2 - 1$),

трехзначный для знаменателей: 27, 37, 111, 333, 999 (дѣлители $10^3 - 1$),

четырехзначный для знаменателей: 101, 303, 909, 1111, 3333, 9999 (дѣлители $10^4 - 1$),

пятизначный для знаменателей: 41, 123, 271, 369, 813, 2439, 11 111, 33 333, 99 999 (дѣлители $10^5 - 1$).

шестизначный для знаменателей: 7, 13, 21, 39, 63, 77, 91, 117, 143, 189, 231, 259, 273, 297, 351, 407, 429, 481, 693, 777, 819, 1001, 1221, 1287, 1443, 2079, 2331, 2457, 2849, 3003, 3367, 3663, 3861, 4329, 5291, 6993, 8547, 9009, 10 101, 10 989, 12 987, 15 873, 25 641, 27 027, 30 303, 37 037, 47 619, 76 923, 90 909, 111 111, 142 857, 333 333, 999 999 (дѣлители $10^6 - 1$) [1]).

§ 6. Чистыя періодическія дроби, получающіяся при обращеніи простыхъ дробей съ одинаковыми знаменателями и различными числителями.

Остатки r_0, r_1, r_2, $r_3, \cdots r_{t-1}$, которые мы получали, примѣняя дѣленіе (стр. 116 и 121) для обращенія простой дроби $\frac{z}{n}$

[1]) Знаменатели, дающіе періоды, отъ 1 до 6 цыфръ, приведены здѣсь полностью, чтобы служить матеріаломъ для задачъ (обращеніе простыхъ дробей въ систематическія). Знаменатели, которымъ соотвѣтствуютъ періоды отъ 7 до 12 цифръ, легко получить изъ разложенія на множители чиселъ $10^7 - 1$ до $10^{12} - 1$, приведеннаго на стр. 144 и 145. Вышеприведенной таблицей, которая даетъ показатели степеней, къ которымъ принадлежитъ 10 по отношенію къ приведеннымъ въ ней числамъ, можно пользоваться также и для установленія признаковъ дѣлимости этихъ чиселъ. Ср. гл. I, § 12 D.

(гдѣ опять $z < n$ и n есть число взаимно простое съ z и g) въ періодическую систематическую дробь $0, \overline{q_1 q_2 \cdots q_t} \cdots$, были наименьшими вычетами чиселъ z, zg, zg^2, $zg^3 \cdots zg^{t-1}$ по модулю n, и въ частности $r_0 = z$. Если примѣнить тотъ же пріемъ къ дроби $\frac{r_1}{n}$, то получимъ остатки r_1, r_2, $r_3, \cdots r_{t-1}$, r_0 и частныя q_2, q_3, $q_4 \cdots q_t$, q_1, такъ какъ r_ν однозначно опредѣляетъ числа $r_{\nu+1}$ и $q_{\nu+1}$, а, слѣдовательно, всѣ r и всѣ q съ болѣе высокими индексами; такимъ образомъ, получаемъ:

$$\frac{r_1}{n} = 0, \overline{q_2 q_3 q_4 \cdots q_t q_1} \cdots$$

и

$$\frac{r_2}{n} = 0, \overline{q_3 q_4 q_5 \cdots q_1 q_2} \cdots \quad \text{и т. д.}$$

и, наконецъ,

$$\frac{r_{t-1}}{n} = 0, \overline{q_t q_1 q_2 \cdots q_{t-2} q_{t-1}} \cdots$$

Чтобы получить періодъ, соотвѣтствующій дробямъ $\frac{z}{n}$, $\frac{r_1}{n}$, $\frac{r_2}{n}, \cdots \frac{r_{t-1}}{n}$, слѣдуетъ числа q_1, q_2, $q_3 \cdots q_t$, расположить по окружности круга и проходить окружность въ одномъ и томъ же направленіи, начиная съ q_1, съ q_2 и, наконецъ, начиная съ q_t. На основаніи этого переходъ отъ одного періода къ другому называется круговой перестановкой чиселъ q_1, q_2, $q_3, \cdots q_t$. Мы можемъ поэтому высказать слѣдующее предложеніе: всѣ періодическія систематическія дроби, періоды которыхъ образуются круговой перестановкой изъ періода дроби $\frac{z}{n}$ равны простымъ дробямъ, знаменатель которыхъ есть n, а числители наименьшіе вычеты чиселъ: z, zg, $zg^2, \cdots zg^{t-1}$ (мод. n).

Согласно § 12, С (стр. 73, гл. I), t или равно $\varphi(n)$ или одному изъ дѣлителей $\varphi(n)$; если $t = \varphi(n)$, то наименьшіе вычеты чиселъ z, zg^2, $zg^3 \cdots zg^{t-1}$ (мод. n) представляютъ изъ себя всѣ $\varphi(n)$ числителей, меньшихъ, чѣмъ n и взаимно простыхъ съ нимъ. Такимъ образомъ, имѣемъ при $g = 10$, въ случаѣ знаменателя 7, число $t = 6$; а затѣмъ круговой перестановкой можно получить изъ

$$0, \overline{142\,857} \cdots = \frac{1}{7}$$

всѣ дроби со знаменателемъ 7 и числителями мѐньшими 7; а именно:

$$0,\overline{428\,571}\cdots = \frac{3}{7}, \text{ такъ какъ } 3 \equiv 1\cdot 10^1 \text{ (мод. 7)},$$

$$0,\overline{285\,714}\cdots = \frac{2}{7}, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 2 \equiv 1\cdot 10^2 \text{ (мод. 7)},$$

$$0,\overline{857\,142}\cdots = \frac{6}{7}, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 6 \equiv 1\cdot 10^3 \text{ (мод. 7)},$$

$$0,\overline{571\,428}\cdots = \frac{4}{7}, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 4 \equiv 1\cdot 10^4 \text{ (мод. 7)},$$

$$0,\overline{714\,285}\cdots = \frac{5}{7}, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 5 \equiv 1\cdot 10^5 \text{ (мод. 7)},$$

Если t не равно $\varphi(n)$, а равно дѣлителю $\varphi(n)$, то кромѣ наименьшихъ вычетовъ чиселъ z, zg, $zg^2, \cdots zg^{t-1}$, существуютъ еще другія числа, меньшія n и простыя съ нимъ. Если z' означаетъ одно изъ такихъ чиселъ, то дробь $\frac{z'}{n}$ даетъ періодъ, состоящій изъ t цыфръ, и изъ него получаются круговой перестановкой періоды дробей, числителями которыхъ являются наименьшіе вычеты чиселъ $z'g$, $z'g^2, \cdots z'g^{t-1}$ [1]).

Если и эти числители не исчерпываютъ еще всей совокупности чиселъ, меньшихъ n и простыхъ съ нимъ, и если число z'' представляетъ одно изъ нихъ и притомъ отлично отъ встрѣчавшихся раньше чиселъ, то опять соотвѣтствующій круговой перестановкой изъ періода дроби $\frac{z''}{n}$ получатсяперіоды дробей, числители которыхъ являются наименьшими вычетами чиселъ: $z''g$, $z''g^2, \cdots z''g^{t-1}$ и т. д. Такъ какъ каждые t числителей даютъ періоды, получающіеся другъ изъ друга круговой перестановкой, то существуетъ для совокупности всѣхъ несократимыхъ [2]) дробей со знаменателемъ n, всего $\frac{\varphi(n)}{t}$ существенно отличныхъ другъ отъ друга t-значныхъ періодовъ.

Такъ, напримѣръ, для знаменателя равнаго 39 имѣемъ

$$\varphi(39) = \varphi(3)\cdot\varphi(13) = 2\cdot 12 = 24.$$

---

1) Что всѣ эти остатки отличны другъ отъ друга и отъ остатковъ чиселъ z, zg, $zg^2, \ldots zg^{t-1}$ показано въ гл. I. § 12 С.

2) Т.-е. такихъ, которыя нельзя путемъ сокращенія привести къ дробямъ съ меньшимъ знаменателемъ.

Показатель t, къ которому принадлежитъ 10 по модулю 39, есть наименьшее общее кратное чиселъ 1 и 6, къ которымъ принадлежитъ 10 по модулямъ 3 и 13, слѣдовательно, $t=6$. Итакъ, 24 дроби со знаменателемъ 39 и съ числителями взаимно простыми съ 39 даютъ, согласно этому, въ общемъ $\frac{24}{6}=4$ различныхъ шестизначныхъ періода.

Циклъ 025 641	соотвѣтствуетъ числителямъ:	1, 10, 22, 25, 16, 4,
„ 051 282	„ „	2, 20, 5, 11, 32, 8,
„ 948 717	„ „	37, 19, 34, 28, 7, 31,
„ 974 358	„ „	38, 29, 17, 14, 23, 35.

Гауссъ въ §§ 312—318 своихъ „Disquisitiones Arithmeticae" примѣнилъ результаты своихъ изслѣдованій по теоріи чиселъ къ обращенію простыхъ дробей въ десятичныя и далъ въ приложеніяхъ къ „Disquistiones Arithmeticae" таблицу, содержащую періоды всѣхъ дробей, знаменателями которыхъ являются простыя числа или ихъ степени, не превышающія 100. Во второмъ томѣ полнаго собранія сочиненій Гаусса (стр. 411—413) таблица доведена до тысячи, согласно ея продолженію, найденному въ бумагахъ Гаусса послѣ его смерти. Такъ какъ дробь (въ чемъ мы убѣдимся позднѣе [1])) знаменатель которой есть произведеніе нѣсколькихъ взаимно простыхъ чиселъ, всегда можетъ быть изображена въ видѣ суммы или разности дробей, знаменателями которыхъ служатъ отдѣльные сомножители, то таблица Гаусса можетъ служить для опредѣленія періода каждой дроби, знаменатель которой есть произведеніе какихъ-либо степеней простыхъ чиселъ, не превышающихъ 1000. Въ приложеніи къ программѣ гимназіи въ Баденъ-Баденѣ за 1898 годъ J. Sachs далъ таблицу періодовъ для всѣхъ знаменателей до 250 [2]).

---

[1]) Гл. V, § 4 D.

[2]) Во второмъ отдѣлѣ этой программной работы помѣщены въ порядкѣ возрастанія разложенія въ десятичныя дроби съ 7 знаками всѣхъ дробей, и знаменатели которыхъ ≤ 250. Эта программная работа въ 1908 году переиздана Тейбнеромъ подъ заглавіемъ: J. Sachs Tafeln zum mathematischen Unterricht и содержитъ, кромѣ указанныхъ отдѣловъ, еще таблицу такъ называемыхъ «Пиѳагоровыхъ чиселъ», таблицу раціональныхъ косоугольныхъ треугольниковъ и таблицу квадратовъ чиселъ до 10500. *(Ред.)*.

§ 7. Симметричное строеніе нѣкоторыхъ періодовъ.

Мы не будемъ подробно разсматривать всѣхъ интересныхъ особенностей систематическихъ періодическихъ дробей, такъ какъ это завело бы насъ слишкомъ далеко; мы остановимся лишь на одной изъ нихъ, бросающейся въ глаза уже во многихъ простыхъ примѣрахъ. Если показатель t, къ которому принадлежитъ g по модулю n, есть четное число 2τ, то имѣемъ дробь (которую снова предполагаемъ несократимой):

$$\frac{z}{n}=\frac{Q_t}{g^t-1}=\frac{Ag^\tau+B}{(g^\tau-1)(g^\tau+1)},$$

гдѣ для краткости положено:

$$A=q_1g^{\tau-1}+q_2g^{\tau-2}+\cdots+q_{\tau-1}g+q_\tau,$$
$$B=q_{\tau+1}g^{\tau-1}+q_{\tau+2}g^{\tau-2}+\cdots+q_{2\tau-1}g+q_{2\tau}.$$

Отсюда слѣдуетъ далѣе:

$$z\cdot\frac{g^\tau+1}{n}=\frac{Ag^\tau+B}{g^\tau-1}$$

или

$$z\cdot\frac{g^\tau+1}{n}=A+\frac{A+B}{g^\tau-1}.$$

Во всякомъ случаѣ, $\frac{A+B}{g^\tau-1}$ тогда и только тогда можетъ быть цѣлымъ числомъ, если $\frac{g^\tau+1}{n}$ есть число цѣлое. Такъ какъ каждое изъ этихъ двухъ цѣлыхъ чиселъ A и B несомнѣнно меньше, чѣмъ $g^\tau-1$ (дѣйствительно, періодъ не можетъ состоять исключительно изъ цыфръ $\overline{g-1}$, такъ какъ въ этомъ случаѣ t было бы равно нечетному числу: единица), то $A+B<2(g^\tau-1)$. Слѣдовательно, если дробь $\frac{A+B}{g^\tau-1}$ есть цѣлое число, то послѣднее можетъ быть только 1, а отсюда слѣдуетъ:

$$A+B=g^\tau-1,$$

т.-е. $A+B$ равно числу, состоящему изъ τ цыфръ $\overline{g-1}$. Это возможно лишь въ томъ случаѣ, если одновременно удовлетворяются слѣдующія равенства:

$$q_1 + q_{\tau+1} = g - 1,$$
$$q_2 + q_{\tau+2} = g - 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$q_\tau + q_{2\tau} = g - 1.$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ выводу:

Если показатель t, къ которому принадлежитъ g по модулю n, есть число четное, и если при этомъ $g^{\frac{1}{2}t}+1$ дѣлится на n, то періодъ каждой дроби, знаменатель которой равенъ n, а числитель число простое съ n, распадается на двѣ части, состоящія изъ одинаковаго числа цыфръ, такимъ образомъ, что сумма цыфръ первой и второй части, стоящихъ на соотвѣтственныхъ мѣстахъ, равна $g-1$. (Въ случаѣ десятичныхъ дробей она, слѣдовательно, равна 9).

Вмѣстѣ съ этимъ, для знаменателей n, удовлетворяющихъ условіямъ теоремы, имѣетъ мѣсто слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{z \cdot (g^\tau + 1)}{n} = A + 1;$$

такимъ образомъ, значеніе періодической систематической дроби будетъ:

$$\frac{z}{n} = \frac{A+1}{g^{\frac{1}{2}t}+1}.$$

Теперь остается только рѣшить вопросъ о томъ, въ какомъ случаѣ будетъ выполнено условіе:

$$g^{\frac{1}{2}t} + 1 \equiv 0 \ (\text{мод. } n)?$$

1. Пусть n равно произвольному простому числу p, по отношенію къ которому g принадлежитъ къ показателю t; такъ какъ согласно этому предположенію, на p дѣлится $g^t - 1$, но не $g^{\frac{1}{2}t} - 1$, то изъ равенства

$$g^t - 1 = (g^{\frac{1}{2}t} - 1)(g^{\frac{1}{2}t} + 1),$$

слѣдуетъ, что $g^{\frac{1}{2}t} + 1$ должно дѣлиться на p.

2. Пусть $n = p^m$ представляетъ изъ себя произвольную степень нечетнаго простого числа. Если теперь g, по отношенію къ простому числу p, само принадлежитъ къ показателю t', то пока-

затель t, къ которому принадлежитъ g по отношенію къ p^m имѣетъ форму $t=t'p^\lambda$, гдѣ λ есть или нуль, или цѣлое число (§ 5, стр. 140); если же t должно быть числомъ четнымъ, то то же самое приходится сказать и относительно t'. Теперь имѣемъ:

$$g^t-1=(g^{\frac{1}{2}t'p^\lambda}-1)\cdot(g^{\frac{1}{2}t'p^\lambda}+1).$$

Если бы первый множитель правой части дѣлился на p, то показатель $\frac{1}{2}t'p^\lambda$ долженъ былъ бы быть кратнымъ числа t', и тогда мы имѣли бы

$$t'p^\lambda=2t'\mu,$$

гдѣ μ означаетъ какое-либо цѣлое число, или

$$p^\lambda=2\mu.$$

Такое равенство не можетъ имѣть мѣста, такъ какъ число p, согласно предположенію, есть число нечетное. Слѣдовательно, первый множитель не дѣлится на p и поэтому второй $g^{\frac{1}{2}t}+1$ дѣлится на $n=p^m$.

Слѣдовательно, въ томъ случаѣ, когда знаменатель n есть простое число, или представляетъ любую степень нечетнаго простого числа, по отношенію къ которому g принадлежитъ къ четному показтелю, всегда имѣетъ мѣсто предложеніе, высказанное на стр. 150, т.-е. такой знаменатель n даетъ всегда періодъ, состоящій изъ двухъ симметричныхъ половинъ.

Такъ, напримѣръ, въ десятичной системѣ

$$\frac{1}{19}=0,\overline{052\ 631\ 578\ \|\ 947\ 368\ 421}\cdots$$

и сумма каждыхъ двухъ соотвѣтствующихъ цыфръ на самомъ дѣлѣ будетъ:

$$0+9=9,$$
$$5+4=9,$$
$$2+7=9 \text{ и т. д.;}$$

$$\frac{1}{121}=0,\overline{008\ 264\ 462\ 80\ \|\ 991\ 735\ 537\ 19}\cdots,$$

$$0+9=9,$$
$$0+9=9,$$
$$8+1=9 \text{ и т. д.}$$

Возможно, что и въ другихъ случаяхъ $g^{\frac{1}{2}t}+1$ дѣлится на n. Если $n=2^m$, то не всегда $g^{\frac{1}{2}t}+1\equiv 0$ (мод. n). На выводѣ (кстати сказать весьма нетрудномъ) условій, необходимыхъ для этого, мы, ради краткости, останавливаться не будемъ уже потому, что для интересующаго насъ главнымъ образомъ случая $g=10$, возможность $n=2^m$ исключена. Также мы не будемъ подробно останавливаться на изученіи условій, при которыхъ сравненіе $g^{\frac{1}{2}t}+1\equiv 0$ (мод. n) имѣетъ мѣсто для числа n, составленнаго изъ различныхъ первоначальныхъ множителей. Какъ на источникъ по этому вопросу укажемъ на программную работу A. Holtze (Domgymnasium zu Naumburg a. S., Ostern 1887): „Über periodische Dezimalbrüche und ihr Analogon in anderen Zahlensystemen“.

Въ качествѣ примѣра составныхъ чиселъ, для которыхъ въ десятичной системѣ вышеуказанное сравненіе имѣетъ мѣсто, назовемъ только еще числа вида $n=11\cdot p$, гдѣ p есть отличное отъ 11 простое число, по отношенію къ которому 10 принадлежитъ къ показателю 2τ, дѣлящемуся на 2, но не дѣлящемуся на 4; напримѣръ, если $p=7$, то $2\tau=6$; при $p=13$, $2\tau=6$ или при $p=19$; $2\tau=18$; такъ какъ 10 по отношенію къ 11 принадлежитъ къ показателю 2, то для $n=11p$ показатель $t=2\tau$. Такъ-какъ $10^\tau-1$ не дѣлится на p и оно же не дѣлится на 11 (такъ-какъ τ число нечетное) то, слѣдовательно, $10^\tau+1$ должно дѣлиться на $n=11\cdot p$ и въ дѣйствительности знаменатели 77, 143, 209 даютъ періоды съ двумя одинаковой длины частями, соотвѣтственныя цыфры которыхъ дополняютъ другъ друга до 9.

§ 8. Вычисленія съ приближенными значеніями.

A. Введеніе.

Мы уже видѣли въ § 4 этой главы (стр. 131 и 133), что при какихъ-либо вычисленіяхъ съ безконечными періодическими систематическими дробями, на самомъ дѣлѣ приходится оперировать лишь съ конечнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, т.-е., иными словами, замѣнять безконечную дробь приближеннымъ ея значеніемъ.

Если P представляетъ точное значеніе періодической систематической дроби и если $q_1, q_2, \cdots q_n$ суть первые n десятичныхъ знаковъ, то на основаніи § 4, имѣемъ:

$$q_0, q_1q_2\cdots q_n < P < q_0, q_1q_2\cdots(q_n+1).$$

Если ту или другую изъ этихъ конечныхъ систематическихъ дробей принять за приближенное значеніе P, то допущенная ошибка не будетъ превышать $\frac{1}{g^n}$ или $\frac{1}{10^n}$, если ограничиться разсмотрѣніемъ случая $g = 10$, т.-е. десятичными дробями, какъ это здѣсь и будетъ имѣть мѣсто. Допускаемую ошибку возможно уменьшить до $\frac{1}{2}$, если, въ случаѣ $q_{n+1} < 5$, выбрать меньшее изъ приближенныхъ значеній, а при $q_{n+1} \geqq 5$ большее; дѣйствительно, въ первомъ случаѣ имѣемъ:

$$q_0,\ q_1 q_2 \cdots q_n 0 < P < q_0,\ q_1 q_2 \cdots q_n 5,$$

во второмъ случаѣ:

$$q_0,\ q_1 q_2 \cdots q_n 5 \leqq P < q_0,\ q_1 q_2 \cdots (q_n + 1)\ 0$$

и допущенная ошибка не превышаетъ

$$\frac{5}{10^{n+1}} = \frac{0{,}5}{10^n}.$$

Въ дальнѣйшемъ [1]) будетъ установленъ опредѣленный смыслъ и для непеіодическихъ безконечныхъ десятичныхъ дробей, при чемъ будетъ показано, что, обрывая такія непеіодическія безконечныя дроби также на n-омъ знакѣ, получимъ отклоненіе отъ точнаго значенія (смыслъ котораго въ свое время будетъ опредѣленъ), не превышающее $\frac{1}{2}$ единицы послѣдняго удержаннаго десятичнаго знака.

Если съ такими приближенными значеніями станемъ выполнять какія либо дѣйствія, то, конечно, не получимъ абсолютно точнаго результата. Почти во всѣхъ задачахъ прикладной математики абсолютно-точнаго результата и не требуется, а, наоборотъ, достаточно, чтобы ошибка не превышала опредѣленнаго предѣла. Напримѣръ, если результатъ какого либо вычисленія выраженъ въ маркахъ, то въ полученномъ числѣ достаточно сохранить только два первыхъ десятичныхъ знака, при чемъ желательно, чтобы ошибка не превышала $\frac{1}{2}$ единицы, стоящей на 2-омъ мѣстѣ послѣ запятой; достаточность двухъ знаковъ послѣ запятой зависитъ отъ того, что доли пфениговъ нельзя осуществить.

Поэтому возникаетъ вопросъ: съ какой точностью слѣдуетъ брать числа, входящія въ данное вычисленіе, и какъ выполнить это

---

1) Гл. VI.

вычисленіе, чтобы получить результатъ съ опредѣленнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ и заданной степенью точности, не затрудняя себя при этомъ излишней работой?

До сихъ поръ мы говорили о вычисленіяхъ съ такими числами, которыя хотя и отступали отъ точнаго значенія, но мы могли по нашему произволу уменьшить допускаемую при этомъ ошибку, сохраняя достаточно большое число десятичныхъ знаковъ; въ задачахъ же прикладной математики приходится встрѣчаться и съ числами, уже содержащими въ себѣ нѣкоторую погрѣшность, уменьшать которую до желаемаго предѣла не въ нашихъ силахъ. Это можно сказать относительно всѣхъ результатовъ физическихъ наблюденій, которыя, несмотря на всю тщательность, не могутъ быть абсолютно точными; напротивъ, мы должны довольствоваться тѣмъ, что удается установить предѣлъ, за который не переходитъ ошибка и который зависитъ отъ характера опыта. Если надъ числами, полученными изъ наблюденій подобнаго рода, будутъ выполняться извѣстныя дѣйствія, то результаты, само собой понятно, окажутся неточными, и получаемую при этомъ ошибку нельзя произвольно уменьшить. Въ этомъ случаѣ ближайшей задачей является опредѣленіе лишь той точности, которой можетъ обладать окончательный результатъ, а, кромѣ того, рѣшеніе вопроса, сколько знаковъ сохранить у входящихъ въ вычисленіе чиселъ перваго рода (т.-е. такихъ, которыя можно вычислить съ какой угодно точностью) и какъ сократить самое вычисленіе, чтобы неточность данныхъ не вызвала замѣтнаго отклоненія отъ разъ принятаго предѣла погрѣшности. Исчерпывающее рѣшеніе указанныхъ сейчасъ вопросовъ не входитъ въ задачи этой книги; мы ограничимся лишь тѣмъ, что подчеркнемъ основную точку зрѣнія и изложимъ, возможно полно, простѣйшіе, наиболѣе важные случаи. Для болѣе подробнаго ознакомленія съ вопросомъ отсылаемъ къ спеціальной литературѣ [1]).

Прежде всего мы перейдемъ къ изложенію первой изъ двухъ указанныхъ задачъ.

---

[1]) Главнымъ образомъ къ книгѣ J. Lüroth. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig 1900. Изъ другихъ, относящихся сюда трудовъ, мы назовемъ еще лишь соотвѣтствующіе отдѣлы у J. Tannery, Leçons d'arithmétique théorique et pratique. Paris, 2 éd. 1900; J. Griess, Approximations numériques, Paris 1898; E. Kullrich, Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung Programm der Realschule zu Schöneberg 1898.

В. Вычисленія съ такими приближенными значеніями, которыя въ силу какого-либо алгориѳма могутъ быть получены съ произвольнымъ числомъ знаковъ.

I. Сложеніе.

Если требуется получить сумму n десятичныхъ чиселъ съ m цыфрами послѣ запятой, то слѣдуетъ, прежде всего, въ каждомъ слагаемомъ сохранить $m+\mu$ десятичныхъ знаковъ, такъ, чтобы ошибка въ каждомъ слагаемомъ была $\leqq \frac{0,5}{10^{m+\mu}}$ или $\leqq \frac{0,5}{10^{\mu}} \cdot \frac{1}{10^{m}}$. Такъ какъ при сложеніи приближенныхъ значеній, въ самомъ невыгодномъ случаѣ, всѣ ошибки будутъ складываться, то предѣлъ ошибки n членной суммы есть $\frac{n \cdot 0,5}{10^{\mu}} \cdot \frac{1}{10^{m}}$. Увеличивая μ, мы можемъ сдѣлать ошибку сколь угодно малой. Если требуется, чтобы ошибка не превышала единицы $m^{-\text{го}}$ десятичнаго знака, а $n \leqq 20$, то достаточно положить $\mu = 1$. Если при такомъ же предположеніи относительно числа слагаемыхъ, ошибка не должна превышать $\frac{1}{10}$ m-го знака, то придется положить $\mu = 2$. Этотъ предѣлъ ошибки относится къ суммѣ съ $\mu + m$ десятичными знаками. Въ практическихъ же задачахъ совсѣмъ нельзя сохранять произвольное число десятичныхъ знаковъ. Если, напримѣръ, единицы имѣютъ наименованіе „марки", то вычисленіе приходится обрывать на второмъ десятичномъ знакѣ, такъ какъ нельзя уплачивать менѣе 1 пфенига; если единицами являются „килограммы" и, при наличныхъ средствахъ (вѣсы и разновѣски) нельзя отвѣшивать количества меньшаго одного миллиграмма, то нельзя оставлять послѣ запятой болѣе шести десятичныхъ знаковъ. При уменьшеніи числа знаковъ съ $m+\mu$ до m, присоединяется новая ошибка, которая зависитъ отъ значенія $m+1$-го десятичнаго знака; слѣдующая маленькая таблица даетъ для каждаго возможнаго значенія $m+1^{\text{го}}$ десятичнаго знака высшій предѣлъ возникающей при этомъ ошибки.

Значеніе $(m+1)$-го знака.	Высшій предѣлъ получающейся ошибки.
0 или 9	$\frac{0,1}{10^m}$
1 или 8	$\frac{0,2}{10^m}$

Значеніе $(m+1)$-го знака.	Высшій предѣлъ получающейся ошибки.
2 или 7	$\frac{0{,}3}{10^m}$
3 или 6	$\frac{0{,}4}{10^m}$
4 или 5	$\frac{0{,}5}{10^m}$

Сдѣлать эту ошибку произвольно малой не въ нашихъ силахъ. Если надлежащимъ подборомъ μ (см. предыд. стр.) достигнуть того, что первая ошибка не будетъ превышать $\frac{0.1}{10^m}$, то окончательная ошибка въ зависимости отъ значенія $m+1^{\text{го}}$ десятичнаго знака не будетъ превышать

$$\frac{0.2}{10^m}, \text{ или, соотвѣтственно, } \frac{0{,}3}{10^m}, \frac{0{,}4}{10^m}, \frac{0{,}5}{10^m} \text{ или } \frac{0{,}6}{10^m}.$$

Въ случаѣ, если $m+1$-ый десятичный знакъ будетъ равенъ 4 или 5, мы не найдемъ значенія для μ, столь большого, чтобы высшій предѣлъ ошибки былъ равенъ только половинѣ единицы m-го десятичнаго знака. Напротивъ, мы съ увѣренностью можемъ утверждать, что если въ каждомъ слагаемомъ (предполагая число ихъ не болѣе 20) сохранить два лишнихъ десятичныхъ знака, и послѣ сложеніи въ суммѣ съ $m+2$ десятичными знаками удержать m десятичныхъ знаковъ, ошибка будетъ во всякомъ случаѣ меньше, чѣмъ $\frac{0{,}6}{10^m}$, а, слѣдовательно, a fortiori меньше, чѣмъ единица послѣдняго, удержаннаго десятичнаго знака.

II. Относительно **вычитанія** можно сказать то же самое, что и о сложеніи.

III. **Умноженіе.**

Поставленная задача заключается въ томъ, чтобы два данныхъ десятичныхъ числа A и B, взятыхъ съ любымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, перемножить такъ, чтобы произведеніе содержало заданное напередъ число (m) десятичныхъ знаковъ съ наименьшей возможной ошибкой, и чтобы при этомъ вычисленія были освобождены отъ всякихъ лишнихъ выкладокъ, безполезныхъ при заданной точности. Умноженіе выполняется слѣдующимъ образомъ (гл. I, § 10 E и гл. III, § 3 C): множимое A

умножаютъ на отдѣльныя цыфры множителя B, и полученныя отдѣльныя произведенія складываютъ. Такъ какъ помѣстное значеніе отдѣльныхъ цыфръ легче всего сообразить при умноженіи на единицы, то цѣлесообразно оба данныхъ числа A и B преобразовать такъ, чтобы множитель B содержалъ только одну цыфру передъ запятой. Этого можно достигнуть перенесеніемъ запятой въ начальномъ числѣ B черезъ извѣстное число цыфръ вправо или влѣво; чтобы не измѣнить при этомъ значенія произведенія, приходится во множимомъ A перемѣстить запятую на столько же знаковъ въ противоположномъ направленіи. Окончательный результатъ получается сложеніемъ столькихъ частныхъ произведеній, сколько цыфръ множителя принято во вниманіе при вычисленіи. Такъ какъ при сложеніи частныхъ произведеній всѣ ошибки могутъ складываться, то мы должны, если желаемъ получить окончательное произведеніе съ m десятичными знаками и съ возможно меньшей ошибкой, каждое частное произведеніе вычислить больше, чѣмъ съ m знаками, напримѣръ, съ $m+\mu$ знаками (ср. I, сложеніе), при чемъ μ требуется еще опредѣлить. Если при самомъ началѣ вычисленія множимое взять только съ $m+\mu$ десятичными знаками, то ошибка перваго частнаго произведенія, получающагося при умноженіи на единицы множителя, въ самомъ невыгодномъ случаѣ, была бы равна $\frac{0,5}{10^{m+\mu}}\cdot 9 = 4,5$ единицъ, стоящихъ на $m+\mu$ мѣстѣ послѣ запятой. Чтобы уменьшить эту ошибку, мы оборвемъ множимое лишь послѣ $(m+\mu+\mu')$ знаковъ (разумѣется увеличивая на единицу послѣдній десятичный знакъ, въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ это нужно); такимъ образомъ, предѣльная ошибка получаемаго произведенія будетъ

$$\frac{4.5}{10^{\mu'}}\cdot\frac{1}{10^{m+\mu}}.$$

При переходѣ отъ числа, содержащаго $m+\mu+\mu'$ знаковъ къ числу, содержащему $m+\mu$ знаковъ, будетъ сдѣлана снова ошибка (ср. I, сложеніе), которая въ самомъ невыгодномъ случаѣ, т.-е. при условіи, что $(m+\mu+1)$-ый десятичный знакъ есть 4 или 5, будетъ равна $\frac{0,5}{10^{m+\mu}}$ и уменьшить ее не въ нашихъ силахъ. Такъ какъ вслѣдствіе этого окончательная ошибка произведенія, содержащаго $m+\mu$ знаковъ будетъ $\left(\frac{4,5}{10^{\mu'}}+0,5\right)\frac{1}{10^{m+\mu}}$ и во всякомъ случаѣ, какъ бы велико ни брать μ', эту ошибку нельзя сдѣлать меньше половины единицы, стоящей на $m+\mu$-омъ мѣстѣ послѣ запятой, то мы удовлетворимся тѣмъ, что предѣлъ ошибки доведемъ до единицы послѣдняго знака; для этого достаточно, чтобы значеніе μ' было равно 1. Такимъ образомъ, въ началѣ вычисленія слѣдуетъ число знаковъ множимаго уменьшить до $m+\mu+1$, и тогда оно будетъ имѣть слѣдующую форму:

$$A=\frac{a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot 10+a_n+\frac{a'}{10}}{10^{m+\mu}}=\frac{A'}{10^{m+\mu}},$$

въ то время, какъ множитель имѣетъ видъ:

$$B=b_0+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\frac{b_3}{10^3}+\cdots$$

Если умножить A' [1]) на единицы множителя, т.-е. составить частное произведеніе:

$$\left(a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot 10+a_n+\frac{a'}{10}\right)\cdot b_0$$

и удержать въ немъ цѣлую часть, то допущенная ошибка произведенія $A'b_0$, въ самомъ выгодномъ случаѣ, не будетъ превышать $\frac{0.5}{10}\cdot 9+0{,}5$, а, слѣдовательно, навѣрное меньше единицы. При умноженіи на $\frac{b_1}{10}$ можно послѣдній членъ множимаго, т.-е. $\frac{a'}{10}$ отбросить, при чемъ послѣднюю цыфру увеличить до a_n+1, если $a'\geqq 5$; при этомъ можно быть увѣреннымъ, что если снова удержать въ частномъ произведеніи лишь цѣлую часть, то ошибка останется все-таки меньше единицы; при умноженіи на $\frac{b_2}{10^2}$ слѣдуетъ во множимомъ отбросить цыфру a_n и т. д., пока, наконецъ, не дойдемъ до умноженія $\frac{b_n}{10^n}$ на $a_1\cdot 10^{n-1}$, замѣнивъ въ случаѣ необходимости a_1 черезъ a_1+1, если $a_2\geqq 5$. Въ каждомъ частномъ произведеніи ошибка менѣе единицы, а въ суммѣ $(n+1)$ частныхъ произведеній меньше, чѣмъ $n+1$. Такая ошибка является слѣдствіемъ отбрасыванія цыфръ во мно-

---

1) Замѣну A черезъ A', т.-е. разсмотрѣніе цыфръ $(m+\mu)$ десятичныхъ знаковъ числа A, какъ единицъ, дѣлаемъ лишь для болѣе короткаго и удобнаго способа выраженія.

жимомъ. Если теперь множитель оборвать на знакѣ $\frac{b_n}{10^n}$, то намъ придется совершенно отбросить произведеніе

$$A' \cdot \left(\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots \right),$$

но такъ какъ все-таки

$$A' < 10^n \text{ и } \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots < \frac{1}{10^n},$$

то ошибка, получаемая при отбрасываніи цыфръ во множителѣ, будетъ меньше $10^n \cdot \frac{1}{10^n} = 1$. Окончательная ошибка полученнаго такимъ образомъ и выраженнаго въ цѣлыхъ единицахъ произведенія $A' \cdot B$ будетъ меньше $n + 2$, а ошибка произведенія, содержащаго $m + \mu$ десятичныхъ знаковъ, будетъ менѣе, чѣмъ $\frac{n+2}{10^{m+\mu}}$. Если полученное теперь произведеніе замѣнить числомъ съ m знаками, то присоединится еще ошибка, наибольшее значеніе которой есть $\frac{0{,}5}{10^m}$ (см. I, сложеніе). Возможная ошибка произведенія съ m десятичными знаками, слѣдовательно, будетъ менѣе, чѣмъ $\left(\frac{n+2}{10^\mu} + 0{,}5\right) \frac{1}{10^m}$. Соотвѣтствующимъ подборомъ значенія μ первое слагаемое можно сдѣлать сколь угодно малымъ; со вторымъ слагаемымъ этого сдѣлать нельзя. Такимъ образомъ, мы видимъ, что не всегда можно достигнуть того, чтобы ошибка была меньше $\frac{1}{2}$ единицы послѣдняго удержаннаго знака. Поэтому, если удовлетвориться тѣмъ, чтобы предѣлъ ошибки равнялся единицѣ m-го знака, придется μ подобрать такъ, чтобы $\frac{n+2}{10^\mu} \leqq \frac{1}{2}$. При $n \leqq 3$ было бы вполнѣ достаточно значенія $\mu = 1$. Чтобы имѣть возможность дать общее правило для всѣхъ случаевъ, встрѣчающихся на практикѣ, достаточно положить $\mu = 2$; это значеніе μ годится при любомъ $n \leqq 48$. На основаніи всего изложеннаго, задача, поставленная въ началѣ пункта III, стр. 156—157, разрѣшается слѣдующимъ образомъ:

Если требуется перемножить два десятичныхъ числа, изъ которыхъ каждое можетъ быть дано съ любымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, такъ, чтобы произведеніе содержало m знаковъ послѣ запятой и допускаемая ошибка не превышала единицы послѣдняго десятичнаго знака, то прежде всего ставимъ во множителѣ запятую послѣ первой, отличной отъ нуля цыфры, а во множимомъ переносимъ запятую черезъ столько же знаковъ, какъ и во множителѣ, но въ обратномъ направленіи. Удерживаемъ во множимомъ $m+3$ цыфры послѣ запятой, а во множителѣ столько цыфръ, чтобы и во множимомъ и множителѣ ихъ было поровну. Послѣ этого начинаемъ умноженіе съ единицъ множителя и полученное частное произведеніе, состоящее изъ $m+3$ десятичныхъ знаковъ, округляемъ въ умѣ до $m+2$ знаковъ; затѣмъ отбрасываемъ во множимомъ одну цыфру, увеличивая послѣднюю, удержанную цыфру единицей тамъ, гдѣ это нужно, и умножаемъ на первый десятичный знакъ; число десятичныхъ знаковъ полученнаго произведенія округляемъ до $m+2$; умноженіе продолжаемъ до тѣхъ поръ, пока не умножимъ на всѣ записанныя цыфры множителя. Если затѣмъ сложить всѣ полученныя съ $m+2$ десятичными знаками частныя произведенія, и въ этой суммѣ удержать m знаковъ, то получимъ искомое значеніе произведенія съ ошибкой, несомнѣнно меньшей, чѣмъ единица m-го десятичнаго знака.

Если вычисленіе расположить такъ, чтобы первая цыфра множителя стояла подъ послѣдней цыфрой множимаго, вторая подъ предпослѣдней и т. д., то при образованіи частныхъ произведеній придется начинать всегда съ той цыфры множимаго, которая какъ разъ стоитъ надъ соотвѣтствующей цыфрой множителя.

IV. **Дѣленіе.** Пусть числа P и A могутъ быть даны съ произвольнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ и искомое частное $P:A$ требуется получить съ заданнымъ числомъ (n) десятичныхъ знаковъ такъ, чтобы съ одной стороны ошибка въ n-значномъ десятичномъ числѣ была возможно меньше, а съ другой стороны было исключено изъ вычисленій все лишнее. Для облегченія опредѣленія размѣра ошибки поставимъ въ A запятую послѣ первой отличной отъ нуля цыфры; конечно, тогда и въ P придется перенести запятую въ томъ же направленіи и черезъ столько же цыфръ. Въ измѣненномъ такимъ образомъ дѣлимомъ оставляемъ послѣ запятой $m+2$ десятичныхъ знака. Изслѣдованіе покажетъ, что меньшее число десятичныхъ знаковъ нарушитъ точность, а большее окажется излишнимъ. Пусть согласно этому [1])

$$P = p_m \cdot 10^m + p_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + p_1 \cdot 10 + p_0 +$$
$$+ \frac{p_1'}{10} + \frac{p_2'}{10^2} + \cdots + \frac{p'_n}{10^n} + \frac{p'_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{p'_{n+2}}{10^{n+2}}.$$

Коэффиціенты p, p' и т. д. всѣ меньше 10, лишь p_m можетъ быть числомъ, образованнымъ двумя первыми цыфрами—въ томъ случаѣ, если первая цыфра дѣлителя имѣетъ значеніе большее первой цифры дѣлимаго; въ такомъ случаѣ частное B имѣетъ слѣдующій видъ:

$$b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_0 + \frac{b_1'}{10} + \frac{b_2'}{10^2} + \cdots,$$

гдѣ b_m, несомнѣнно, отлично отъ нуля.

Чтобы въ первомъ получаемомъ частномъ произведеніи P_1 имѣть по возможности точный $(n+2)$-ой десятичный знакъ, напишемъ сперва дѣлитель до того десятичнаго знака, который при умноженіи на $b_m \cdot 10^m$, даетъ намъ $(n+3)$-ью цифру послѣ запятой, т.-е. до $(m+n+3)$-го знака; слѣдовательно, дѣлитель первоначально будетъ имѣть такой видъ:

$$A = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{m+n+2}}{10^{m+n+2}} + \frac{a_{m+n+3}}{10^{m+n+3}}.$$

Такъ какъ P взято съ $(n+2)$-мя десятичными знаками, а A съ $(m+n+3)$-мя знаками, то ошибки, допущенныя въ числахъ P и A, не будутъ превышать соотвѣтственно

$$\pi = \frac{0{,}5}{10^{n+2}} \text{ и } \alpha = \frac{0.5}{10^{m+n+3}}.$$

Умножая дѣлитель на первый знакъ частнаго, т.-е. на $b^m 10^m$, получимъ первое частное произведеніе

$$P_1 = A \cdot b^m \cdot 10^m,$$

[1]) Если дѣлимое не содержитъ цѣлой части, и имѣетъ, допустимъ, видъ:

$$0, \overbrace{0 \ldots 0}^{(\nu \text{ нулей})} p'_{\nu+1} p'_{\nu+2} \ldots,$$

то можно $10^{\nu+1}$ кратное дѣлимаго $p'_{\nu+1}$, $p'_{\nu+2} \ldots$ раздѣлить на тотъ же дѣлитель, частное опредѣлить съ $n-(\nu+1)$ десятичными знаками и въ концѣ произвести дѣленіе на $10^{\nu+1}$.

содержащее $(n+3)$ десятичныхъ знака, и округляемъ его въ умѣ до $(n+2)$ десятичныхъ знаковъ; ошибка, допущенная въ числѣ съ $n+3$ знаками, будетъ, несомнѣнно, не больше чѣмъ $\alpha \cdot 9 \cdot 10^m = \frac{4,5}{10^{n+3}} = \frac{0,45}{10^{n+2}}$. При уменьшеніи числа десятичныхъ знаковъ до $n+2$ прибавится ошибка, не превышающая $\frac{0,5}{10^{n+2}}$; такимъ образомъ, высшій предѣлъ ошибки въ числѣ P_1 имѣетъ значеніе $\pi_1 = \frac{0,95}{10^{n+2}}$; при этомъ мы заранѣе предполагали, что цыфра b_m вполнѣ точная; къ обоснованію этого предположенія мы еще вернемся. Теперь опредѣлимъ разность $P - P_1 = R_1$. Такъ какъ при вычитаніи, въ самомъ невыгодномъ случаѣ, ошибки чиселъ P и P_1 будутъ складываться, то наивысшее значеніе ошибки въ числѣ R_1 будетъ равно

$$\rho_1 = \pi + \pi_1 = \frac{0,5 + 0,95}{10^{n+2}}.$$

Первая цыфра частнаго $R_1 : A$ даетъ второй знакъ $b_{m-1} \cdot 10^{m-1}$ искомаго результата. Чтобы слѣдующее частное произведеніе

$$P_2 = A \cdot b_{m-1} \cdot 10^{m-1}$$

получить съ $(n+3)$-мя знаками, приходится въ A взять только $m+n+2$ знака, т.-е. отбросить послѣднюю цыфру дѣлителя, не забывая при этомъ о соотвѣтственномъ увеличеніи предпослѣдняго знака. Если дѣлитель, округленный такимъ образомъ, обозначить черезъ A_1, то наибольшее значеніе ошибки α_1 числа A_1 будетъ равно $\frac{0,5}{10^{m+n+2}}$. Предполагая, что и b_{m-1} есть точная цыфра, мы увидимъ, что наибольшее значеніе ошибки произведенія $A_1 \cdot b_{m-1} \cdot 10^{m-1}$, содержащаго $n+3$ десятичныхъ знака, будетъ равно

$$\frac{0,5}{10^{m+n+2}} \cdot 9 \cdot 10^{m-1} = \frac{0,45}{10^{n+2}}.$$

Уменьшая число знаковъ до $n+2$, мы присоединимъ сюда ошибку, наибольшее значеніе которой равно $\frac{0,5}{10^{n+2}}$; и, такимъ образомъ, возможная ошибка числа P_2 будетъ меньше чѣмъ $\pi_2 = \frac{0,95}{10^{n+2}}$, а возможная ошибка разности $R_1 - P_2 = R_2$ будетъ меньше чѣмъ

$\rho_2 = \rho_1 + \pi_2 = \frac{0{,}5 + 2 \cdot 0{,}95}{10^{n+2}}$. При слѣдующемъ дѣленіи въ дѣлителѣ можно отбросить еще одинъ десятичный знакъ, и тогда получимъ число A_2, наибольшее значеніе погрѣшности котораго будетъ равно $\alpha_2 = \frac{0{,}5}{10^{m+n+1}}$ и т. д.

Такимъ образомъ, дальнѣйшими дѣленіями получаемъ отдѣльныя цыфры частнаго въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\begin{array}{ll}
P : A = b_m \cdot 10^m; & R_1 : A_1 = b_{m-1} \cdot 10^{m-1}; \\
\underline{P_1} & \underline{P_2} \\
R_1 & R_2 \\
& \\
R_2 : A_2 = b_{m-2} \cdot 10^{m-2}; \cdots & R_i : A_i = b_{m-i} \cdot 10^{m-i} \\
\underline{P_3} & \underline{P_{i+1}} \\
R_3 & R_{i+1}
\end{array}$$

При этомъ, если $i > m$, вмѣсто b_{m-i} приходится писать b'_{i-m} и вмѣсто 10^{m-i} писать $\frac{1}{10^{i-m}}$.

Наибольшія значенія, которыя могутъ имѣть погрѣшности чиселъ A_i и R_i будутъ соотвѣтственно равны

$$\alpha_i = \frac{0{,}5}{10^{m+n+3-i}} \text{ и } \rho_i = \frac{0{,}5 + i \cdot 0{,}95}{10^{n+2}}.$$

Предполагая теперь, что всѣ цыфры b_m, b_{m-1}, $b_{m-2}, \cdots b_{m-i+1}$ найдены вѣрно, изслѣдуемъ, какое вліяніе могутъ имѣть погрѣшности чиселъ R_i и A_i на точность цыфры b_{m-i}.

Такъ какъ намъ извѣстно лишь то, что точное значеніе R_i заключено между $R_i - \rho_i$ и $R_i + \rho_i$, а значеніе A_i между $A_i - \alpha_i$ и $A_i + \alpha_i$, то мы съ увѣренностью можемъ утверждать, что недостающая часть частнаго $b_{m-i} \cdot 10^{m-i} + \cdots$ меньше, чѣмъ

$$O_i = \frac{R_i + \rho_i}{A_i - \alpha_i}$$

и больше, чѣмъ

$$U_i = \frac{R_i - \rho_i}{A_i + \alpha_i}.$$

Отсюда имѣемъ:

$$O_i - U_i = 2 \cdot \frac{A_i \rho_i + R_i \alpha_i}{A_i^2 - \alpha_i^2} = 2 \cdot \frac{\rho_i + \frac{R_i}{A_i} \cdot \alpha_i}{A_i \left(1 - \frac{\alpha_i^2}{A_i^2}\right)}.$$

Такъ какъ $\frac{R_i}{A_i} < 10^{m-i+1}$, то наибольшее значеніе, которое можетъ имѣть числитель написанной дроби, равно

$$\frac{0.5 + i\cdot 0.95}{10^{n+2}} + \frac{0.5}{10^{n+2}} = \frac{1 + i\cdot 0.95}{10^{n+2}}.$$

α_i увеличивается вмѣстѣ съ возрастаніемъ индекса i, но тѣмъ не менѣе даже если вычисленіе частнаго продолжить до $n+2$-го десятичнаго знака, т.-е. до $i = m + n + 2$, то и тогда $\alpha_i = \frac{0.5}{10} = \frac{1}{20}$. Такъ какъ $A_i > 1$, то безусловно $\frac{\alpha_i^2}{A_i^2} < \frac{1}{400}$, и поэтому знаменатель выше найденной дроби, дающей разность $O_i - U_i$, больше, чѣмъ $\frac{399}{400}$, слѣдовательно:

$$O_i - U_i < 2\cdot\frac{1 + i\cdot 0.95}{10^{n+2}}\cdot\frac{400}{399}.$$

Слѣдовательно, для небольшихъ значеній индекса i, O_i можетъ отличаться отъ U_i только на нѣсколько единицъ $n+2$-го знака, а для наибольшихъ, возможныхъ на практикѣ значеній i, эти два числа могутъ отличаться только на нѣсколько единицъ $n+1$-го знака; слѣдовательно, пока $m+n$ не превышаетъ 20, мы можемъ предполагать $O_i - U_i < \frac{5}{10^{n+1}}$.

Такимъ образомъ, вообще, при $i \leqq m + n$

$$O_i = b_{m-i}\cdot 10^{m-i} + \cdots$$

и

$$U_i = b_{m-i}\cdot 10^{m-i} + \cdots$$

начинаются съ одной и той же цыфры b_{m-i}. Но тогда и первая цыфра частнаго $R_i : A_i$ должна быть та же, что и первая цыфра точнаго значенія недостающей части частнаго, такъ какъ $R_i : A_i$ и недостающая часть частнаго заключены между O_i и U_i. Если не принимать во вниманіе одного исключительнаго случая, который мы вскорѣ разсмотримъ, то можно утверждать, что

$$O_{m+n+1} = \frac{b_{n+1}^{(0)}}{10^{n+1}} + \cdots$$

и

$$U_{m+n+1} = \frac{b_{n+1}^{(u)}}{10^{n+1}} + \cdots,$$

могутъ отличаться уже первымъ десятичнымъ знакомъ. Цыфра b'_{n+1}, которая находится дѣленіемъ $R_{m+n+1} : A_{m+n+1}$ не можетъ отличаться отъ точнаго значенія на величину, большую разности между $b^{(0)}_{n+1}$ и $b^{(u)}_{n+1}$ т.-е. ошибка несомнѣнно будетъ меньше 5 единицъ $n+1$-го знака. Если затѣмъ число десятичныхъ знаковъ въ частномъ уменьшить до n, то прибавится еще ошибка, не превышающая 5 единицъ $n+1$-го знака и, такимъ образомъ, общая ошибка частнаго, вычисленнаго съ n десятичными знаками, безъ сомнѣнія, не будетъ превышать единицы послѣдняго (n-го) десятичнаго знака.

Въ особыхъ случаяхъ можетъ тѣмъ не менѣе оказаться, что уже для значеній i, меньшихъ или равныхъ $m+n$, O_i и U_i не будутъ начинаться съ одной и той же цыфры[1]); но такъ какъ $O_i - U_i < \frac{0,5}{10^n}$, то первая цыфра числа O_i (если $i \leqq m+n$) не можетъ ни въ какомъ случаѣ отличаться отъ первой цыфры числа U_i больше, чѣмъ на 1. Если въ этомъ случаѣ b_{m-i}, т.-е. первую цыфру O_i, и всѣ слѣдующіе за ней десятичные знаки включительно до n-го замѣнить нулями, то найденный такимъ образомъ результатъ будетъ отличаться отъ точнаго значенія частнаго меньше, чѣмъ на половину единицы n-го знака. На возможность отмѣченнаго случая указываетъ то обстоятельство, что R_i отличается отъ цѣлаго числа кратнаго $10^{m-i} \cdot A_i$, только послѣдними десятичными знаками. Изложенныя выше соображенія мы пояснимъ теперь на двухъ примѣрахъ.

1. Пусть требуется вычислить частное:

$$3,14\,159\,265\ldots : 1,41\,421\,356\ldots$$

съ четырьмя десятичными знаками.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ $m=0$, $n=4$, то въ дѣлимомъ приходится удержать $n+2=6$ десятичныхъ знаковъ, а въ дѣлителѣ $m+n+3=7$ знаковъ.

$$P = 3,141\,593 \qquad A = 1,4\,142\,136$$

$$\left(\pi = \frac{0,5}{10^6}\right) \qquad \left(a = \frac{0,5}{10^7}\right).$$

---

[1]) Такъ, напримѣръ, можетъ случиться:

$$O_i = 40,001\ \ldots$$

и

$$U_i = 39,998\ \ldots,$$

$$\begin{array}{l} (P = 3{,}141\,593) : (A = 1{,}4\,142\,136) = 2 \\ \underline{(P_1 = 2{,}828\,427)} \\ R_1 = 0{,}313\,166 \end{array} \qquad \left(\rho_1 = \frac{0{,}5 + 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$\begin{array}{l} (R_1 = 0{,}313\,166) : (A_1 = 1{,}414\,214) = 0{,}2 \\ \underline{(P_2 = 0{,}282\,843)} \\ R_2 = 0{,}030\,323 \end{array} \qquad \left(\rho_2 = \frac{0{,}5 + 2 \cdot 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$\begin{array}{l} (R_2 = 0{,}030\,323) : (A_2 = 1{,}41\,421) = 0{,}02 \\ \underline{(P_3 = 0{,}028\,284)} \\ R_3 = 0{,}002\,039 \end{array} \qquad \left(\rho_3 = \frac{0{,}5 + 3 \cdot 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$\begin{array}{l} (R_3 = 0{,}002\,039) : (A_3 = 1{,}4\,142) = 0{,}001. \\ \underline{(P_4 = 0{,}001\,414)} \\ R_4 = 0{,}000\,625 \end{array} \qquad \left(\rho_4 = \frac{0{,}5 + 4 \cdot 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$\begin{array}{l} (R_4 = 0{,}000\,625) : (A_4 = 1{,}414) = 0{,}0004 \\ \underline{(P_5 = 0{,}000\,566)} \\ R_5 = 0{,}000\,059 \end{array} \qquad \left(\rho_5 = \frac{0{,}5 + 5 \cdot 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$\begin{array}{l} (R_5 = 0{,}000\,059) : (A_5 = 1{,}41) = 0{,}00004 \\ \underline{(P_6 = 0{,}000\,056)} \\ R_6 = 0{,}000\,003 \end{array} \qquad \left(\rho_6 = \frac{0{,}5 + 6 \cdot 0{,}95}{10^6}\right).$$

Вычисленіе слѣдующихъ десятичныхъ знаковъ не имѣетъ смысла, такъ какъ ошибка, содержащаяся въ R_6 можетъ быть равна приблизительно 6 единицамъ шестого десятичнаго знака. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующее частное: $B = 2{,}22\,144$ съ 5 десятичными знаками; въ точности пятаго знака уже можно сомнѣваться, но ошибка въ немъ во всякомъ случаѣ меньше, чѣмъ

$$2 \cdot \frac{1 + 5 \cdot 0{,}95}{10^6} \cdot \frac{400}{399}.$$

т.-е. меньше 1,2 единицы пятаго знака.

Если въ B отбросить еще одну цыфру, то присоединяется еще ошибка равная четыремъ единицамъ пятаго знака. Слѣдовательно, если положить $B = 2{,}2214$, то возможная ошибка будетъ меньше, чѣмъ 0,52 единицъ послѣдняго (4-го) знака.

2. Пусть требуется вычислить частное

$$(P = 211{,}8281) : (A = 8{,}242\,344)$$

съ двумя десятичными знаками.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$m = 1,\ n = 2,\ \text{слѣдовательно},\ n + 2 = 4,\ m + n + 3 = 6.$$

$$\begin{array}{ll} (P\ = 211{,}8281) : (A = 8{,}242\,344) = 2 \cdot 10^1 & \\ \underline{(P_1 = 164{,}8469)} & \\ R_1 = 46{,}9812 & \left(\rho_1 = \dfrac{0.5 + 0.95}{10^4}\right); \\[2ex] (R_1 = 46{,}9812) \ : (A_1 = 8{,}24\,234) = 5 & \\ \underline{(P_2 = 41{,}2117)} & \\ R_2 = 5{,}7695 & \left(\rho_2 = \dfrac{0.5 + 2 \cdot 0.95}{10^4}\right). \end{array}$$

Хотя

$$(R_2 = 5{,}7695) : (A_2 = 8{,}2423)$$

даетъ въ частномъ $0{,}69\cdots$, но R_2 меньше $A_2 \cdot 0{,}7$ только на единицу 4-го знака.

Такъ какъ $O_2 = \dfrac{5.7695 + 0.00024}{8.2423 - 0.00005} > 0{,}7$, то мы здѣсь имѣемъ тотъ случай, когда O_2 и U_2 начинаются съ различныхъ цыфръ, а именно, съ цыфръ 7 и 6. По указанному выше примемъ за приближенное значеніе искомаго частнаго 25,70. Такъ какъ

$$O_2 - U_2 < 2 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0.95}{10^4} \cdot \frac{400}{399},$$

т.-е. меньше, шести единицъ четвертаго знака, то въ результатѣ 25,70 ошибка несомнѣнно меньше 0,0006.

Въ обоихъ приведенныхъ примѣрахъ мы нарочно отдѣляли одно дѣленіе отъ другого, чтобы лучше выяснить родъ упрощенія. Само по себѣ понятно, что эти вычисленія на практикѣ можно соединять вмѣстѣ, каждый остатокъ R_1, $R_2 \ldots$ писать одинъ разъ и переходъ отъ A къ A_1, отъ A_1 къ A_2 и т. д. выполнять на первомъ дѣлителѣ.

V. Извлеченіе корня. Задача извлеченія квадратнаго корня изъ даннаго десятичнаго числа a, въ томъ случаѣ, когда этого корня не существуетъ въ нашей числовой области, сводится, при заданіи нѣкотораго цѣлаго числа ν, къ нахожденію двухъ десятичныхъ чиселъ $\frac{a}{10^\nu}$ и $\frac{a+1}{10^\nu}$, удовлетворяющихъ условію

$$\left(\frac{a}{10^\nu}\right)^2 < \alpha < \left(\frac{a+1}{10^\nu}\right)^2.$$

Эту задачу мы уже свели (стр. 118, гл. III, § 3 F) къ задачѣ, рѣшенной въ § 10 G, гл. I, ст. 52 и д., а именно, къ нахожденію такого цѣлаго числа a, чтобы

$$a^2 \leqq A' < (a+1)^2,$$

гдѣ A' есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\alpha \cdot 10^{2\nu}$. Теперь мы покажемъ, что можно значительно упростить тѣ длинныя вычисленія, которыми приходилось пользоваться въ томъ случаѣ когда A' было большимъ числомъ (см. § 10 G гл. I); это упрощеніе заключается въ томъ, что указанные пріемы достаточно примѣнить лишь для опредѣленія $n+1$ или $n+2$ цыфръ, смотря потому, будетъ ли искомое число a имѣть $2n+1$ или $2n+2$ цыфры; остальныя же n цыфръ могутъ быть опредѣлены при помощи простого дѣленія.

Обозначимъ черезъ A число, изображенное $n+1$-ой или $n+2$ первыми цыфрами корня, полученными непосредственнымъ извлеченіемъ, и приписанными къ нимъ n нулями, а черезъ R— остатокъ, получающійся послѣ нахожденія послѣдней значащей цыфры числа A; такимъ образомъ, получимъ:

$$A \geqq 10^{2n}$$

и

$$A' = A^2 + R.$$

Раздѣлимъ теперь остатокъ R на $2A$ и пусть при этомъ получится частное q и остатокъ r; тогда получимъ слѣдующее равенство:

$$\frac{R}{2A} = q + \frac{r}{2A} \left(\frac{r}{2A} < 1\right)$$

или

$$R = 2Aq + r.$$

Изъ

$$A^2 < A' < (A + 1 \cdot 10^n)^2$$

и

$$R = A' - A^2$$

слѣдуетъ:

$$R < (A + 10^n)^2 - A^2$$

и далѣе

$$\frac{R}{2A} < 10^n + \frac{10^{2n}}{2A},$$

но на основаніи того, что

$$A \geqq 10^{2n},$$

имѣемъ

$$\frac{R}{2A} < 10^n + \frac{1}{2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что q, наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\frac{R}{2A}$, не можетъ быть больше, чѣмъ 10^n.

Теперь докажемъ, что всегда

$$(A+q-1)^2 < A' < (A+q+1)^2.$$

Такъ какъ

$$2A > r,$$

то и

$$(q+1)^2 + 2A > r$$

и

$$2Aq + q^2 + 2q + 1 + 2A > R$$

и далѣе

$$A^2 + 2Aq + q^2 + 2q + 1 + 2A > A',$$

а это значитъ, что

$$(A+q+1)^2 > A'.$$

Если бы

$$(A + (q-1))^2 \geqq A',$$

то мы имѣли бы, что

$$2A(q-1) + (q-1)^2 \geqq R$$

и

$$2A(q-1) + (q-1)^2 \geqq 2Aq + r$$

или

$$(q-1) + \frac{(q-1)^2}{2A} \geqq q + \frac{r}{2A}.$$

Послѣднее соотношеніе невозможно, такъ какъ изъ того, что $q \leqq 10^n$ и $A \geqq 10^{2n}$ слѣдуетъ:

$$\frac{(q-1)^2}{2A} < \frac{10^{2n}}{2 \cdot 10^{2n}}, \text{ т.-е. } \frac{(q-1)^2}{2A} < \frac{1}{2}.$$

Итакъ, во всякомъ случаѣ

$$(A + (q-1))^2 < A' < (A + (q+1))^2.$$

Смотря потому, будетъ ли

$$r \gtreqless q^2,$$

$$R \gtreqless 2Aq + q^2$$

и

$$A' \gtreqless (A+q)^2.$$

Поэтому, если

1. $\boldsymbol{r = q^2}$, то $\boldsymbol{A' = (A+q)^2}$
2. $\boldsymbol{r > q^2}$, то $\boldsymbol{(A+q)^2 < A' < (A+q+1)^2}$
3. $\boldsymbol{r < q^2}$, то $\boldsymbol{(A+q-1)^2 < A' < (A+q)^2}$.

Сохраняя прежнія обозначенія, не трудно показать (ср. Lloyd Tanner, Note on approximate evolution, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. XXIII, 1892) что всегда

$$\left(A + \frac{R}{2A} - \frac{1}{2}\right)^2 < A' < \left(A + \frac{R}{2A}\right)^2.$$

Этимъ самымъ A' оказывается заключеннымъ между квадратами двухъ чиселъ, отличающихся другъ отъ друга лишь на $\frac{1}{2}$; но, вообще говоря, эти числа не будутъ цѣлыя.

Подобнымъ же образомъ при помощи простого дѣленія можно найти послѣднія цыфры и кубичнаго корня. (Ср. L. Tanner). Мы не станемъ останавливаться на этомъ, такъ какъ для извлеченія кубичнаго корня изъ многозначнаго числа обычно пользуются другими пріемами, о которыхъ мы будемъ говорить позднѣе (гл. V § 5 E).

С. Вычисленія съ неточными числами, погрѣшность которыхъ не можетъ быть сдѣлана произвольно малой.

Если числа a, b, c и т. д. опредѣлены изъ какихъ-либо наблюденій, напримѣръ, измѣреніемъ, взвѣшиваніемъ и др. то они вообще не будутъ точными значеніями измѣренныхъ величинъ; напротивъ, можно утверждать лишь, что точныя значенія лежатъ между $a-\alpha$ и $a+\alpha$, или $b-\beta$ и $b+\beta$, и $c-\gamma$ и $c+\gamma$, гдѣ α, β, γ по сравненію съ a, b и c малы и получаются въ зависимости отъ характера наблюденій. Если надъ найденными числами произведемъ какое-либо вычисленіе и полученный результатъ обозначимъ черезъ $f(a, b, c\ldots)$, то, конечно, этотъ результатъ даже и въ томъ случаѣ, если всѣ вычисленія продѣланы полностью и безъ всякихъ сокращеній, содержитъ опредѣленную ошибку. Указать ошибку, получающуюся въ результатѣ $f(a, b, c\ldots)$ любой совокупности дѣйствій здѣсь оказывается невозможнымъ[1]); поэтому мы ограничимся самыми простыми и важными частными случаями.

(I) $$x = f(a, b, c\ldots) = a + b + c + \cdots$$

Точное значеніе x лежитъ между

$$a+b+c-\alpha-\beta-\gamma \text{ и } a+b+c+\alpha+\beta+\gamma,$$

т.-е. наибольшее значеніе возможной ошибки равно суммѣ отдѣльныхъ ошибокъ чиселъ a, b, c, т.-е. $\alpha+\beta+\gamma$.

(II) $$x = f(a, b) = a - b.$$

Точное значеніе x заключено между

$$a-\alpha-(b+\beta) = a-b-\alpha-\beta \text{ и } a+\alpha-(b-\beta) = a+b-\alpha+\beta;$$

наибольшее значеніе возможной погрѣшности равно $\alpha+\beta$.

(III) $$x = f(a, b) = a \cdot b.$$

Точное значеніе x заключено между

$$(a-\alpha)\ (b-\beta) = ab - a\beta - b\alpha + \alpha\beta \quad \text{и}$$
$$(a+\alpha)\ (b+\beta) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

слѣдовательно, наибольшее значеніе возможной погрѣшности есть

$$\xi = b\alpha + a\beta + \alpha\beta.$$

Результатъ приметъ еще болѣе простую форму, если вмѣсто абсолютной погрѣшности ξ, которую только до сихъ поръ мы и

---

[1]) Если предположить знакомство съ элементами дифференціальнаго исчисленія, то, разлагая $f(a+\alpha,\ b+\beta,\ c+\gamma)$ въ рядъ, для возможной ошибки найдемъ значеніе $\varphi = \frac{\partial f}{\partial a}\cdot\alpha + \frac{\partial f}{\partial b}\cdot\beta + \frac{\partial f}{\partial c}\cdot\gamma$. То, что приведено въ текстѣ, представляетъ частные случаи этой формулы.

принимали въ соображеніе, ввести относительную погрѣшность, т.-е. частное, полученное отъ дѣленія ошибки даннаго числа на само число. Получаемъ:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b}.$$

Практически пригодны лишь тѣ полученныя изъ наблюденій числа a и b, для которыхъ относительныя ошибки $\frac{\alpha}{a}$ и $\frac{\beta}{b}$ малы; если это условіе выполнено, то возможно пренебречь произведеніемъ двухъ малыхъ чиселъ $\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b}$, стоящихъ въ правой части послѣдняго равенства, не допуская при этомъ замѣтной неточности; отсюда можно сдѣлать заключеніе, что относительная ошибка произведенія равна суммѣ относительныхъ ошибокъ каждаго изъ сомножителей. Это предложеніе не трудно распространить на произведеніе любого числа сомножителей; приравнявъ всѣ сомножители другъ другу, увидимъ, что относительная ошибка степени съ цѣлымъ показателемъ n равна n разъ взятой относительной ошибкѣ основанія.

(IV) $$x = f(a,\ b) = \frac{a}{b};$$

наибольшее значеніе, которое можетъ имѣть x есть $\frac{a+\alpha}{b-\beta}$, а наименьшее значеніе $= \frac{a-\alpha}{b+\beta}$; теперь имѣемъ

$$\frac{a+\alpha}{b-\beta} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha + a\beta}{b(b-\beta)}$$

и

$$\frac{a}{b} - \frac{a-\alpha}{b+\beta} = \frac{b\alpha + a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Допуская, что $\beta \cdot b$ очень мало, получаемъ максимальное значеніе ошибки числа x

$$\xi = \frac{b\alpha + a\beta}{b^2}$$

и относительную ошибку частнаго:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{b\alpha + a\beta}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b},$$

откуда видимъ, что наибольшее значеніе относительной ошибки частнаго равно суммѣ относительныхъ ошибокъ числителя и знаменателя.

$$\text{(V)} \qquad x = f(a) = \sqrt{a}.$$

Точное значеніе x заключено между $\sqrt{a-\alpha}$ и $\sqrt{a+\alpha}$; теперь имѣемъ

$\sqrt{a-\alpha} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1-\frac{\alpha}{a}}$; приближенное значеніе этого выраженія $= \sqrt{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a}\right)$, такъ какъ

$$\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a}\right)^2 = 1 - \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2$$

гдѣ, согласно тому предположенію, что $\frac{\alpha}{a}$ есть число малое, можно, пренебречь слагаемымъ $\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2$ безъ замѣтной ошибки. Такимъ же образомъ получимъ:

$$\sqrt{a+\alpha} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1+\frac{\alpha}{a}} \text{ или приближенно} = \sqrt{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{a}\right).$$

Наибольшее значеніе абсолютной ошибки x будетъ равно $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{a} \cdot \sqrt{a}$, а наибольшее значеніе относительной ошибки $\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a}$, слѣдовательно, оно равно половинѣ относительной ошибки подкоренного числа. Аналогично можно вычислить погрѣшность корня любой степени.

VI. Въ отдѣлахъ съ I по V мы вычислили то наибольшее значеніе, которое можетъ имѣть ошибка ξ, являющаяся результатомъ неточности чиселъ a, b, c по крайней мѣрѣ при простѣйшихъ видахъ $f(a, b, c, \cdots)$. Уменьшеніе этой ошибки уже не зависитъ отъ вычислителя; поэтому часто совершенно не имѣетъ смысла вычислять полностью выраженіе $f(a, b, c \cdots)$. Если напримѣръ $\xi = 0{,}001$, то во всякомъ случаѣ излишне вычислять $f(a, b, c \cdots)$ съ 5 или болѣе десятичными знаками; слѣдовательно, необходимо сперва установить предѣлъ возможной ошибки ξ для $f(a, b, c \cdots)$, зависящей отъ неточности чиселъ a, b, $c \cdots$ и затѣмъ, основываясь на этомъ, установить число десятичныхъ знаковъ, съ которымъ только и имѣетъ смыслъ вычислять $f(a, b, c \cdots)$. Затѣмъ пользуясь пріемами, указанными въ отдѣлѣ В этого §, слѣдуетъ ввести въ вычисленіе $f(a, b, c \cdots)$, а также тѣхъ десятичныхъ чиселъ p, q, $r \cdots$, которыя могутъ быть получены съ любымъ числомъ знаковъ, сокращенія, позволяющія тѣмъ не менѣе получить напередъ заданное число десятичныхъ знаковъ съ возможно меньшей ошибкой.

Примѣненіе указанныхъ пріемовъ мы поясннмъ на простомъ примѣрѣ изъ физики. Между радіусомъ r, коэффиціентомъ C тангенсъ буссоли и горизонтальной слагающей H земного магнетизма существуетъ слѣдующее соотношеніе:

$$H = \frac{C \cdot \pi}{5 \cdot r},$$

гдѣ размѣрность единицы H, выраженная въ системѣ $C. G. S$, есть

$$\frac{g^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot s},$$

C выражено въ амперахъ, а π для краткости написано вмѣсто числа 3, 14 159 265.

Пусть при помощи вольтаметра, включеннаго въ одну цѣпь съ тангенсъ-буссолью, найдено $C = 5{,}1$ амп. съ возможной ошибкой въ 0,1 амп., и пусть $r = 16{,}4$ см., съ возможной ошибкой въ 0,05 см. Возможная ошибка дроби $\frac{C}{r}$, получающаяся вслѣдствіе неточности чиселъ C и r, на основаніи IV, стр. 172 равна

$$\frac{16{,}4 \cdot 0{,}1 + 5{,}1 \cdot 0{,}05}{(16{,}4)^2} = \frac{1{,}895}{268{,}96},$$

и приближенно

$$= 0{,}007.$$

Такъ какъ $H = \frac{C}{r} \cdot \frac{\pi}{5}$, то даже если выполнить вычисленія съ наибольшей точностью и взять для значенія π дробь съ 8-ю десятичными знаками,—неустранимая возможная ошибка значенія H все-таки будетъ $0{,}007 \cdot \frac{\pi}{5}$, т. е. немного болѣе 4-хъ единицъ третьяго десятичнаго знака; слѣдовательно, во всякомъ случаѣ излишне вычислять послѣ запятой болѣе 3 знаковъ. Теперь, выполняя дѣленіе до третьяго знака послѣ запятой получимъ:

$$\frac{5{,}1}{16{,}4} = 0{,}311 \text{ съ ошибкой, меньшей } 0{,}001.$$

Полагая

$$\frac{C}{r} = 0{,}311 \text{ будемъ имѣть ошибку} < 0{,}008,$$

и, наконецъ,

$$\frac{C}{5r} = 0{,}0622 \text{ содержитъ ошибку } < 0{,}0016.$$

Составимъ теперь произведеніе:

$$0{,}0622 \cdot 3{,}14\,159\,265,$$

оставляя при этомъ во второмъ сомножителѣ столько десятичныхъ знаковъ, чтобы получить произведеніе съ 4 десятичными знаками.

$$\begin{array}{l} \underline{0{,}0622 \cdot 3{,}141} \\ 0{,}1866 \\ \phantom{0{,}00}62 \\ \phantom{0{,}00}25 \\ \underline{\phantom{0{,}000}1} \\ 0{,}1954. \end{array}$$

При упрощенномъ умноженіи мы во второй, третьей и четвертой строкахъ дѣлаемъ ошибки, каждая изъ которыхъ меньше половины единицы четвертаго знака; въ суммѣ всѣ эти ошибки дадутъ меньше, чѣмъ $\frac{1{,}5}{10^4}$; при отбрасываніи четвертаго, пятаго и т. д. знаковъ во второмъ сомножителѣ, получается ошибка меньше $\frac{40}{10^6}$, или $< \frac{0{,}4}{10^4}$; ошибка отъ всѣхъ упрощеній не будетъ превышать 1,9 единицъ четвертаго десятичнаго знака. Такъ какъ, наконецъ, возможная ошибка, вслѣдствіе неточности числа 0,0622, равна $\frac{16 \cdot \pi}{10^4}$ т. е. около 50 единицъ четвертаго знака, то общая ошибка результата 0,1954 будетъ равна 52 единицамъ четвертаго знака, и мы на основаніи произведенныхъ измѣреній можемъ лишь утверждать что значеніе H лежитъ между

$$0{,}1902\ \frac{g^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot s} \text{ и } 0{,}2006\ \frac{g^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot s}.$$

ГЛАВА IV.

Относительныя числа.

§ 1. Опредѣленіе относительныхъ чиселъ.

Понятіе натуральнаго числа мы установили (гл. I, § 1) исходя изъ множествъ, всѣ элементы которыхъ можно разсматривать, какъ равноцѣнные съ точки зрѣнія цѣли, занимающей главнымъ образомъ наше вниманіе. Дробныя числа (гл. II, § 1) были опредѣлены изъ разсмотрѣнія множествъ, между элементами которыхъ существовало соотношеніе такого рода, что для соотвѣтствующей цѣли какое-либо кратное одного элемента оказывалось равноцѣннымъ опредѣленному кратному другого элемента. Въ обоихъ случаяхъ мы вполнѣ могли охарактеризовать множество однимъ числомъ и однимъ названіемъ рода единицъ. Если къ данному множеству присоединяются еще другіе элементы, находящіеся въ данномъ соотношеніи между собою, но не съ элементами ранѣе взятыми, то для характеристики такого множества въ общемъ намъ необходимы два числа и два названія. Въ приложеніяхъ ариѳметики часто встрѣчаются такія множества, элементы которыхъ распадаются на двѣ группы такимъ образомъ, что каждому элементу одной группы противоположенъ опредѣленный элементъ другой, другими словами: сосуществованіе такихъ двухъ соотвѣтственныхъ элементовъ съ точки зрѣнія поставленной цѣли равносильно ихъ отсутствію. Прежде всего приведемъ нѣсколько примѣровъ такихъ множествъ.

1. Измѣненія въ имуществѣ лица образуютъ множество, элементами котораго могутъ быть съ одной стороны числа кратныя маркамъ и дробныя части марокъ, выражающія доходъ, съ другой стороны, числа кратныя маркамъ и дробныя части марокъ, выражающія расходъ. Если дѣло идетъ объ окончательномъ подсчетѣ имущества, то число, кратное цѣлымъ мар-

камъ или долямъ марокъ дохода, взаимно уничтожается съ соотвѣтственнымъ числомъ, кратнымъ цѣлымъ маркамъ или долямъ марокъ расхода.

2. Если матеріальная точка можетъ двигаться по прямой линіи въ ту и другую сторону отъ опредѣленнаго начала, то числа, кратныя метрамъ и дробныя части метровъ, опредѣльющія положеніе ея относительно начала, образуютъ множество, въ которомъ, если дѣло идетъ объ окончательномъ положеніи точки относительно начала, перемѣщеніе на $\frac{z}{n}$ метровъ въ одномъ направленіи и перемѣщеніе на $\frac{z}{n}$ метровъ въ противоположномъ направленіи являются противоположными, другъ друга уничтожающими элементами.

3. Пусть на матеріальную точку въ двухъ прямо-противоположныхъ направленіяхъ дѣйствуютъ какія-либо силы. По отношенію къ результирующему движенію сила, дѣйствующая въ одномъ направленіи, и сила такой же точно величины, дѣйствующая въ противоположномъ направленіи — суть величины противоположныя въ вышеуказанномъ смыслѣ.

Требованіе охарактеризовать такого рода множество однимъ числомъ и однимъ названіемъ заставляетъ ввести новый родъ чиселъ. Для простоты выраженій сначала ограничимся разсмотрѣніемъ такихъ множествъ, элементы каждой группы которыхъ между собой равноцѣнны и каждому элементу одной изъ которыхъ противоположенъ какой-либо элементъ другой группы.

За первую группу примемъ ту, наименованіе элементовъ которой будемъ присваивать всему множеству.

Отвлекаемся снова (см. гл. I, § 1 и гл. II, § 1) отъ всѣхъ особенныхъ свойствъ элементовъ нашего множества, удерживая въ сознаніи лишь различность отдѣльныхъ объектовъ и противоположность каждаго элемента первой группы соотвѣтствующему элементу второй; то, что получаемъ при помощи такой абстракціи изъ одного элемента первой группы, обозначаемъ посредствомъ 1^*, а то, что получаемъ изъ одного элемента второй группы, черезъ $1'$. Слѣдовательно, 1^* и $1'$ суть символы любыхъ двухъ объектовъ, которые можно разсматривать, какъ законченное цѣлое, и относительно которыхъ насъ интересуетъ то обстоятельство, что сосуществованіе 1^* и $1'$ равносильно ихъ отсутствію. Аналогично съ § 1, гл. I, коллективное соединеніе въ нашемъ сознаніи 1^* и 1^*

обозначаемъ черезъ 2^*, а соединеніе $1'$ и $1'$ черезъ $2'$; соединеніе 1^* и 1^* и 1^* обозначаемъ черезъ 3^*, а соединеніе $1'$ и $1'$ и $1'$ черезъ $3'$ и т. д. Само собой ясно, что 2^* и $2'$, 3^* и $3'$ представляютъ изъ себя противоположныя величины въ только что указанномъ смыслѣ и, слѣдовательно, находясь въ одномъ и томъ же множествѣ взаимно уничтожаются. Установленныя такой абстракціей и коллективнымъ соединеніемъ понятія $1^*, 2^*, 3^*, \cdots 1', 2', 3' \cdots$ также называемъ числами, но въ противоположность абсолютнымъ числамъ, опредѣленнымъ въ § 1, гл. I, присоединяемъ названіе „относительныя“ [1]); въ частности понятія, относящіяся къ элементамъ первой группы (т.-е. той группы, наименованіе которой даемъ всему множеству) называемъ „положительными“ числами, а соотвѣтствующіе элементы второй группы — „отрицательными“. Если a обозначаетъ какое-либо натуральное число, то a называемъ абсолютной величиной или абсолютнымъ значеніемъ, какъ числа a^* такъ и числа a' и пишемъ: (слѣдуя обозначенію Вейерштрасса) $|a^*| = a$ и $|a'| = a$. Чтобы удобнѣе было отличать одни числа отъ другихъ, въ этой главѣ мы будемъ обозначать относительныя числа греческими буквами, а ихъ абсолютныя значенія латинскими.

Тотъ случай, когда элементы каждой изъ обѣихъ группъ не равноцѣнны, но между ними тѣмъ не менѣе существуетъ указанное ранѣе отношеніе значеній, легко сводится къ только что разобранному случаю. Приводя всѣ встрѣчающіяся дроби къ общему знаменателю (гл. II, § 2), мы можемъ разсматривать всѣ элементы, какъ кратные одного опредѣленнаго элемента и подобнымъ же образомъ приходимъ къ понятію дробныхъ относительныхъ чиселъ. Сосуществованіе въ нѣкоторомъ множествѣ чиселъ $\left(\frac{z}{n}\right)^*$ и $\left(\frac{z}{n}\right)'$ также равносильно ихъ отсутствію.

Если множество содержитъ $\frac{z_1}{n}$ элементовъ перваго рода и $\frac{z_2}{n}$ элементовъ второго рода (относительно дробей мы съ самаго начала предполагаемъ, что онѣ приведены къ общему знаменателю) и если мы станемъ уничтожать попарно соотвѣтственные элементы обѣихъ группъ до тѣхъ поръ, пока это возможно, то можетъ имѣть мѣсто одинъ изъ слѣдующихъ трехъ случаевъ:

[1]) Вмѣсто этого въ элементарной ариѳметикѣ (алгебрѣ) говорятъ часто и «алгебраическія» числа.

I. Если $z_1 = z_2$, то не остается ничего, и множество сводится къ числу 0.

II. Если $z_1 > z_2$, напримѣръ, $z_1 = z_2 + u$, то остается u элементовъ $\frac{1}{n}$, принадлежащихъ къ первой группѣ. Тогда множество опредѣляется числомъ $\left(\frac{u}{n}\right)^*$ и наименованіемъ, принадлежащимъ первой группѣ. Это множество совершенно такого же рода, какъ и множества, разсмотрѣнныя въ гл. I и II, а, слѣдовательно, мы его можемъ характеризовать абсолютнымъ числомъ $\frac{u}{n}$ вмѣсто положительнаго числа $\left(\frac{u}{n}\right)^*$. Единственное различіе заключается въ томъ, что примѣненіе термина „положительное" число, даетъ возможность предполагать существованіе элементовъ противоположнаго рода, а примѣненіе термина „абсолютное" числу, эту возможность исключаетъ. Если нѣтъ надобности особенно подчеркивать такое различіе, не имѣющее существеннаго значенія для вычисленій, то можно положительныя числа замѣнять абсолютными, а, слѣдовательно, и вообще употреблять для положительныхъ чиселъ болѣе простыя обозначенія, именно 1, 2, 3 и т. д.

III. Если $z_2 > z_1$, напримѣръ, $z_2 = z_1 + v$, то остается v элементовъ $\frac{1}{n}$, принадлежащихъ ко второй группѣ, и множество въ этомъ случаѣ опредѣляется числомъ $\left(\frac{v}{n}\right)'$ и наименованіемъ элементовъ первой группы[1]).

Каждое изъ разсмотрѣнныхъ множествъ можетъ быть въ дѣйствительности охарактеризовано или числомъ нуль или относительнымъ (положительнымъ или отрицательнымъ) числомъ и наименованіемъ одной, съ самаго начала разъ навсегда выбранной группы. Два множества считаются равнозначащими въ томъ случаѣ, если послѣ выполненія только что указанныхъ упрощеній (взаимное уничтоженіе двухъ соотвѣтственныхъ элементовъ противоположнаго рода) эти множества состоятъ изъ одинаковаго числа элементовъ одного и того же рода; согласно этому мы на-

---

[1]) Само собой понятно, что его можно было бы также вполнѣ охарактеризовать числомъ $\frac{v}{n}$ и общимъ наименованіемъ второй группы. Но мы въ данномъ случаѣ желаемъ дать этому множеству наименованіе одной опредѣленной, съ самаго начала и навсегда выбранной группы.

зываемъ равными два относительныхъ числа въ томъ случаѣ, если они имѣютъ одинаковое абсолютное значеніе, и если при этомъ они одного и того же рода.

Такимъ образомъ, мы убѣдились, что относительныя числа, а въ томъ числѣ и отрицательныя, являются такъ же, какъ и абсолютныя, результатомъ нашей духовной дѣятельности, а именно способности къ отвлеченію и коллективному соединенію. Само собою ясно, что отрицательныя числа могутъ примѣняться только въ томъ случаѣ, если пересчитываемые объекты имѣютъ себѣ противоположные, при чемъ присоединеніе мыслительнымъ актомъ ихъ къ первымъ равносильно ихъ взаимному уничтоженію [1]).

Теперь перейдемъ къ опредѣленію дѣйствій надъ новыми числами и установленію законовъ этихъ дѣйствій.

§ 2. Сложеніе.

A. Опредѣленіе суммы.

Любыя относительныя числа α, β, $\gamma, \cdots$ можно разсматривать, какъ числа, соотвѣтствующія опредѣленнымъ множествамъ A, B, $C \cdots$ уже разсмотрѣннаго рода. Если относительныя числа не будутъ всѣ цѣлыми, то мы ихъ представляемъ обращенными въ дроби съ общимъ знаменателемъ n, а каждое изъ множествъ A, B, $C, \cdots$ составленнымъ только изъ элементовъ $\frac{1}{n}$ и $\left(\frac{1}{n}\right)'$; такимъ образомъ любые два элемента, встрѣчающіеся во множествѣ, будутъ имѣть — или одинаковыя значенія, или противоположныя. Подъ суммой [2]) $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$ мы понимаемъ такъ же, какъ и въ § 3, гл. I число σ, которое принадлежитъ множеству S, полученному соединеніемъ множествъ A, B, $C \cdots$.

I. Пусть α, β, $\gamma, \cdots$ суть числа одного и того-же рода, т. е. всѣ числа положительныя или всѣ числа отрицательныя. Если

$$|\alpha| = a, \quad |\beta| = b, \quad |\gamma| = c \text{ и т. д.},$$

---

[1]) Примѣчаніе Гаусса въ его комментаріи къ Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda. Ges. Werke II, стр. 174.

[2]) Сумму относительныхъ чиселъ называютъ часто «алгебраической» суммой. Ср. прим. 1, стр. 159.

то множество $a+b+c+\cdots$ содержитъ элементы одного рода. Отсюда вытекаетъ правило: Сумма нѣсколькихъ относительныхъ чиселъ одного и того же рода есть число того же рода, абсолютное значеніе котораго равно суммѣ абсолютныхъ значеній слагаемыхъ.

II. Пусть теперь α и β будутъ числа различнаго рода и пусть напр. α положительно; β—отрицательно. Во множествѣ S, получаемомъ соединеніемъ A и B, мы насколько возможно производимъ взаимное уничтоженіе элементовъ. Если $a=b$, то не остается ничего; если $a>b$, то остается $a-b$ элементовъ перваго рода, а если $b>a$, то остается $b-a$ элементовъ второго рода. Слѣдовательно, абсолютное значеніе суммы двухъ относительныхъ чиселъ различнаго рода равно разности абсолютныхъ значеній обоихъ слагаемыхъ, причемъ сумма положительна или отрицательна въ зависимости отъ того, у какого слагаемаго абсолютное значеніе больше.

III. Пусть среди чиселъ α, β, $\gamma, \cdots$ имѣется произвольное число положительныхъ чиселъ, а остальныя отрицательныя числа. Такъ какъ элементы $\left(\frac{1}{n}\right)$, такъ же какъ и элементы $\left(\frac{1}{n}\right)'$, равнозначны между собой, а, слѣдовательно, любое $\left(\frac{1}{n}\right)$ взаимно уничтожается съ любымъ $\left(\frac{1}{n}\right)'$, и такъ какъ число, принадлежащее множеству, не зависитъ отъ порядка элементовъ, то мы можемъ суммированіе производить въ любомъ порядкѣ; такъ, напримѣръ, мы можемъ сначала сложить положительныя числа, затѣмъ отрицательныя, и, наконецъ, на основаніи II найти сумму этихъ частныхъ суммъ.

B. Слѣдствія установленнаго опредѣленія.

I. Если въ суммѣ относительныхъ чиселъ каждое отдѣльное число замѣнить противоположнымъ ему, то сумма сохраняетъ свое абсолютное значеніе, но переходитъ при этомъ въ число противоположнаго рода.

II. Если въ двучленной суммѣ, сохранивъ значеніе одного слагаемаго, второе слагаемое замѣнить другимъ числомъ, то и значеніе всей суммы измѣнится.

§ 3. Вычитаніе.

Подъ разностью $\alpha-\beta$ двухъ относительныхъ чиселъ α, β, мы понимаемъ такое число γ, которое, будучи сложено съ β, даетъ α. Изъ § 2 В, II слѣдуетъ, что такое число γ можетъ быть только одно. Если β есть нѣкоторое положительное число b, то на основаніи тождества

$$b+(\alpha+b')=\alpha$$

слѣдуетъ, что искомая разность $\gamma=\alpha+b'$. Если же β есть отрицательное число b', то такимъ же образомъ изъ $b'+(\alpha+b)=\alpha$ слѣдуетъ, что $\gamma=\alpha+b$. Слѣдовательно, разность двухъ относительныхъ чиселъ всегда равна суммѣ уменьшаемаго и числа, противоположнаго вычитаемому. Такъ какъ въ области относительныхъ чиселъ каждому числу соотвѣтствуетъ ему противоположное, и такъ какъ два относительныхъ числа можно всегда сложить, то и вычитаніе относительныхъ чиселъ всегда возможно; подобно тому, какъ введеніе дробныхъ чиселъ (гл. II, § 4, стр. 94) устраняетъ ограниченіе возможности дѣленія, заключающееся въ томъ, что дѣлимое должно быть кратнымъ дѣлителя (гл. I, § 6, В), такъ и введеніе относительныхъ чиселъ освобождаетъ вычитаніе отъ того условія, что уменьшаемое всегда должно быть больше вычитаемаго.

Изъ общаго предложенія о независимости суммы отъ порядка отдѣльныхъ сложеній, слѣдуетъ, что для полученія суммы относительныхъ чиселъ достаточно складывать послѣдовательно отдѣльныя слагаемыя.

Вмѣсто того, чтобы вычитать сумму относительныхъ чиселъ, можно прибавить значеніе, противоположное этой суммѣ, которое на основаніи высказаннаго въ § 2 В, I, мы получимъ, замѣняя каждое слагаемое противоположнымъ ему значеніемъ.

Въ этихъ предложеніяхъ, какъ частные случаи, заключены формулы гл. I, § IV В, (I)—(VI), стр. 17, въ чемъ сейчасъ же можно убѣдиться, если встрѣчающіяся тамъ разности написать въ видѣ алгебраическихъ суммъ. Въ области относительныхъ чиселъ справедливость этихъ формулъ не связана тѣмъ условіемъ, чтобы при каждомъ вычитаніи уменьшаемое было больше вычитаемаго.

Равенство:

$$a - b = a + b',$$

въ частномъ случаѣ при $a = 0$ обращающееся въ

$$0 - b = 0 + b' = b',$$

привело къ общепринятому теперь обозначенію отрицательныхъ чиселъ. Если написать вмѣсто $0 - b$ короче $-b$, то получимъ $b' = -b$; поэтому на практикѣ отрицательное число и обозначаемъ, ставя знакъ „—" передъ соотвѣтствующимъ абсолютнымъ числомъ. Такимъ образомъ, этотъ знакъ изъ знака только дѣйствія превращается въ знакъ, характеризующій родъ числа. Этотъ знакъ исполняетъ ту же функцію, какъ и примѣнявшійся нами до сихъ поръ значокъ ($'$); послѣднимъ мы все же будемъ пользоваться въ слѣдующихъ §§, когда это окажется цѣлесообразнымъ.

Такъ какъ положительное число a можно разсматривать, какъ результатъ сложенія $0 + a$, то передъ абсолютнымъ числомъ ставятъ знакъ „+", если желаютъ подчеркнуть, что это число положительное.

Выраженіе, образованное сложеніемъ и вычитаніемъ относительныхъ чиселъ, какъ, напримѣръ,

$$a + b' - c' - d + e',$$

можно написать въ видѣ

$$(+a) + (-b) - (-c) - (+d) + (-e),$$

пользуясь только что указанными обозначеніями, или въ видѣ

$$(+a) + (-b) + (+c) + (-d) + (-e),$$

записавъ вычитаемыя въ видѣ слагаемыхъ.

Чтобы избѣжать излишнихъ знаковъ и скобокъ, установили соглашеніе: писать сумму относительныхъ чиселъ, опуская передъ каждымъ слагаемымъ знакъ дѣйствія, но помѣщая знакъ, указывающій на родъ слагаемаго; такимъ образомъ, наше выраженіе приметъ видъ:

$$+a - b + c - d - e.$$

Слѣдовательно, знаки + и — являются здѣсь не знаками дѣйствій, а знаками, указывающими родъ чиселъ („предзнаки" — Vorzeichen"). Само собой ясно, что при такомъ способѣ письма знакъ $+$ передъ положительнымъ слагаемымъ нельзя опускать; чтобы не возникало недоразумѣній его опускаютъ только передъ первымъ слагаемымъ, условившись, что если передъ первымъ числомъ нѣтъ знака, то оно имѣетъ положительное значеніе.

Равенства

$$x+(a+b'+c+d'+e')=x+a+b'+c+d'+e'$$

и

$$x-(a+b'+c+d'+e')=x+a'+b+c'+d+e,$$

выражающія высказанныя предложенія о сложеніи и вычитаніи алгебраической суммы, напишутся теперь слѣдующимъ образомъ:

$$x+(a-b+c-d-e)=x+a-b+c-d-e$$

и

$$x-(a-b+c-d-e)=x-a+b-c+d+e.$$

Для примѣненія на практикѣ эти равенства обыкновенно формулируютъ такъ: скобка, передъ которой поставленъ знакъ плюсъ, просто опускается, скобка же, передъ которой стоитъ знакъ минусъ, можетъ быть опущена лишь тогда, когда передъ каждымъ членомъ, стоящимъ въ скобкахъ, знакъ будетъ измѣненъ въ противоположный [1]).

§ 4. Сравненіе относительныхъ чиселъ по величинѣ.

Согласно § 2, гл. I, абсолютное число a мы называемъ тогда большимъ абсолютнаго числа b (или b меньшимъ a), если имѣется такое абсолютное число z, что $a=b+z$ или, другими словами, тогда, когда разность $a-b$ есть абсолютное число. Аналогично съ этимъ и относительное число α будемъ считать большимъ относительнаго числа β (или β меньшимъ α), если всегда существующая и однозначно опредѣляемая разность $\alpha-\beta$ имѣетъ положительное значеніе. Если α и β оба будутъ положительны, то опредѣленіе остается такимъ же, что и для абсолютныхъ чиселъ. Если α обозначаетъ какое-либо положительное число a, β—какое-либо отрицательное число b', то имѣемъ:

$$\alpha-\beta=a-b'=a+b,$$

[1]) Конечно, здѣсь предполагается, что рѣчь идетъ только о сложеніи и вычитаніи, а не объ умноженіи и дѣленіи выраженій, заключенныхъ въ скобки.

слѣдовательно, результатъ несомнѣнно положителенъ, т.-е. каждое произвольно взятое положительное число больше какого угодно отрицательнаго числа. Если числа α и β оба отрицательныя, $\alpha = a'$ и $\beta = b'$, при чемъ $a > b$, то $\beta - \alpha = b' - a' = b' + a$ есть число положительное, слѣдовательно, $\beta > \alpha$ или $\alpha < \beta$, т.-е. изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то больше, которое имѣетъ меньшее абсолютное значеніе. Далѣе легко видѣть, что каждое положительное число больше нуля, а каждое отрицательное меньше нуля.

Согласно только что данному опредѣленію

$$\left.\begin{array}{l}\alpha > \beta \text{ означаетъ, что } \alpha - \beta = p_1 \\ \beta > \gamma \text{ означаетъ, что } \beta - \gamma = p_2\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{гдѣ } p_1 \text{ и } p_2 \text{ два какія-либо} \\ \text{положительныя числа.}\end{array}$$

Сложеніе послѣднихъ равенствъ даетъ

$$\alpha - \gamma = p_1 + p_2$$

т.-е. изъ того, что $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$ слѣдуетъ, что $\alpha > \gamma$ (ср. гл. I, § 3 C, II).

Такъ какъ согласно нашему опредѣленію

$$a + b > a,$$

а

$$a + b' < a,$$

то предложеніе § 3 C, I, гл. I о томъ, что сумма нѣсколькихъ чиселъ всегда больше любого изъ ея слагаемыхъ, въ области относительныхъ чиселъ уже не обладаетъ общностью.

Предложеніе, высказанное § 2 B, II, теперь мы можемъ точнѣе формулировать такъ: изъ двухъ двучленныхъ суммъ, имѣющихъ только по одному одинаковому слагаемому, та будетъ имѣть бо́льшее значеніе, въ которой другое слагаемое больше: въ самомъ дѣлѣ, если $\beta > \gamma$, слѣдовательно, $\beta - \gamma$ равно какому-либо положительному числу p, то и

$$(\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma) = \beta - \gamma = p, \text{ т.-е. } \alpha + \beta > \alpha + \gamma.$$

Непосредственно изъ опредѣленія понятія „больше“ вытекаетъ и справедливость предложенія § 3 C, IV, гл. I и для относительныхъ чиселъ, т.-е. если

$$\alpha > \beta$$

и

$$\gamma > \delta,$$

то и

$$\alpha + \gamma > \beta + \delta.$$

Чтобы дать геометрическое представленіе соотношенію по величинѣ любыхъ относительныхъ чиселъ, представимъ себѣ, что при нѣкоторой точкѣ на прямой линіи поставлено число нуль. Вправо отъ этой точки представимъ написанными числа положительныя, а влѣво отрицательныя, и пусть эти числа будутъ расположены такъ, что положительныя или отрицательныя числа, имѣющія большую абсолютную величину находятся дальше отъ начальной точки. Тогда относительныя числа окажутся расположенными по величинѣ въ томъ смыслѣ, что каждое изъ нихъ больше числа, стоящаго отъ него слѣва, и меньше числа, стоящаго отъ него справа.

§ 5. Умноженіе.

А. Опредѣленіе и равенства.

Опредѣленіемъ, даннымъ въ § 5 А, гл. I, мы установили смыслъ такого произведенія, у котораго множитель есть число абсолютное, а множимое есть величина, допускающая сложеніе съ какой-либо величиной, ей однородной. Согласно этому опредѣленію, если a, b обозначаютъ какія-либо цѣлыя абсолютныя числа [1]), имѣемъ:

$$(+a)\cdot b = \overbrace{+a+a+\cdots+a}^{(b\text{ слагаемыхъ})} = +ab$$

и

$$(-a)\cdot b = \overbrace{-a-a-\cdots-a}^{(b\text{ слагаемыхъ})} = -ab.$$

Такъ какъ при разсчетахъ абсолютныя числа имѣютъ одинаковый смыслъ съ положительными (ср. § 1, стр. 179), то мы можемъ записать эти равенства и такъ:

$$(+a)\cdot(+b) = +a\cdot b$$

1) Въ гл. II, § 4 показано, какимъ образомъ умноженіе дробныхъ чиселъ сводится къ умноженію цѣлыхъ чиселъ.

и

$$(-a)\cdot(+b) = -a\cdot b.$$

Сумму b слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равняется a, мы въ свое время обозначили черезъ $a\cdot b$; съ другой стороны, мы ввели символъ b', или $-b$, для обозначенія множества изъ b такихъ объектовъ, ото всѣхъ особыхъ свойствъ которыхъ мы отвлеклись, за исключеніемъ того свойства, что каждый изъ нихъ противоположенъ объекту, обозначенному „1"; подобно этому обозначимъ теперь сумму, состоящую изъ b слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое имѣетъ значеніе противоположное α, черезъ $\alpha\cdot b'$ или $\alpha\cdot(-b)$; т.-е. для сокращеннаго обозначенія суммъ: $\overbrace{a'+a'+\cdots+a'}^{(b\ \text{слагаемыхъ})}$ или $\overbrace{-a-a-\cdots-a}^{(b\ \text{слагаемыхъ})}$, значеніе которыхъ, согласно § 2, есть $-ab$, введемъ символъ $a\cdot b'$ или $a\cdot(-b)$ и для суммы $\overbrace{a+a+\cdots+a}^{(b\ \text{слагаемыхъ})}$, значеніе которой есть $+ab$, введемъ также символъ $a'\cdot b'$ или $(-a)(-b)$. *Слѣдовательно, вообще подъ знакомъ $\alpha\cdot\beta$ мы будемъ разумѣть такое число φ, абсолютное значеніе котораго равно произведенію абсолютныхъ значеній α и β, и которое будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, въ зависимости отъ того, будутъ ли α и β числами одного или различнаго рода* [2]).

Если β есть число положительное, то полученное такимъ образомъ число φ тождественно съ произведеніемъ чиселъ α и β.

Не трудно показать, что если α и β суть произвольныя относительныя числа, то законы, выведенные для произведенія абсолютныхъ чиселъ (Гл. I, § 5 B и C), справедливы и для операцій, при помощи которыхъ изъ α и β образуется φ. Справедливость

---

[2]) Какъ примѣръ образованія какого-либо числа φ изъ двухъ чиселъ α, β указаннымъ выше способомъ, можно привести изъ физики слѣдующее: если α и β обозначаютъ электрическіе заряды двухъ матеріальныхъ точекъ, выраженныхъ въ соотвѣтственныхъ единицахъ, при чемъ каждому положительному значенію α или β должно соотвѣтствовать стеклянное электричество, а отрицательному смоляное электричество, то образованное по указанному въ текстѣ способу число $\varphi = \alpha\cdot\beta$ представляетъ число единицъ силы взаимодѣйствія обѣихъ электрическихъ массъ, если ихъ разстояніе другъ отъ друга равно 1, при чемъ положительное значеніе φ означаетъ отталкиваніе, отрицательное — притяженіе.

коммутативнаго $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ и ассоціативнаго закона $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ очевидна. Чтобы доказать справедливость формулы

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$$

(законъ дистрибутивный) мы должны отдѣльно разсмотрѣть случаи, когда α, β, γ положительны и когда отрицательны.

1. Пусть

$$\alpha=-a,\ \beta=-b\ \gamma=+c;$$

тогда имѣемъ (по § 2 A I)

$$\alpha+\beta=-(a+b),$$

слѣдовательно,

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=-[(a+b)\cdot c]$$

(согласно только что данному опредѣленію); съ другой стороны:

$$\alpha\cdot\gamma=-ac,\ \beta\cdot\gamma=-bc\ \text{ и }\ \alpha\cdot\gamma+\beta\gamma=-(ac+bc).$$

Такъ какъ для абсолютныхъ чиселъ $(a+b)\cdot c=ac+bc$, то для случая перваго дистрибутивный законъ доказанъ.

2. Пусть

$$\alpha=-a,\ \beta=+b,\ (a>b)\ \text{ и }\ \gamma=-c,$$

тогда имѣемъ (§ 2 A, II)

$$\alpha+\beta=-a+b=-(a-b)$$
$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=+[(a-b)\cdot c],$$

съ другой стороны

$$\alpha\cdot\gamma=+ac,\ \beta\cdot\gamma=-bc,\ \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma=+(ac-bc),$$

и такъ какъ для абсолютныхъ чиселъ

$$(a-b)\cdot c=ac-bc,$$

то и для второго случая дистрибутивный законъ имѣетъ мѣсто.

Для остальныхъ случаевъ доказательство ведется аналогично, и такъ какъ всѣ формулы § 5 C, гл. I, выведены на основаніи коммутативнаго, ассоціативнаго и дистрибутивнаго законовъ, при чемъ не было необходимости возвращаться къ значенію произведенія, то всѣ эти формулы пригодны и для операціи, при помощи которой число $\alpha\cdot\beta$ получилось изъ чиселъ α и β. Поэтому при дѣйствіяхъ надъ символомъ $\alpha\cdot\beta$, намъ незачѣмъ различать, будутъ ли α и β абсолютными или относительными числами: этимъ оправдывается выборъ знака числа $\alpha\cdot\beta$, полученнаго описанными пріемами изъ чиселъ α и β, такъ же какъ и названіе „произведеніе", которое мы даемъ числу $\alpha\cdot\beta$, и названіе „умноженіе" для самого дѣйствія, дающаго въ результатѣ число $\alpha\cdot\beta$. Легко видѣть, что ни для какого другого опредѣленія символа $\alpha\cdot\beta$ законы умноженія не имѣютъ мѣста.

Повторнымъ примѣненіемъ дистрибутивнаго закона получаемъ слѣдующую болѣе общую формулу (ср. гл. I, § 5 С).

$$\begin{aligned}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)(\beta_1+\cdots+\beta_n) = {} & \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_1+\cdots+\alpha_m\beta_1 \\ & + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + \alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_n+\cdots+\alpha_m\beta_n,\end{aligned}$$

т.-е. чтобы умножить сумму относительныхъ чиселъ на другую сумму такихъ же чиселъ, слѣдуетъ каждое слагаемое одной суммы умножить на каждое слагаемое другой и полученныя произведенія сложить. Въ этомъ предложеніи, какъ частные случаи содержатся формулы гл. I, § 5 С, I—VI, если входящія въ составъ этихъ формулъ разности разсматривать, какъ алгебраическія суммы. Такимъ образомъ, введеніе относительныхъ чиселъ даетъ возможность различныя формулы свести къ единственному предложенію.

В. **Неравенства.**

I. Пусть

$$\beta > \gamma, \text{ т.-е. } \beta = \gamma + p,$$

гдѣ p означаетъ положительное число. Тогда для какого-либо относительнаго числа α имѣемъ:

$$\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot(\gamma+p) = \alpha\cdot\gamma + \alpha\cdot p.$$

Слѣдовательно, если α положительно, то и произведеніе $\alpha\cdot p$ положительно, откуда вытекаетъ $\alpha\beta > \alpha\gamma$; если же α отрицательно, то $\alpha\cdot p$ тоже отрицательно, поэтому $\alpha\beta < \alpha\gamma$. Такимъ образомъ, неравенство всегда можно почленно умножать на положительное число, а на отрицательное число можно умножать лишь послѣ того, какъ знакъ неравенства измѣненъ на противоположный. Если α и p оба отличны отъ нуля, то и произведеніе $\alpha\cdot p$ никогда нулемъ быть не можетъ; если α отлично отъ нуля, а β и γ имѣютъ различныя значенія, то $\alpha\beta$ и $\alpha\gamma$ тоже имѣютъ неравныя значенія, откуда далѣе заключаемъ, что если $\alpha\beta = \alpha\gamma$, то, или $\alpha = 0$, или $\beta = \gamma$.

II. Если

$$\alpha > \beta$$

и

$$\gamma > \delta,$$

то въ зависимости отъ значенія чиселъ α, β, γ, δ должно быть или $\alpha\gamma > \beta\delta$, или $\alpha\gamma < \beta\delta$.

§ 6. Дѣленіе.

Согласно опредѣленію, данному для абсолютныхъ чиселъ (гл. I, § 6 A), мы подъ частнымъ $(\beta : \alpha)$ двухъ относительныхъ чиселъ β и α разумѣемъ число, которое будучи умножено на α даетъ въ результатѣ β, такъ что $(\beta : \alpha) \cdot \alpha = \alpha \cdot (\beta : \alpha) = \beta$. Изъ § 5 B, I, слѣдуетъ, что для случая $\alpha \lessgtr 0$ такое число можетъ быть только одно. Опредѣленіе произведенія, установленное въ § 5 A, даетъ непосредственно слѣдующее: абсолютное значеніе $(\beta : \alpha)$ равно частному абсолютныхъ значеній β и α, при чемъ это частное будетъ положительно или отрицательно въ зависимости отъ того, окажутся ли числа β и α одного и того же или разнаго рода. Благодаря введенію дробныхъ чиселъ (гл. II, § 4) дѣленіе становится всегда выполнимымъ, за исключеніемъ того случая, когда дѣлитель $\alpha = 0$. Такъ какъ формулы § 6 B, I—VIII, гл. I, выведены только на основаніи основныхъ законовъ умноженія и однозначности частнаго (ср. примѣчаніе 1, стр. 28), то мы теперь можемъ утверждать, что эти законы имѣютъ мѣста и для относительныхъ чиселъ.

§ 7. Возведеніе въ степень и извлеченіе корня.

A. Показатель степени положительное цѣлое число m.

Смыслъ выраженія

$$\alpha^m = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{(m \text{ сомножителей})}$$

вполнѣ опредѣляется понятіемъ произведенія относительныхъ чиселъ. Если α положительно, то и α^m всегда тоже положительно;

если же a отрицательно, то a^m будетъ положительнымъ или отрицательнымъ въ зависимости отъ того, окажется ли m четнымъ или нечетнымъ числомъ; напримѣръ,

$$(+1)^m = +1,$$

но $$(-1)^m = +1, \text{ если } m \text{ четное,}$$
$$= -1, \text{ если } m \text{ нечетное.}$$

B. Показатель степени положительное дробное число $\frac{m}{n}$.

Согласно опредѣленію, данному въ гл. II, § 5 B, стр. 96 мы подъ $a^{\frac{m}{n}}$ должны разумѣть $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

I. a — число положительное.

1. n — число нечетное.

Нельзя найти отрицательнаго числа, n-я степень котораго была бы равна a, но также нельзя найти и болѣе одного такого положительнаго числа (ср. гл. I, § 8 A). Либо такое положительное число x существуетъ, и тогда $a^{\frac{m}{n}} = x^m$, либо можно найти (гл. II, § 5 C, III, стр. 102 и т. д.) два такихъ положительныхъ числа x_1 и x_2, чтобы $x_1^n < a < x_2^n$ и чтобы $x_2 - x_1$ было числомъ, мéньшимъ любого даннаго положительнаго числа δ. Въ этомъ случаѣ, какъ выяснено на стр. 105, если только не ставить цѣлью абсолютную точность, можно число $a^{\frac{m}{n}}$, не существующее въ нашей числовой области, замѣнить однимъ изъ чиселъ x_1^m или x_2^m.

2. n — число четное.

Если существуетъ такое положительное число x, что $x^n = a$, то въ этомъ случаѣ и $(-x)^n = a$. Символъ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ въ этомъ случаѣ имѣетъ два значенія $+x$ и $-x$, и $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ въ случаѣ m нечетнаго имѣетъ два значенія $+x^m$ и $-x^m$, а въ случаѣ m четнаго только одно значеніе $+x^m$. Если такого числа x не существуетъ, то кромѣ неравенства

$$x_1^n < a < x_2^n \qquad (x_2 - x_1 < \delta)$$

существуютъ еще неравенства

$$(-x_1)^n < a < (-x_2)^n,$$

гдѣ

$$(-x_1) - (-x_2) = x_2 - x_1 < \delta.$$

II. a — число отрицательное.

1. n — число нечетное.

Въ этомъ случаѣ или имѣется единственное отрицательное число $-x$, n-ая степень котораго $=a$, и тогда имѣемъ $a^{\frac{m}{n}}=$ $=(-x)^m$, или можно найти два отрицательныхъ числа $(-x_1)$ и $(-x_2)$, абсолютное значеніе разности которыхъ меньше произвольно малаго, напередъ выбраннаго значенія δ, такъ что:

$$(-x_2)^n < a < (-x_1)^n.$$

2. n — число четное.

Нельзя найти такого относительнаго числа ξ, чтобы $\xi^n=a$, а также и такого относительнаго числа ξ_1, чтобы $\xi_1{}^n < a$, такъ какъ четная степень всякаго положительнаго или отрицательнаго числа всегда имѣетъ положительное значеніе, а, слѣдовательно, во всякомъ случаѣ больше отрицательнаго числа a. При этомъ условіи задачу, поставленную символомъ $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, мы не можемъ рѣшить даже и въ томъ случаѣ, если замѣнимъ a числомъ мало отличнымъ отъ него. Символъ $a^{\frac{m}{n}}$, для случая отрицательнаго значенія a и четнаго значенія n, не имѣетъ, слѣдовательно, никакого смысла въ области относительныхъ чиселъ.

III. Формулы для степеней съ дробными показателями.

Справедливость формулъ для дѣйствій надъ корнями (гл. I, § 8) или надъ степенями, показатели которыхъ суть дроби, основывалась съ одной стороны на предложеніяхъ, справедливыхъ для степеней съ цѣлыми показателями, съ другой стороны, также и на однозначности корней въ области абсолютныхъ чиселъ. Послѣднее свойство корней въ области относительныхъ чиселъ не является уже общимъ для степеней съ дробными показателями; напротивъ, символъ $a^{\frac{m}{n}}$, если a положительно, n — число четное, m — нечетное, имѣетъ два значенія, одинаковыя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку; поэтому наши формулы нельзя непосредственно прилагать къ относительнымъ числамъ, по крайней мѣрѣ въ томъ же самомъ смыслѣ, какъ и къ абсолютнымъ числамъ. Такъ, напримѣръ, имѣемъ:

$$256^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{256})^3 = (\pm 4)^3 = \pm 64,$$

но

$$256^{\frac{6}{8}} = (\sqrt[8]{256})^6 = (\pm 2)^6 = +64.$$

Равенство

$$256^{\frac{6}{8}} = 256^{\frac{3}{4}}$$

справедливо лишь въ томъ смыслѣ, что единственное значеніе, которое имѣетъ лѣвая часть, равно одному изъ двухъ значеній правой части. То же самое можно сказать о равенствѣ

$$(\sqrt[4]{81})^2 = \sqrt[4]{81^2},$$

или

$$81^{\frac{2}{4}} = (81^2)^{\frac{1}{4}}$$

такъ какъ лѣвая часть имѣетъ только одно значеніе $+9$, а правая оба значенія ± 9 [1]).

Слѣдовательно, при употребленіи формулъ, въ которыхъ корни и степени встрѣчаются съ дробными показателями, слѣдуетъ обращать вниманіе на то, представляютъ ли обѣ части равенства однозначные или многозначные символы, и въ послѣднемъ случаѣ изслѣдовать, какія значенія этихъ символовъ равны другъ другу.

Если a положительно и n число четное, то положительное значеніе $\sqrt[n]{a}$ называютъ **главнымъ значеніемъ** [2]) корня. Теперь возникаетъ вопросъ, останутся ли въ силѣ всѣ формулы, выведенныя для корней или для степеней съ дробными показателями въ томъ случаѣ, если каждый двузначный корень замѣнить его главнымъ значеніемъ. По этому поводу приходится сдѣлать слѣдующее замѣчаніе:

---

1) Разумѣется это примѣчаніе сдѣлано въ предположеніи, что мы не выходимъ изъ области дѣйствительныхъ чиселъ.

2) Въ случаѣ $a > 0$ это утвержденіе остается въ силѣ и при дальнѣйшемъ расширеніи (гл. VII) числовой области, между тѣмъ какъ среди различныхъ значеній, которыя будетъ имѣть тогда корень съ нечетнымъ показателемъ изъ отрицательнаго подкореннаго количества, единственное значеніе, имѣющееся въ нашей настоящей числовой области, не явится уже главнымъ значеніемъ

1. Если въ одной изъ формулъ встрѣчаются только четные показатели корней, то всѣ подкоренныя количества должны быть числами положительными, чтобы эти корни вообще имѣли смыслъ въ области относительныхъ чиселъ; въ этомъ случаѣ, согласно сдѣланному условію, слѣдуетъ брать всѣ корни съ положительнымъ значеніемъ; а такъ какъ произведеніе и частное двухъ положительныхъ чиселъ есть число положительное (сумма и разность корней въ этихъ формулахъ не встрѣчаются), то обѣ части равенства будутъ положительны, а слѣдовательно, формулы оказываются справедливыми и по отношенію къ знакамъ чиселъ.

2. Если въ одной изъ формулъ встрѣчаются корни только съ нечетными показателями, то всѣ корни въ области относительныхъ чиселъ однозначны; слѣдовательно, доказательство, данное въ гл. I, § 8 B, стр. 34, примѣнимо здѣсь, и формулы остаются справедливыми.

3. Формула, въ составъ которой входятъ четные и нечетные показатели корней, можетъ оказаться невѣрной въ томъ случаѣ, если для корней съ четными показателями взять ихъ главныя значенія. Такъ, напримѣръ, при этихъ условіяхъ формула

$$\sqrt[n.r]{a^r} = \sqrt[n]{a}$$

(ср. гл. I, § 8 B) уже не будетъ справедлива, если a — отрицательно, n — число нечетное и r — число четное, такъ какъ главное значеніе лѣвой части положительно, а правой отрицательно. Приведемъ числовой примѣръ:

$$\sqrt[6]{(-8)^2} = +2,$$

но

$$\sqrt[3]{-8} = -2.$$

Дать полный отвѣтъ на поставленный вопросъ о справедливости формулъ мы будемъ въ состояніи лишь послѣ дальнѣйшаго расширенія числовой области.

C. **Показатель степени есть число отрицательное.**

По § 7 B гл. I и § 5 A и B гл. II, если $p > q$, то:

$$a^p : a^q = a^{p-q},$$

если же $p < q$, то

$$a^p : a^q = 1 : a^{q-p}\text{[1]}.$$

---

[1]) p и q могутъ быть цѣлыми и дробными числами. Въ послѣднемъ случаѣ формулы справедливы въ вышеуказанномъ смыслѣ (§ 7 B, III).

Такъ, напримѣръ:

$$a^8 : a^5 = a^{8-5} = a^3$$

и

$$a^5 : a^8 = 1 : a^{8-5} = 1 : a^3.$$

Если во второмъ случаѣ примѣнить чисто формально правила, выведенныя для перваго случая, то придемъ къ равенству $a^5 : a^8 = a^{5-8} = a^{-3}$. Правая часть этого равенства пока не имѣетъ никакого смысла, такъ какъ до сихъ поръ понятіе степени было установлено лишь для положительныхъ показателей. Желаніе имѣть возможность пользоваться однимъ и тѣмъ же правиломъ для нахожденія частнаго $a^p : a^q$, независимо отъ того, будетъ ли $p \gtrless q$, привело къ тому, что лишенному до сихъ поръ смысла символу a^{-x} дали значеніе $1 : a^x$ [1]). Подобное представленіе частнаго $1 : a^x$, какъ степени съ основаніемъ a и показателемъ $-x$, окажется цѣлесообразнымъ только въ томъ случаѣ, если съ введеннымъ символомъ a^{-x} можно оперировать, руководясь тѣми же правилами, какъ и при дѣйствіяхъ надъ степенями съ положительными показателями; послѣднее же обстоятельство можетъ имѣть мѣсто тогда и только тогда, если для отрицательныхъ показателей окажутся справедливыми тѣ же законы (ср. гл. I, § 7 В, гл. II, § 5 В), что и для положительныхъ показателей степеней. Теперь не трудно показать, что это дѣйствительно имѣетъ мѣсто. Нужно только a^{-x} замѣнить черезъ $\frac{1}{a^x}$, выполнить надъ нимъ необходимыя преобразованія, возможность которыхъ доказана для положительныхъ показателей, а затѣмъ снова

---

[1]) При опредѣленіи степени съ отрицательными показателями можно также исходить изъ соотвѣтствія ариѳметическаго ряда 1, 2, 3, ... m съ геометрическимъ рядомъ $a^1, a^2, a^3, \ldots a^m$ (ср. гл, II, § 5 В, стр. 97, прим. 1). Если продолжить оба ряда, не измѣняя разности, а соотвѣтственно и знаменателя прогрессіи, влѣво за первый членъ, то получится:

$$-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 \ldots, \text{ и соотвѣтственно } \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3 \ldots,$$

Если и теперь разсматривать какой-либо членъ геометрическаго ряда, какъ степень числа a, показатель которой есть соотвѣтствующій членъ ариѳметическаго ряда, то слѣдуетъ положить:

$$a^0 = 1, \ a^{-1} = \frac{1}{a}, \ a^{-2} = \frac{1}{a^2} \text{ и т. д.}$$

перейти къ степенямъ съ отрицательными показателями. Такъ, напримѣръ:

$$\alpha^{-x}\cdot\beta^{-x}=\frac{1}{\alpha^x}\cdot\frac{1}{\beta^x}=\frac{1}{\alpha^x\cdot\beta^x}=\frac{1}{(\alpha\cdot\beta)^x}=(\alpha\cdot\beta)^{-x};$$

далѣе имѣемъ:

$$\alpha^{-x}\cdot\alpha^{-y}=\frac{1}{\alpha^x}\cdot\frac{1}{\alpha^y}=\frac{1}{\alpha^{x+y}}=\alpha^{-(x+y)}=\alpha^{-x-y};$$

$$\alpha^{+x}\cdot\alpha^{-y}=\alpha^x\cdot\frac{1}{\alpha^y}=\frac{1}{\alpha^{y-x}}=\alpha^{-(y-x)}=\alpha^{+x-y},\quad (x<y);$$

$$(\alpha^{-x})^{-y}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^x}\right)^y}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^{xy}}\right)}=\alpha^{xy}=\alpha^{(-x)\cdot(-y)}\text{ и т. д.}$$

Не трудно также показать, что и всѣ остальныя формулы гл. I, § 7 B, I — V остаются справедливыми, если встрѣчающіеся въ нихъ показатели или всѣ, или частью будутъ отрицательными. А такъ какъ всѣ вычисленія со степенями основываются исключительно на этихъ формулахъ, то на практикѣ, при преобразованіи какого-либо выраженія намъ нѣтъ надобности дѣлать различіе между случаями положительныхъ и отрицательныхъ показателей степеней. Этимъ доказывается цѣлесообразность установленнаго нами опредѣленія степени съ отрицательнымъ показателемъ.

§ 8. Логариѳмированіе.

Въ области абсолютныхъ чиселъ мы называли x логариѳмомъ числа a при основаніи g, если удовлетворялось равенство $g^x=a$. Чтобы избѣжать излишней сложности, ограничимся пока лишь положительнымъ основаніемъ g и назовемъ ξ логариѳмомъ числа α, если $g^\xi=\alpha$; въ области же относительныхъ чиселъ g^ξ можетъ имѣть два значенія (§ 7 B, I, 2) въ томъ случаѣ, если ξ есть дробь, числитель которой есть число нечетное, а знаменатель четное. Чтобы каждому логариѳму соотвѣтствовало одно и только одно число, мы къ опредѣленію логариѳма присоединимъ еще такое условіе: если g^ξ имѣетъ два значенія, то главное значеніе g^ξ должно равняться α [1]). Такъ, напримѣръ, $\frac{1}{2}$ мы называемъ ло-

[1]) Коренная причина этого утвержденія, — именно то обстоятельство, что лишь главныя значенія какой-либо степени суть значенія одной и той же функціи, тогда какъ отрицательныя значенія могутъ соотвѣтствовать различнымъ

гариөмомъ только числа $+3$ при основаніи 9, хотя $9^{\frac{1}{2}} = \pm 3$. Вслѣдствіе этого въ нашей области чиселъ отрицательныя числа не имѣютъ логариөмовъ.

Для $\xi = 0$, $g^{\xi} = 1$, слѣдовательно, логариөмъ единицы при каждомъ основаніи равенъ нулю. Если $g > 1$, то для положительныхъ значеній ξ степень $g^{\xi} > 1$, а для отрицательныхъ $g^{\xi} < 1$, если же $g < 1$, то для положительныхъ значеній ξ степень $g^{\xi} < 1$, а для отрицательныхъ степень $g^{\xi} > 1$. Слѣдовательно, для основаній, бо́льшихъ единицы — а на практикѣ примѣняются исключительно только эти основанія, — числу бо́льшему единицы соотвѣтствуетъ положительный логариөмъ, а положительному числу, ме́ньшему единицы — отрицательный логариөмъ. Такъ какъ формулы степеней остаются справедливыми и для отрицательныхъ показателей, то и выведенныя на основаніи ихъ формулы для вычисленій съ логариөмами (гл. I, § 8 C) справедливы и тогда, когда всѣ логариөмы или часть ихъ отрицательны.

функціямъ, въ зависимости отъ значенія знаменателя въ показателѣ,—будетъ выяснена лишь послѣ введенія комплексныхъ чиселъ. Тамъ же мы дадимъ и опредѣленіе логариөма любого комплекснаго числа при любомъ комплексномъ основаніи. Ср. гл. VII, § 4 D и E.

ГЛАВА V.

Операціи въ области раціональныхъ чиселъ.

Введеніе. Введенныя до сихъ поръ числа, цѣлыя и дробныя, положительныя и отрицательныя, характеризуются общимъ названіемъ: „раціональныя“ числа. Въ главахъ отъ I до IV мы убѣдились въ томъ, что четыре основныя дѣйствія—сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе (единственное исключеніе—дѣленіе на нуль) надъ раціональными числами всегда выполнимы, т.-е. всегда приводятъ къ опредѣленнымъ раціональнымъ числамъ. Слѣдовательно, раціональныя числа образуютъ замкнутую область, изъ предѣловъ которой не выходятъ результаты первыхъ четырехъ дѣйствій. Въ приложеніяхъ математики, вообще говоря, вполнѣ достаточно области раціональныхъ чиселъ. Поэтому раньше, чѣмъ перейти къ введенію новыхъ чиселъ, которое съ теоретической точки зрѣнія во всякомъ случаѣ является необходимымъ, мы разберемъ рядъ операцій, выполнимыхъ въ раціональныхъ числахъ.

§ 1. Комбинаторика [1]).

А. Перестановки.

При построеніи понятія числа мы исходили (гл. I, § 1) изъ множествъ, состоявшихъ изъ такихъ вещей, отъ особыхъ свойствъ которыхъ мы совершенно отвлекались. Въ цѣляхъ, стоявшихъ

---

[1]) Комбинаторика въ XVIII столѣтіи и первой половинѣ XIX играла въ математической литературѣ бо́льшую роль, чѣмъ въ послѣднее десятилѣтіе. Если отдѣльныя задачи комбинаторики были разрѣшены уже въ IV столѣтіи

тогда передъ нами, мы разсматривали различныя вещи, какъ вполнѣ однородныя (сдѣлать это было тѣмъ легче, чѣмъ менѣе различій мы могли признать въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ); поэтому порядокъ расположенія вещей множества былъ для насъ вполнѣ безразличенъ, или точнѣе, для насъ совершенно не имѣло смысла говорить о какомъ-либо порядкѣ ихъ расположенія. Если же вещи, или „элементы" множества не разсматривать уже, какъ однородныя, т.-е. уже не отвлекаться отъ всѣхъ ихъ особыхъ свойствъ, то, какъ часто случается, ихъ относительное расположеніе въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ имѣетъ важное значеніе,—напримѣръ, если идетъ рѣчь о цыфрахъ десятичнаго числа, объ ученикахъ класса и пр. Поэтому зададимся вопросомъ, какія и сколько различныхъ относительныхъ расположеній элементовъ возможны въ *данномъ множествѣ*. Совокупность всѣхъ разсматриваемыхъ элементовъ, въ томъ случаѣ, когда насъ интересуетъ ихъ порядокъ, называется **перестановкой**. Обозначимъ черезъ P_n число возможныхъ перестановокъ всѣхъ n элементовъ. Очевидно, что $P_1 = 1$; $P_2 = 2$. Чтобы получить всевозможныя перестановки трехъ элементовъ, выдѣляемъ одинъ изъ трехъ элементовъ; онъ можетъ стоять на первомъ мѣстѣ во столькихъ перестановкахъ, сколько ихъ можно образовать изъ оставшихся элементовъ, т.-е. въ $P_2 = 2$ перестановкахъ. Такъ какъ каждый изъ трехъ элементовъ можетъ быть поставленъ на первомъ мѣстѣ, то мы получимъ всего $P_3 = 3\,P_2 = 3\cdot 2$ перестановокъ. Такимъ же образомъ находимъ $P_4 = 4\,P_3 = 4\cdot 3\cdot 2$, $P_5 = 5P_4 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ и т. д. Это даетъ поводъ ожидать, что P_n равно произведенію всѣхъ положительныхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до n. Въ правильности такого предположенія можно убѣдиться, пользуясь способомъ заключенія

до Р. Х. греками Ксенократомъ и Аристотелемъ, если индійскому астроному Бхаскара (XII столѣтіе по Р. Х.) было даже извѣстно число сочетаній опредѣленнаго класса безъ повтореній, число перестановокъ изъ отличныхъ другъ отъ друга элементовъ, или частью одинаковыхъ, то все-таки основателями этой дисциплины могутъ считаться лишь Паскаль, Лейбницъ, Валлисъ и, главнымъ образомъ, Яковъ Бернулли (Ars. conjectandi, Basel, 1713) и А. де Муавръ (Probabilities, London. 1718). Многочисленныя исчерпывающія изложенія комбинаторики появились въ концѣ XVIII и началѣ XIX столѣтій, а въ позднѣйшее время вышелъ лишь учебникъ комбинаторики E. Netto, Leipzig 1901, на который мы и ссылаемся во всѣхъ тѣхъ вопросахъ, въ подробности которыхъ въ этой книгѣ мы входить не можемъ. Нѣкоторыхъ авторовъ, работавшихъ въ XIX столѣтіи въ области комбинаторики, намъ придется цитировать при дальнѣйшемъ изложеніи.

отъ n къ $n+1$ [1]). Такимъ же образомъ непосредственно получаемъ $P_{n+1}=(n+1)P_n$, и если принять за доказанное, что

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n,$$

то слѣдуетъ, что

$$P_{n+1} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n\cdot(n+1),$$

т.-е. наша формула справедлива и для слѣдующаго большаго цѣлаго числа $n+1$; а такъ какъ она, очевидно, справедлива при $n=2$, то она имѣетъ мѣсто для каждаго положительнаго цѣлаго числа n. Для краткости произведеніе ряда натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n обозначаютъ черезъ $n!$ [1]).
Полученный результатъ поэтому мы можемъ представить въ слѣдующей сокращенной формѣ:

1. $$P_n = n!$$

Число $n!$ быстро возрастаетъ съ увеличеніемъ числа n.

Такъ

$2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$,
$7!=5040$, $8!=40\,320$, $9!=362\,880$, $10!=3\,628\,800$ и т. д.

Если составить перестановки изъ такихъ элементовъ, которые не всѣ разнородны, а изъ нихъ n_1 элементовъ ($n_1<n$) равны между собой, то и перестановки не всѣ уже будутъ отличаться одна отъ другой и при этомъ одинаковыми окажутся тѣ, которыя отличаются другъ отъ друга только порядкомъ этихъ n_1 элементовъ, при чемъ остальные $n-n_1$ элементовъ въ этихъ перестановкахъ сохраняютъ тѣ же мѣста. Изъ общаго числа перестановокъ каждыя $n_1!$ перестановокъ окажутся тождественными между собой. Слѣдовательно, число различныхъ между собой перестановокъ будетъ равно лишь $\frac{n!}{n_1!}$ Если теперь разсматривать, какъ равные, еще слѣдующіе n_2 элемента ($n_1+n_2\leqq n$), то снова каждыя $n_2!$ перестановки соединяются въ одну, а именно тѣ, которыя отличаются другъ отъ друга только порядкомъ этихъ

[1]) Ср. Глава I. § 3 B, стр. 11.

[1]) Обозначеніе $n!$ ведетъ свое начало отъ Ch. Kramp (Arithmétique universelle ou l'Algèbre, 1808). ($n!$ по-нѣмецки называютъ «n Fakultät». *Ред.*).

n_2 элементовъ; слѣдовательно, число отличныхъ другъ отъ друга перестановокъ будетъ равно

2. $$\frac{n!}{n_1!n_2!}$$ и т. д.

Опредѣленіе: Взаимное перемѣщеніе лишь двухъ элементовъ перестановки называется транспозиціей.

3. **Теорема:** Отъ каждой перестановки n элементовъ всегда можно перейти къ любой другой перестановкѣ тѣхъ же элементовъ при помощи не болѣе $n-1$ транспозицій.

Доказательство: Если двѣ перестановки I и II совпадаютъ, напр., въ ν первыхъ своихъ элементахъ, но уже отличаются другъ отъ друга, $\nu+1$-ми элементами, то мѣняемъ мѣстами въ I $\nu+1$-ый элементъ съ тѣмъ изъ послѣднихъ $n-\nu$ элементовъ, который во II стоитъ на $\nu+1$ мѣстѣ. Такимъ образомъ отъ перестановки I перейдемъ къ I′, которая окажется тождественной со II-ой въ своихъ уже $\nu+1$ первыхъ элементахъ. Такимъ же пріемомъ можно I преобразовать въ перестановку, которая имѣетъ со II-ой $\nu+2$ тождественныхъ мѣстъ. Въ крайнемъ случаѣ придется продѣлать $(n-1)$ транспозицію.

Опредѣленіе: Элементы перестановки принято обозначать или различными буквами a, b, c... или одной и той же буквой съ различными индексами a_1, a_2, a_3... или просто натуральными числами 1, 2, 3... При такихъ способахъ обозначенія перестановки своимъ видомъ ясно отличаются одна отъ другой; а именно, при буквенномъ обозначеніи—алфавитнымъ порядкомъ; при числовомъ—ихъ порядкомъ въ натуральномъ рядѣ. Какую-либо послѣдовательность элементовъ, установленную съ самаго начала, назовемъ главной перестановкой и изъ двухъ элементовъ высшимъ будемъ считать тотъ, который въ главной перестановкѣ находится на послѣдующемъ мѣстѣ. Если въ какой-либо другой перестановкѣ высшій элементъ будетъ предшествовать низшему, то такое взаимное расположеніе двухъ элементовъ назовемъ инверсіей. Очевидно, что главная перестановка инверсій не содержитъ. Напримѣръ, если за главную перестановку принять алфавитный порядокъ, то перестановка $ebcad$ имѣетъ 6 инверсій eb, ec, ea, ed, ba, ca.

Теорема: Если въ данной перестановкѣ произвести одну транспозицію, то количество инверсій мѣняется на нечетное число.

Доказательство: Пусть x и y суть тѣ элементы, которые мѣняются мѣстами; совокупность всѣхъ элементовъ, предшествующихъ x въ данной перестановкѣ, обозначимъ черезъ A, совокупность элементовъ, стоящихъ между x и y, черезъ B, и, наконецъ, всѣ элементы, слѣдующіе за y, черезъ C; тогда, перемѣщая x и y, мы отъ перестановки

$$(\mathrm{I}) \qquad A \quad x \quad B \quad y \quad C$$

перейдемъ къ перестановкѣ

$$(\mathrm{II}) \qquad A \quad y \quad B \quad x \quad C;$$

само собой понятно, число инверсій между элементами совокупностей A, B и C въ обоихъ случаяхъ одинаково такъ же, какъ и число инверсій между элементами A и x, между x и элементами C, между элементами A и y и, наконецъ, между y и элементами совокупности C. Такимъ образомъ, приходится сравнить только число инверсій въ

$$x \quad B \quad y$$

и

$$y \quad B \quad x.$$

Пусть B содержитъ ν элементовъ, изъ которыхъ ξ по отношенію къ x являются низшими, а, слѣдовательно, $\nu-\xi$ высшими, и пусть по отношенію къ y, η элементовъ являются низшими, а $\nu-\eta$ — высшими. Тогда число инверсій будетъ

въ $x\ B$ и $B\ y$ вмѣстѣ $\xi+\nu-\eta$,
въ $y\ B$ и $B\ x$ вмѣстѣ $\eta+\nu-\xi$.

Абсолютное значеніе разности этихъ двухъ выраженій равно $2(\xi-\eta)$, слѣдовательно, во всякомъ случаѣ число четное, а такъ какъ xy или yx даютъ одну инверсію, то количество инверсій въ (I) и во (II) отличаются другъ отъ друга на нечетное число.

Совокупность перестановокъ изъ n элементовъ дѣлятъ на два класса; къ первому классу относятъ всѣ перестановки, число инверсій въ которыхъ четное и называютъ ихъ „четными перестановками", ко второму же всѣ перестановки, число инверсій которыхъ нечетное, и называютъ ихъ „нечетными перестановками"; къ классу четныхъ перестановокъ принадлежитъ главная перестановка и всѣ тѣ перестановки, которыя получаются изъ нея при помощи четнаго числа транспозицій; къ классу же нечетныхъ перестановокъ принадлежатъ перестановки, получающіяся изъ главной нечетнымъ числомъ транспозицій.

Теорема: Число четныхъ перестановокъ такъ же, какъ и нечетныхъ, равно $\frac{1}{2}n!$

Доказательство: Допустимъ, что въ каждой четной перестановкѣ выполнена одна и та же транспозиція, напр. во всѣхъ переставлены первые два элемента. Такимъ образомъ, получаются лишь отличныя другъ отъ друга нечетныя перестановки. Слѣдовательно, общее число нечетныхъ перестановокъ, по крайней мѣрѣ таково же, какъ и число четныхъ. Подобнымъ же образомъ мы можемъ притти къ заключенію, что и общее число четныхъ перестановокъ должно быть, по крайней мѣрѣ, равно числу нечетныхъ; отсюда слѣдуетъ, что оба числа равны другъ другу, т.-е. каждое изъ нихъ равно $\frac{1}{2}n!$

Не разъ подвергались разсмотрѣнію также и перестановки съ ограниченной перемѣстимостью элементовъ, т.-е. такія, у которыхъ извѣстные элементы не могутъ занимать опредѣленныхъ мѣстъ. Л. Эйлеръ (Mémoires de S.-Pétersbourg III, 1809—1810, изд. 1811 стр. 57) изслѣдовалъ, напримѣръ, сколько перестановокъ можно составить изъ чиселъ 1, 2, 3, . . . n такимъ образомъ, чтобы ни одинъ изъ элементовъ не стоялъ на томъ мѣстѣ, которое онъ занимаетъ въ рядѣ натуральныхъ чиселъ. M. Cantor и Baur (Zeitschr. f. Math. und Phys. 2 (1857), стр. 103, 267) занимались слѣдующей задачей: даны $2n$ попарно равныхъ элементовъ a_1, a_1; a_2, a_2; . . . a_n, a_n; сколькими способами ихъ можно переставить такъ, чтобы два одинаковыхъ элемента не стояли непосредственно другъ за другомъ? и т. д. Рѣшеніе этихъ задачъ и другихъ имъ подобныхъ, можно найти въ выше цитированномъ учебникѣ комбинаторики E. Netto, Лейпцигъ 1901.

Если изъ данныхъ n элементовъ образовать множества, или „комплексы", изъ которыхъ каждое содержитъ не всѣ элементы, а только опредѣленную часть ихъ, то получаются, либо такъ называемыя размѣщенія (Variationen), либо сочетанія (Kombinationen) изъ n элементовъ.

B. **Размѣщенія.**

I. Размѣщенія безъ повтореній.

Размѣщеніемъ k-го класса безъ повтореній изъ n элементовъ называютъ комплексъ, состоящій изъ k элементовъ, выбранныхъ изъ группы n различныхъ между собой элементовъ; по отношенію къ этому комплексу насъ интересуетъ также и порядокъ элементовъ; слѣдовательно, въ данномъ случаѣ, два комплекса являются различными уже и тогда, если они состоятъ изъ одинаковыхъ элементовъ, но расположенныхъ въ различномъ порядкѣ. Такъ, напримѣръ, мы можемъ разсматривать, какъ размѣщенія 3-го класса изъ 5-ти элементовъ 1, 2, 3, 4, 5 безъ повтореній, всѣ трехзначныя десятичныя числа, состоящія изъ цыфръ 1, 2, 3, 4, 5, при чемъ каждая цыфра въ данномъ числѣ встрѣчается не болѣе одного раза. Поставимъ теперь себѣ задачей найти число $V_n^{(k)}$ размѣщеній k-го класса изъ n элементовъ безъ повтореній. Очевидно $V_n^{(1)} = n$. Чтобы составить всѣ размѣщенія 2-го класса, слѣдуетъ взять какой-либо изъ данныхъ n элементовъ и затѣмъ присоединять къ нему на второмъ мѣстѣ по одному изъ оставшихся $n-1$-го элементовъ; такимъ образомъ, $V_n^{(2)} = n\cdot(n-1)$. Размѣщеніе $(k+1)$-го класса можетъ быть образовано такъ: на первомъ мѣстѣ помѣщаемъ какой-либо изъ данныхъ n элементовъ и присоединяемъ къ нему любое размѣщеніе k-го класса изъ $(n-1)$ остальныхъ элементовъ; отсюда слѣдуетъ, что $V_n^{(k+1)} = n\cdot V_{n-1}^{(k)}$. Если намъ уже извѣстно, что для какого-либо цѣлаго значенія k, меньшаго n, имѣетъ мѣсто равенство

$$V_n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$$

и, слѣдовательно,

$$V_{n-1}^{(k)} = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k),$$

то при помощи равенства:

$$V_n^{(k+1)} = n\cdot V_{n-1}^{(k)}$$

заключаемъ, что

$$V_n^{(k+1)} = n\cdot(n-1)(n-2)\ldots(n-k).$$

Формула, слѣдовательно, справедлива и для значенія на единицу большаго, т.-е. для $k+1$. Такъ какъ она на самомъ дѣлѣ справедлива для $k=2$, то нами доказано, что для любыхъ цѣлыхъ значеній $k\,(\leqq n)$:

$$V_n^{(k)} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Число всѣхъ трехзначныхъ чиселъ, которыя можно составить изъ цыфръ 1, 2, 3, 4, 5 безъ повторенія одной и той же цыфры будетъ, на основаніи доказаннаго, равно:

$$V_5^{(3)} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

При $k = n$ размѣщенія переходятъ въ перестановки изъ n элементовъ, и, слѣдовательно,

$$V_n^{(n)} = n! = P_n.$$

Слѣдовательно, перестановки являются частнымъ случаемъ размѣщеній [1]).

II. Размѣщенія съ повтореніями.

Пусть n элементовъ, изъ которыхъ мы составляемъ наши комплексы, не всѣ различны между собой; μ_1 элементовъ будутъ a_1, μ_2 элементовъ $a_2, \ldots$ и, наконецъ μ_m элементовъ a_m, такъ что $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m = n$; комплексъ, содержащій какіе-либо k элементовъ, причисляется къ размѣщеніямъ k-го класса съ повтореніями (заранѣе предполагается, что послѣдовательность элементовъ въ такомъ комплексѣ имѣетъ значеніе). Числа $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ могутъ быть отличны другъ отъ друга. Если среди этихъ чиселъ встрѣчаются и меньшія k, то говорятъ, что здѣсь размѣщеніе k-го класса съ „ограниченнымъ повтореніемъ“. Если же, наоборотъ, числа $\mu_1, \mu_2 \ldots$ по крайней мѣрѣ равны k, слѣдовательно, въ каждомъ комплексѣ произвольное число мѣстъ изъ k, или даже всѣ k мѣстъ можетъ занимать одинъ какой-либо изъ элементовъ $a_1, a_2, \ldots a_m$, то такія размѣщенія называются „размѣщенія съ неограниченными повтореніями“, или, короче, „размѣщенія съ повтореніями“. Теорія размѣщеній съ ограниченными повтореніями, на разсмотрѣніи которой здѣсь подробно остановиться мы не можемъ, изложена у Netto въ „Lerbuch der Kombinatorik“ § 23 и д. Чтобы получить всѣ принадлежащія къ

---

1) L. Öttinger (Arch. d. Math. u. Phys. 15 Bd. 241 стр., 1850) энергично настаиваетъ на томъ, что въ комбинаторикѣ слѣдуетъ различать лишь двѣ основныхъ операціи: варіаціи, которыя онъ называетъ «Versetzungen» (перемѣщенія) и сочетанія,—ихъ называетъ «Verbindungen» (соединенія). Изъ педагогическихъ соображеній можно рекомендовать особо выдѣлить случай перестановокъ и остаться при обычномъ дѣленіи операцій комбинаторики на три части.

k-му классу размѣщенія съ неограниченными повтореніями, располагаемъ находящіеся въ нашемъ распоряженіи n элементовъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{ll} 1) & a_1,\ a_2, \ldots a_m, \\ 2) & a_1,\ a_2, \ldots a_m, \\ \ldots & \ldots\ldots \\ k) & a_1,\ a_2, \ldots a_m, \end{array}$$

Если нѣкоторые изъ элементовъ встрѣтились бы чаще, чѣмъ k разъ, то для образованія размѣщеній k-го класса, намъ все-таки не требовалось бы болѣе указанныхъ элементовъ. Поставимъ теперь на первое мѣсто какой-либо членъ первой строки, на второе мѣсто, независимо отъ этого, какой-либо членъ второй строки и т. д., и, наконецъ, на k-е мѣсто, какой-либо элементъ k-ой строки. Такъ какъ это можетъ быть осуществлено $\overbrace{m \cdot m \cdots m}^{(k \text{ множителей})} = m^k$ способами, то **число размѣщеній k-го класса съ неограниченнымъ повтореніемъ изъ n элементовъ, среди которыхъ какъ разъ m отличны другъ отъ друга, равно m^k.** Слѣдовательно, это число отъ значенія n совершенно не зависитъ; необходимо только, чтобы $n \geqq m \cdot k$; при чемъ k, само собой понятно, меньше n, но можетъ быть больше m.

Примѣръ: Изъ цыфръ 1, 2, 3, 4, 5 можно составить $5^3 = 125$ трехзначныхъ чиселъ, если въ одномъ и томъ же числѣ могутъ попадаться и одинаковыя цыфры.

C. Сочетанія.

I. Сочетанія безъ повтореній.

Если въ отдѣльныхъ комплексахъ порядокъ элементовъ безразличенъ, т.-е. если два комплекса не считаются различными, если они состоятъ изъ однихъ и тѣхъ же элементовъ, хотя бы и расположенныхъ въ различномъ порядкѣ, то такой комплексъ называется „сочетаніемъ“; при этомъ, если всѣ элементы, изъ которыхъ мы отбираемъ k элементовъ для образованія комплекса, различны между собой, то такое соединеніе называется сочетаніемъ безъ повтореній. Такъ какъ каждыя $k!$ размѣщеній k-го класса безъ повтореній, отличающіяся другъ отъ друга только порядкомъ элементовъ, сводятся къ единственному сочетанію (которое мы можемъ представить себѣ составленнымъ такъ, что среди его элементовъ не будетъ ни одной инверсіи), то число сочетаній, принадлежащихъ къ k-му классу, и составленныхъ изъ n элементовъ безъ повтореній равно

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

или также

$$C_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

При взаимномъ перемѣщеніи k и $n-k$ правая часть остается безъ измѣненія, слѣдовательно,

$$C_n^{(n-k)} = C_n^{(k)}.$$

Въ справедливости этой формулы можно убѣдиться еще слѣдующимъ разсужденіемъ: если изъ n элементовъ соединяемъ въ одну группу k, то $n-k$ элементовъ остаются свободными, слѣдовательно, изъ n элементовъ можно составить столько сочетаній по $(n-k)$ элементовъ, сколько ихъ можно составить по k элементовъ.

Число

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

которое мы только что опредѣлили, какъ значеніе $C_n^{(k)}$, часто встрѣчается во многихъ математическихъ изслѣдованіяхъ. Поэтому для него введено сокращенное обозначеніе $\binom{n}{k}$, которое читается „n по k“ (по нѣмецки „n über k“)[1]).

Между числами $\binom{n}{k}$ существуетъ очень много различныхъ соотношеній[2]); мы же ограничимся выводомъ наиболѣе простыхъ и наиболѣе важныхъ изъ нихъ.

a) Въ равенствѣ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

которое справедливо, прежде всего, для случая $1 \leqq k \leqq n-1$; лѣвая часть имѣетъ смыслъ и при $k=n$, именно $\binom{n}{n} = 1$; если

---

[1]) Л. Эйлеръ писалъ сперва $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$, позднѣе $\left(\frac{n}{k}\right)$; затѣмъ Rabe снова опустилъ черту (Journ. f. Math. Bd. 42 (1851), стр. 350).

[2]) Ср. E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik, § 156, также H. Schubert, Niedere Analysis (Leipzig 1902) I. Teil, § 4.

теперь символу $\binom{n}{0}$, который самъ по себѣ не имѣетъ смысла, придать значеніе 1, то вышеуказанное равенство будетъ справедливо и при $k=0$ и при $k=n$.

b)

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}.$$

Первое доказательство. Если $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{k-1}$ привести къ общему знаменателю $k!$, то получимъ:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)+n(n-1)\cdots(n-k+2)\cdot k}{k!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1+k)}{k!}=\binom{n+1}{k}.$$

Второе доказательство. $C_{n+1}^{(k)}=\binom{n+1}{k}$ сочетаній k-го класса, составленныхъ безъ повтореній изъ $n+1$ элемента, разбиваемъ на двѣ группы. Къ первой относимъ всѣ тѣ сочетанія, которыя не содержатъ $n+1$-го элемента; число такихъ сочетаній равно $C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$; вторая группа тогда будетъ содержать всѣ сочетанія, которыя состоятъ изъ $(n+1)$-го элемента и какого-либо сочетанія $k-1$ класса безъ повтореній изъ n первыхъ элементовъ; число ихъ равно $C_n^{(k-1)}=\binom{n}{k-1}$.

Слѣдовательно,

$$C_{n+1}^{(k)}=C_n^{(k)}+C_n^{(k-1)},$$

или

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}.\text{[1]}$$

Изъ только что доказанной формулы *b)* можно вывести рядъ важныхъ слѣдствій.

1. $$\binom{2}{0}=1,\ \binom{2}{1}=2,\ \binom{2}{2}=1,$$

$$\binom{3}{0}=1,\ \binom{3}{1}=3,\ \binom{3}{2}=3,\ \binom{3}{3}=1.$$

---

[1]) Многія формулы комбинаторики могутъ быть доказаны аналогичнымъ пріемомъ, а именно разложеніемъ на группы всѣхъ сочетаній опредѣленнаго класса.

Символъ $\binom{n}{k}$ представляетъ, слѣдовательно, при $n=2$ и при $n=3$ $[0 \leqq k \leqq n]$ цѣлыя числа. Изъ формулы b), примѣняя заключенiе отъ n къ $n+1$, мы видимъ, что $\binom{n}{k}$ для любого цѣлаго положительнаго значенiя n и для каждаго цѣлаго значенiя k, лежащаго между 0 и n, есть число цѣлое, послѣднее, конечно, уже можно было заключить изъ $\binom{n}{k}=C_n^{(k)}$.

2. Повторное примѣненiе формулы b) даетъ слѣдующiя равенства:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1},$$
$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2},$$
$$\binom{n-2}{k-2}=\binom{n-3}{k-2}+\binom{n-3}{k-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{n-k+2}{2}=\binom{n-k+1}{2}+\binom{n-k+1}{1},$$
$$\binom{n-k+1}{1}=\binom{n-k}{1}+\binom{n-k}{0},$$

сложенiе этихъ равенствъ даетъ:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-2}+\cdots+\binom{n-k+1}{2}+\binom{n-k}{1}+1.$$

Вмѣсто послѣдняго слагаемаго 1 можно написать и $\binom{n-k-1}{0}$.

3. Изъ формулы b) можно вывести также и слѣдующiя равенства:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1},$$
$$\binom{n-1}{k}=\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1},$$
$$\binom{n-2}{k}=\binom{n-3}{k}+\binom{n-3}{k-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{k+1}{k}=\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1},$$
$$\binom{k}{k}=\binom{k-1}{k-1}.$$

Складывая, находимъ:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$$

или, замѣняя $k-1$ черезъ k и записывая слагаемыя правой части въ обратномъ порядкѣ:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k}.$$

Стоящія въ правой части числа называются „фигурными числами" k-го порядка.

Равенство показываетъ, что сумма $n-k$ фигурныхъ чиселъ k-го порядка, равна $n-k$-му фигурному числу $k+1$-го порядка. ν первыхъ фигурныхъ чиселъ 1-го, 2-го и 3-го порядковъ соотвѣтственно равны:

$$\text{I)}\ \binom{1}{1}=1,\ \binom{2}{1}=2,\ \binom{3}{1}=\ 3,\ \binom{4}{1}=\ 4,\cdots\ \binom{\nu}{1}\ =\nu;$$

$$\text{II)}\ \binom{2}{2}=1,\ \binom{3}{2}=3,\ \binom{4}{2}=\ 6,\ \binom{5}{2}=10,\cdots\binom{\nu+1}{2}=\frac{(\nu+1)\nu}{1\cdot 2};$$

$$\text{III)}\ \binom{3}{3}=1,\ \binom{4}{3}=4,\ \binom{5}{3}=10,\ \binom{6}{3}=20,\cdots\binom{\nu+2}{3}=\frac{(\nu+2)(\nu+1)\nu}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Фигурныя числа второго и третьяго порядка находятся въ опредѣленныхъ соотношеніяхъ съ нѣкоторыми геометрическими фигурами [1]). Если каждую сторону (a) равносторонняго треугольника раздѣлить на ν равныхъ отрѣзковъ $\left(\alpha = \frac{a}{\nu}\right)$ и точки дѣленія, находящіяся на равныхъ разстояніяхъ отъ вершины, соединить прямыми параллельными третьей сторонѣ, то данный треугольникъ распадется на (ν^2) равносторонних треугольниковъ со стороной α. Число вершинъ всѣхъ полученныхъ этимъ построеніемъ треугольниковъ равно

$$1+2+3+4+\cdots+\nu+(\nu+1)=\binom{\nu+2}{2},$$

а, слѣдовательно, равно $(\nu+1)$-му фигурному числу второго порядка; въ силу этого соотношенія фигурныя числа второго порядка называются „треугольными числами".

---

[1]) Наглядное представленіе этихъ чиселъ при помощи геометрическихъ образовъ ведетъ свое начало отъ школы пиѳагорейцевъ. Ср. Cantor I, стр. 57. Позднѣйшіе греческіе математики также интересовались фигурными числами: Діофантъ написалъ особый трактатъ о многоугольныхъ числахъ; ср. Cantor, I, стр. 454.

Если каждое изъ трехъ сходящихся въ одной вершинѣ реберъ тетраэдра, раздѣлить на ν равныхъ частей (a) и провести плоскости черезъ каждыя три точки дѣленія, одинаково удаленныя отъ вершины, и затѣмъ подобно предыдущему, каждый изъ получившихся въ сѣченіи ν треугольниковъ (а въ томъ числѣ и основаніе), разбить на равносторонніе треугольники со стороною a, то число всѣхъ вершинъ будетъ равно

$$1+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{\nu+2}{2}=\binom{\nu+3}{3},$$

а, слѣдовательно, равно $(\nu+1)$-му фигурному числу третьяго порядка.

Въ силу этого фигурныя числа третьяго порядка называются числами „тетраэдральными".

Больше о фигурныхъ числахъ мы говорить не будемъ, такъ какъ въ новой математикѣ имъ уже не придаютъ того значенія, какъ это было въ XVI—XVIII столѣтіяхъ (ср. Baltzer, Elemente, 1. Bd., 2. Buch. § 28).

II. Сочетанія съ повтореніями.

Сочетаніе k-го класса изъ n элементовъ относится къ числу сочетаній того же класса съ повтореніями, если эти n элементовъ, изъ которыхъ выбираютъ по k элементовъ для составленія сочетаній, не всѣ различны между собой. Пусть снова, какъ въ В II (стр. 205) μ_1 изъ n элементовъ равны a_1, μ_2 равны $a_2, \cdots, \mu_m$ равны a_m и

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m=n.$$

Конечно, k должно имѣть значеніе меньшее, чѣмъ n, но можетъ быть больше m, т.-е. числа отличныхъ другъ отъ друга элементовъ. Здѣсь мы будемъ разсматривать только случай сочетаній съ неограниченнымъ числомъ повтореній, т.-е. когда всѣ числа $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_m$ равны, по крайней мѣрѣ, k; такимъ образомъ, произвольное число мѣстъ комплекса изъ общаго числа k и даже все число k мѣстъ можетъ оказаться занятымъ равными между собой элементами. Чтобы получить всѣ сочетанія k-го класса изъ этихъ элементовъ, будемъ исходитъ изъ расположенія, которымъ мы пользовались въ В II:

$$\begin{array}{llll} 1) & a_1, & a_2, \cdots & a_m, \\ 2) & a_1, & a_2, \cdots & a_m, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k) & a_1, & a_2, \cdots & a_m; \end{array}$$

возьмемъ въ первой строкѣ какой-либо произвольный членъ a_{μ_1}, но второй уже не совсѣмъ произвольный, а либо расположенный непосредственно подъ a_{μ_1} либо стоящій справа отъ него a_{μ_2}; изъ третьей строки или непосредственно стоящій подъ a_{μ_2}, или справа отъ него a_{μ_3} и т. д. Такъ какъ во всякомъ сочетаніи, полученномъ нашимъ пріемомъ, элементы расположены такъ, что никогда высшій элементъ не предшествуетъ низшему, то мы увѣрены, что описаннымъ пріемомъ получимъ всѣ сочетанія k-го класса и при этомъ каждое только по одному разу. Чтобы опредѣлить число этихъ сочетаній составимъ всевозможныя сочетанія k-го класса, пользуясь слѣдующей таблицей:

$$\begin{array}{llllll} 1) & a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & a_m, \\ 2) & a_2, & a_3, & a_4, & \cdots & a_{m+1}, \\ 3) & a_3, & a_4, & a_5, & \cdots & a_{m+2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k) & a_k, & a_{k+1}, & a_{k+2}, & \cdots & a_{k+m-1}, \end{array}$$

которая получится изъ предыдущей, если первую строку оставить безъ измѣненія, во второй—каждый индексъ увеличить на 1, въ третьей—увеличить на 2, и т. д., и наконецъ, въ k-ой—увеличить на $k-1$. Такимъ образомъ полученные комплексы представятъ изъ себя всѣ сочетанія k-го класса отличныхъ другъ отъ друга элементовъ $a_1, a_2, \cdots a_m, \cdots a_{m+k-1}$, каждый изъ которыхъ встрѣчается только одинъ разъ, и именно въ такомъ расположеніи элементовъ, при которомъ не встрѣчается инверсій. Такъ какъ каждому комплексу, образованному при помощи первой таблицы, соотвѣтствуетъ одинъ изъ комплексовъ второй таблицы и обратно, то число сочетаній k-го класса изъ ряда элементовъ, распадающихся на n группъ, содержащихъ не менѣе k элементовъ каждая, при чемъ элементы каждой группы между собой равны, а элементы различныхъ группъ—различны, равно числу сочетаній k-го класса изъ отличныхъ другъ отъ друга элементовъ a_1, a_2, $a_3 \cdots a_{m+k-1}$, а слѣдовательно, равно

$$C_{m+k-1}^{(k)} = \binom{m+k-1}{k}.$$

Основная мысль только что приведеннаго доказательства встрѣчается впервые у H. F. Scherk, Journ. f. Math., Bd. III (1828), стр. 97, а также у F. A. Förstemann, Journ. f. Math., Bd. XIII (1835). стр. 237.

D. Одно приложеніе комбинаторики.

Главныя примѣненія комбинаторики мы разсмотримъ въ слѣдующихъ §§ этой главы (степень двучлена и многочлена, § 2; вычисленіе вѣроятностей, § 6). Здѣсь же мы разсмотримъ въ общихъ чертахъ задачу, упомянутую раньше, а именно вопросъ о томъ, сколькими различными способами можно вычислить сумму n слагаемыхъ или произведеніе n сомножителей, если въ одномъ дѣйствіи соединять только два изъ нихъ и разсматривать полученную сумму (произведеніе), какъ отдѣльный элементъ слѣдующаго дѣйствія. Эта задача разобрана E. Catalan (Journ. de Mathématiques pures et appliquées, publ. par Liouville, т. III (1838), стр. 515 и т. VI (1841), стр. 74), O. Rodrigues (тотъ же журналъ, т. III (1838), стр. 549) и независимо отъ этихъ авторовъ E. Schröder'омъ, (Zeitschr. f. Math., т. XV (1870), стр. 361 и т. XVI (1871), стр. 179).

Если можно образовать сумму [1]) n различныхъ другъ отъ друга чиселъ $a_1, a_2, \cdots a_n$, не измѣняя ихъ порядка, u_n способами, то число $v_n = n! \cdot u_n$ покажетъ, сколькими способами можетъ быть выполнено суммированіе при любомъ порядкѣ слагаемыхъ. Для $n = 4$ возможны, если придерживаться порядка a_1, a_2, a_3, a_4, слѣдующіе, указанные скобками способы образованія суммъ:

$$\begin{array}{ll}
1) & \{a_1 + [a_2 + (a_3 + a_4)]\}, \\
2) & \{a_1 + [(a_2 + a_3) + a_4]\}, \\
3) & [(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)], \\
4) & \{[(a_1 + a_2) + a_3] + a_4\}, \\
5) & \{[a_1 + (a_2 + a_3)] + a_4\}.
\end{array}$$

Для u_{n+1} нетрудно вывести рекурсіонную формулу. При вычисленіи всевозможныхъ $(n+1)$—членныхъ суммъ, послѣднее дѣйствіе непремѣнно состоитъ въ соединеніи двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое составлено сложеніемъ въ произвольномъ по-

[1]) Далѣе мы будемъ говорить лишь о сложеніи; при замѣнѣ словъ: «слагаемое, сумма» словами «сомножитель, произведеніе» всѣ выводы остаются справедливыми.

рядкѣ первыхъ i членовъ, а второе — сложеніемъ послѣднихъ $n+1-i$ членовъ, гдѣ i имѣетъ значенія $1, 2, 3 \cdots n$.

Такъ какъ не измѣняя порядка слагаемыхъ, сумму изъ i членовъ можно образовать u_i способами, а сумму изъ $n+1-i$ членовъ — u_{n+1-i} способами, то для опредѣленнаго значенія i имѣемъ $u_i \cdot u_{n+1-i}$ способовъ образованія суммы; для всѣхъ допустимыхъ значеній i число возможныхъ способовъ составленія суммъ равно

$$u_{n+1} = u_1 \cdot u_n + u_2 \cdot u_{n-1} + u_3 \cdot u_{n-2} + \cdots + u_{n-1} \cdot u_2 + u_n \cdot u_1.$$

Очевидно, что

$$u_1 = 1, \; u_2 = 1,$$

слѣдовательно,

$$u_3 = u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_1 = 2,$$
$$u_4 = u_1 u_3 + u_2 u_2 + u_3 u_1 = 2 + 1 + 2 = 5 \text{ и т. д.}$$

Изъ только что данной рекурсіонной формулы не трудно вывести выраженіе для u_n. Но для этой цѣли намъ понадобилось бы такое разложеніе въ рядъ, знанія котораго въ этомъ мѣстѣ сочиненія мы предполагать не можемъ. Поэтому мы укажемъ простой методъ, данный Rodrigues въ цитированномъ выше сочиненіи для непосредственнаго опредѣленія v_n.

Какими бы v_n способами ни образовывать суммы изъ n членовъ, всегда, если только въ частныя суммы соединять по два члена, придется продѣлать $n-1$ сложеніе. Если для вычисленія n—членной суммы выбранъ опредѣленный методъ, то $n+1$-ый членъ, при каждомъ изъ $n-1$ сложеній можно присоединять 4 способами, а именно, какъ 1-е или какъ 2-е слагаемое первой частной суммы, или какъ 1-е или 2-е слагаемое второй частной суммы; а, слѣдовательно, всего на всего получаемъ $4(n-1)$ способовъ; и, наконецъ, $(n+1)$-ое слагаемое съ полученной суммой n первыхъ слагаемыхъ можетъ быть соединено въ одну сумму двумя способами. Каждому опредѣленному способу образованія суммы изъ n членовъ соотвѣтствуетъ, слѣдовательно,

$$4(n-1) + 2 = 4n - 2$$

возможныхъ способовъ образованія суммы изъ $n+1$ слагаемаго; поэтому мы имѣемъ

$$v_{n+1} = (4n - 2)\, v_n$$

или

$$\begin{aligned} v_n &= (4n-6)\,v_{n-1}, \\ v_{n-1} &= (4n-10)\,v_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ v_4 &= 10\,v_3, \\ v_3 &= 6\,v_2, \\ v_2 &= 2. \end{aligned}$$

Перемноженіе послѣднихъ $n-1$ равенствъ даетъ

$$v_n = (4n-6)(4n-10)\cdots 10\cdot 6\cdot 2.$$

Catalan и Rodrigues, въ выше цитированныхъ работахъ, указали и на то, что только что разобранная задача тѣсно связана со слѣдующимъ вопросомъ: сколькими способами можно плоскій многоугольникъ разбить діагоналями на треугольники?

Для дальнѣйшаго знакомства съ примѣненіями комбинаторики къ играмъ и проч. указываемъ на W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Лейпцигъ 1901.

§ 2. Простѣйшія дѣйствія надъ раціональными функціями

A. Опредѣленіе цѣлой раціональной функціи.

Пусть изъ произвольныхъ раціональныхъ чиселъ a, b, $c, \cdots x$, y, $z, \cdots$ образовано выраженіе F при помощи сложенія, вычитанія и умноженія. Такъ какъ каждое вычитаніе можно разсматривать, какъ сложеніе съ числомъ противоположнымъ, то мы можемъ представить F полученнымъ лишь сложеніемъ и умноженіемъ.

Произведеніе двухъ алгебраическихъ суммъ всегда можетъ быть представлено въ видѣ алгебраической суммы; въ силу этого мы всегда можемъ выраженіе F привести къ виду алгебраической суммы, отдѣльные члены которой имѣютъ форму $a^\alpha\cdot b^\beta\cdot c^\gamma\cdots x^\xi\cdot y^\eta\cdot z^\zeta\cdots$ гдѣ α, β, $\gamma, \cdots \xi$, η, $\zeta, \cdots$ означаютъ положительныя цѣлыя числа. Если въ опредѣленномъ изложеніи или доказательствѣ a, b, $c, \cdots$ сохраняютъ неизмѣнное значеніе въ то время, какъ x, y, $z, \cdots$ принимаютъ различныя значенія, то каждой опредѣленной системѣ значеній x, y, z, соотвѣтствуетъ и опредѣленное значеніе образованнаго изъ нихъ выраженія F, а различнымъ системамъ значеній x, y, z, $\cdots$ соотвѣтствуютъ вообще и различныя значенія F. Въ этомъ случаѣ F называютъ „функціей“ перемѣнныхъ чиселъ x, y, $z \cdots$, и если, какъ это было предположено, надъ x, y, z, $\cdots$ для образованія F производилось только сложеніе и умноженіе, то „цѣлой раціональной функціей“. Если мы желаемъ указать, что нашъ интересъ главнымъ образомъ направленъ на перемѣнныя x, y, z, $\cdots$, то записываемъ произведеніе $a^\alpha b^\beta c^\gamma x^\xi y^\eta z^\zeta$ и сокращенно въ видѣ $C_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta$, гдѣ число $C_{\xi\eta\zeta}$, называемое „коэффиціентомъ“, не даетъ уже указаній на способъ образованія его изъ чиселъ a, b, c [1]). По числу перемѣнныхъ, отъ которыхъ зависитъ функція F, ее называютъ функціей одного, двухъ, трехъ и т. д. перемѣнныхъ.

B. Сложеніе и вычитаніе.

Сумма и разность двухъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій непосредственно можетъ быть представлена въ видѣ алгебраической суммы произведеній слѣдующей формы: $C_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta$. Такое выраженіе упрощаютъ, соединяя въ одинъ членъ члены, въ которыхъ показатели ξ, η, ζ имѣютъ одинаковое значеніе:

$$C_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta \pm C'_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta \pm C''_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta \pm \cdots$$
$$= (C_{\xi\eta\zeta} \pm C'_{\xi\eta\zeta} \pm C''_{\xi\eta\zeta} \pm \cdots) x^\xi y^\eta z^\zeta,$$

а вмѣсто этого короче пишутъ

$$K_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta,$$

если для насъ не важенъ способъ составленія коеффиціентовъ:

$$K_{\xi\eta\zeta} = C_{\xi\eta\zeta} \pm C'_{\xi\eta\zeta} \pm C''_{\xi\eta\zeta} \pm \cdots$$

Приведенная такимъ образомъ форма цѣлой раціональной функціи называется ея нормальной формой. Если перемѣнное въ данную функцію входитъ въ степени n, но не въ болѣе высокой, то функцію называютъ функціей n-ой степени, по отношенію къ этому перемѣнному.

---

[1]) $C_{\xi\eta\zeta}$ можетъ получиться изъ a, b, c также и путемъ другихъ дѣйствій, кромѣ сложенія и умноженія, при чемъ F не теряетъ характера цѣлой раціональной функціи чиселъ x, y и z.

C. Умноженіе. Степень двучлена и многочлена.

Произведеніе двухъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій можетъ быть представлено въ видѣ нормальной формы одной раціональной функціи (гл. I, § 5 C; гл. II, § 4; гл. IV, § 5 A). При умноженіи нѣсколькихъ раціональныхъ функцій выполняютъ дѣйствіе послѣдовательно: сперва составляютъ произведеніе двухъ первыхъ функцій; затѣмъ полученное произведеніе умножаютъ на третью функцію и т. д. Теперь разсмотримъ преобразованіе въ алгебраическую сумму нѣкоторыхъ особыхъ, часто встрѣчающихся произведеній.

I. Пусть дано слѣдующее произведеніе изъ n множителей:

$$(a+x_1)\cdot(a+x_2)\cdot(a+x_3)\cdots(a+x_{n-1})\cdot(a+x_n).$$

Искомый результатъ мы можемъ найти, кромѣ вышеуказаннаго способа, руководясь еще и такимъ разсужденіемъ: каждый членъ искомой суммы представляетъ произведеніе изъ n множителей и имѣетъ первымъ сомножителемъ одно изъ двухъ слагаемыхъ перваго бинома, и вторымъ—одно изъ двухъ слагаемыхъ второго бинома и т. д. Если изъ каждаго бинома взять первое слагаемое, то получимъ членъ a^n; если изъ $(n-1)$ биномовъ взять первое слагаемое, а изъ $n^{\text{го}}$ остающееся второе слагаемое, то получимъ слѣдующіе члены:

$$a^{n-1}x_1,\ a^{n-1}x_2,\cdots,\ a^{n-1}x_{n-1},\ a^{n-1}x_n;$$

если взять первое слагаемое изъ $n-2$ биномовъ, а изъ двухъ остающихся взять вторыя слагаемыя, то получимъ слѣдующіе члены:

$$a^{n-2}x_1x_2,\ a^{n-2}x_1x_3,\cdots a^{n-2}x_{n-1}x_n.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, увидимъ, что данное произведеніе равно слѣдующей суммѣ:

$$\begin{aligned}a^n&+a^{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+a^{n-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)+\cdots+\\&+a^{n-\nu}(x_1x_2\cdots x_\nu+\cdots+x_{n-\nu+1}\cdots x_{n-1}x_n)+\cdots+\\&+a(x_1x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+x_2x_3\cdots x_n)+x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n,\end{aligned}$$

гдѣ коэффиціентъ при $a^{n-\nu}$ является суммой всѣхъ произведеній по ν изъ n величинъ $x_1, x_2,\cdots, x_n$; число этихъ произведеній равно числу сочетаній $\nu^{\text{го}}$ класса безъ повтореній, составленныхъ изъ n

элементовъ (§ 1 C, I), слѣдовательно, равно $\binom{n}{\nu}$. Если, въ частномъ случаѣ положить

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x, \text{ то получится}$$

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}x + \binom{n}{2} a^{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{\nu} a^{n-\nu}x^\nu + \cdots + \\ + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \binom{n}{1} ax^{n-1} + x^n.$$

Эта важная формула, изображающая n-ую степень двучлена въ видѣ суммы называется **биноміальной теоремой** [1]).

Коэффиціенты правой части $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \cdots$, которые мы получили въ качествѣ чиселъ сочетаній безъ повтореній, въ виду того, что они встрѣчаются въ только что выведенной формулѣ, еще называются и биноміальными коэффиціентами.

Для сравнительно небольшихъ значеній числа n можно $(a+x)^n$ найти послѣдовательнымъ умноженіемъ:

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$
$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$
$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 \text{ и т. д.}$$

Если уже эти формулы непосредственно указываютъ, что коэффиціенты правой части въ случаѣ показателей, равныхъ 2, 3, 4, $\cdots$ и т. д., являются числами сочетаній $\binom{n}{\nu}$, то справедливость биноміальной формулы при любомъ цѣломъ и положительномъ значеніи n легко доказывается способомъ заключенія отъ n къ $n+1$; послѣднимъ пріемомъ получается второе доказательство этого важнаго предложенія.

Если

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}x + \binom{n}{2} a^{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{\nu} a^{n-\nu}x^\nu + \\ + \binom{n}{\nu+1} a^{n-\nu-1}x^{\nu+1} + \cdots + \binom{n}{n-1} ax^{n-1} + x^n,$$

---

[1]) Коэффиціенты разложенія $(a+x)^n$ встрѣчаются впервые въ Arithmetica integra Michael'я Stifel'я (1544), который хотя и не выписываетъ формулы бинома цѣликомъ, но пользуется уже коэффиціентами для рѣшенія обратной задачи, а именно, для извлеченія корня. Ср. Cantor II, стр. 433—434.

то умножая обѣ части на $(a+x)$ получаемъ:

$$(a+x)^{n+1}=a^{n+1}+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right]a^n x+\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right]a^{n-1}x^2+\cdots$$
$$+\left[\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu-1}\right]a^{n-\nu+1}x^\nu+\left[\binom{n}{\nu+1}+\binom{n}{\nu}\right]a^{n-\nu}x^{\nu+1}+\cdots$$
$$+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}\right]a^2x^{n-1}+\left[1+\binom{n}{n-1}\right]ax^n+x^{n+1},$$

или, такъ какъ по § 1 C, I b

$$\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu-1}=\binom{n+1}{\nu},$$

имѣемъ:

$$(a+x)^{n+1}=a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^n x+\cdots+\binom{n+1}{\nu}a^{n-\nu+1}x^\nu+\cdots$$
$$+\binom{n+1}{n}ax^n+x^{n+1}.$$

Слѣдовательно, если биноміальная формула справедлива для какого-либо значенія показателя, она справедлива и для показателя на единицу бóльшаго. Такъ какъ эта формула вѣрна для $n=2$, то, слѣдовательно, мы доказали ея справедливость и для любого цѣлаго положительнаго значенія n.

Слѣдствія.

1. Для $a=1$ и $x=1$ биноміальная формула даетъ

$$2^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\nu}+\cdots+\binom{n}{n-1}+1.$$

2. Пользуясь этой формулой легко доказать тѣ предложенія, которыя раньше (ср. стр. 32, 96 и 97) были доказаны инымъ путемъ нѣсколько сложнѣе.

a) Если $z>1$, то z^n при достаточно большомъ значеніи n можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ.

Доказательство: пусть

$$z=1+p,$$

гдѣ p означаетъ нѣкоторое положительное число. На основаніи формулы бинома имѣемъ

$$z^n=(1+p)^n=1+np+\binom{n}{2}p^2+\cdots+p^n,$$

слѣдовательно,

$$z^n > 1 + np.,$$

такъ какъ при достаточно большомъ значеніи n, произведеніе np можетъ быть сдѣлано произвольно большимъ, то наше утвержденіе является доказаннымъ.

b) Если $z < 1$, то z^n при достаточно большомъ значеніи n можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ.

Доказательство: если $z < 1$, то $y = \frac{1}{z} > 1$, а такъ какъ y^n при достаточно большомъ значеніи n можетъ быть больше любого числа, то $z^n = \frac{1}{y^n}$ можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ.

II. Пусть выраженіе:

$$(a + b + c)^n = \overbrace{(a + b + c)\cdot(a + b + c)\cdots(a + b + c)}^{(n \text{ сомножителей})}$$

требуется преобразовать въ сумму.

Какой-либо членъ искомой суммы получается умноженіемъ одного изъ трехъ слагаемыхъ перваго трехчлена на одно изъ трехъ слагаемыхъ второго и т. д., и, наконецъ, на одно изъ трехъ слагаемыхъ n-го трехчлена. Если изъ α скобокъ возьмемъ первое слагаемое a, изъ β скобокъ второе слагаемое b и изъ γ скобокъ третье слагаемое c $(\alpha + \beta + \gamma = n)$, то получится произведеніе: $a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Чтобы установить, сколькими способами можно составить это произведеніе, напишемъ вмѣсто каждаго изъ α трехчленовъ, изъ которыхъ берется первое слагаемое, букву a, вмѣсто β трехчленовъ, изъ которыхъ берется второе слагаемое, напишемъ b, наконецъ, вмѣсто γ трехчленовъ, изъ которыхъ беремъ третье слагаемое, напишемъ c. Каждое отдѣльное расположеніе буквъ a, b, c соотвѣтствуетъ какъ разъ одному способу полученія произведенія $a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Число подобныхъ произведеній будетъ равно числу перестановокъ изъ n элементовъ, среди которыхъ α элементовъ равны a, β элементовъ равны b и γ элементовъ равны c, т.-е. на основаніи § 1 A: $\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$ Каждое изъ чиселъ α, β, γ можетъ принимать любыя цѣлыя значенія 0, 1, 2..., n, но лишь при томъ условіи, что $\alpha + \beta + \gamma = n$.

Слѣдовательно, мы получимъ всѣ члены искомой суммы, если представимъ n въ видѣ всевозможныхъ суммъ трехъ чиселъ α, β и γ, каждое изъ которыхъ принимаетъ значеніе 0, 1, 2, ... n, а затѣмъ каждое произведеніе, соотвѣтствующее опредѣленному разложенію n умножимъ на $\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$ и полученные такимъ образомъ выраженія сложимъ. Одинаковые коэффиціенты будутъ имѣть члены, получающіеся одинъ изъ другого простымъ перемѣщеніемъ показателей α, β, γ. Если для обозначенія суммы воспользоваться греческой буквой $\sum$, то способъ образованія суммы выразится короче слѣдующей формулой:

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{\alpha = \\ \beta = \\ \gamma =}\Big\} 0,\,1,\,2,\ldots n} \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

при условіи $\alpha+\beta+\gamma=n$.

Совершенно такимъ же образомъ получается выраженіе n-ой степени суммы m слагаемыхъ:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n = \sum_{\substack{\alpha_1 = \\ \alpha_2 = \\ \alpha_3 = \\ \cdots \\ \alpha_m =}\Big\} 0,\,1,\,2,\ldots n.} \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}\cdots a_m^{\alpha_m}$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=n).$$

Эта формула называется **„полиноміальной теоремой“** [1]).

Если для краткости ввести обозначенія:

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=P$$

и затѣмъ соединить всѣ члены правой части, имѣющіе одинъ и тотъ же коэффиціентъ, то будемъ имѣть

$$P^2=\sum a_\mu^2+2\sum a_\mu a_\nu,$$

$$P^3=\sum a_\mu^3+3\sum a_\mu^2 a_\nu+6\sum a_\mu a_\nu a_\rho,$$

$$P^4=\sum a_\mu^4+4\sum a_\mu^3 a_\nu+6\sum a_\mu^2 a_\nu^2+12\sum a_\mu^2 a_\nu a_\rho+24\sum a_\mu a_\nu a_\rho a_\sigma \text{ и т. д.}$$

гдѣ знакъ $\sum$ указываетъ на то, что слѣдуетъ брать суммы тѣхъ членовъ, которые образуются изъ написаннаго, придавая μ, ν, ρ и σ

---

[1]) Впервые о ней упоминается въ одномъ письмѣ Лейбница къ Іоанну Бернулли (май 1695). Указанный способъ доказательства примѣнимъ, конечно, также и для вывода биноміальной теоремы.

всѣ различныя между собой системы значеній, изъ ряда 1, 2, 3,... n.

Разложеніе $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$ находится въ тѣсной связи съ размѣщеніями и сочетаніями n-го класса съ повтореніями. Если получаемые при перемноженіи n скобокъ члены оставить въ видѣ произведеній, пользуясь сокращенной записью въ видѣ степеней, то они образуютъ всѣ размѣщенія n-го класса изъ m элементовъ $a_1, a_2, \ldots a_m$ съ повтореніями, число которыхъ, по § 1 B, II, стр. 206, есть m^n; если члены, отличающіеся только мѣстомъ сомножителей, а, слѣдовательно, дающіе одно и то же произведеніе $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}$, разсматривать не какъ различные, то получимъ всѣ сочетанія n-го класса съ повтореніями изъ m элементовъ; поэтому число различныхъ между собой членовъ въ разложеніи $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m)^n$, на основаніи § 1 C, II, стр. 211, равно $\binom{m+n-1}{n}$; слѣдовательно, столькими способами можно изобразить и число n въ видѣ суммы m слагаемыхъ, каждое изъ которыхъ имѣетъ одно изъ значеній 0, 1, 2,... n.

Чтобы преобразовать выраженіе

$$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m)^n$$

въ сумму, расположенную по степенямъ x, мы воспользуемся формулой

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{\left.\begin{matrix}\alpha_0 = \\ \alpha_1 = \\ \alpha_2 = \\ \cdots \\ \alpha_m = \end{matrix}\right\} 0,\ 1,\ 2, \ldots n,} \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_m!} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_m^{\alpha_m}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n),$$

и положимъ:

$$a_\mu = A_\mu x^\mu \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2, \ldots, m).$$

Тогда будемъ имѣть;

$$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m)^n =$$

$$= \sum_{\left.\begin{matrix}\alpha_0 = \\ \alpha_1 = \\ \alpha_2 = \\ \cdots \\ \alpha_m = \end{matrix}\right\} 0,\ 1,\ 2, \ldots m} \frac{n!}{\alpha_0!\, \alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_m!} A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_m^{\alpha_m} \cdot x^{0\alpha_0 + 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = n.$$

Всѣ члены правой части, въ которыхъ сумма

$$1\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+m\alpha_m$$

имѣетъ одинаковыя значенія, могутъ быть соединены въ одинъ членъ. Коэффиціентъ при x^k ($k=0, 1, 2, \ldots mn$) есть, слѣдовательно, сумма всѣхъ выраженій, которыя получаются изъ

$$\frac{n!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\cdot A_0^{\alpha_0}A_1^{\alpha_1}A_2^{\alpha_2}\cdots A_m^{\alpha_m},$$

если придавать $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ всѣ значенія изъ ряда чиселъ $0, 1, 2, \ldots n$, для которыхъ

$$1.\quad \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=n$$
$$\text{и } 2.\quad 1\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots+m\alpha_m=k.$$

Такъ, напримѣръ, имѣемъ:

$$\begin{aligned}
&(A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots)^2=\\
&\quad=A_0^2+2A_0A_1x+(2A_0A_2+A_1^2)x^2+(2A_0A_3+2A_1A_2)x^3+\\
&\quad+(2A_0A_4+2A_1A_3+A_2^2)x^4+(2A_0A_5+2A_1A_4+2A_2A_3)x^5+\cdots;\\
&(A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots)^3=\\
&\quad=A_0^3+3A_0^2A_1x+(3A_0A_1^2+3A_0^2A_2)x^2+\\
&\qquad+(3A_0^2A_3+6A_0A_1A_2+A_1^3)x^3+\\
&\qquad+(3A_0^2A_4+6A_0A_1A_3+3A_0A_2^2+3A_1^2A_2)x^4+\\
&\qquad+(3A_0^2A_5+6A_0A_1A_4+6A_0A_2A_3+3A_1^2A_3+3A_1A_2^2)x^5+\cdots
\end{aligned}$$

D. Дѣленіе.

Пусть

$$f(x, y, z, a, b, c),\quad g(x, y, z, a, b, c),\quad F(x, y, z, a, b, c)$$

суть цѣлыя раціональныя функціи x, y, z, a, b, c, и пусть, кромѣ того,

$$F=f\cdot g.$$

Поставимъ теперь себѣ задачей, зная функціи F и f, вычислить функцію g, т.-е. частное $F:f$. Для этой цѣли представимъ себѣ члены функцій расположенными слѣдующимъ образомъ: прежде всего установимъ опредѣленный порядокъ величинъ, отъ которыхъ зависитъ функція, напр. x, y, z, a, b, c, и напишемъ сначала члены, въ которыхъ показатель степени x имѣетъ наибольшее значеніе, затѣмъ тѣ члены, показатель степени x въ которыхъ имѣетъ слѣдующее меньшее значеніе и т. д. Всю совокупность членовъ, содержащихъ одну и ту же степень x, расположимъ по убывающимъ степенямъ y; члены, въ которыхъ, какъ x, такъ и y имѣютъ одинаковые показатели степеней,—расположимъ по нисходящимъ степенямъ z; тѣ, которые имѣютъ одинаковые показатели степеней при x, y и z, — по нисходящимъ степенямъ буквы a и т. д. Членъ, занимающій при такомъ расположеніи [1]) 1-е мѣсто, назовемъ высшимъ (особымъ) членомъ функціи. Если двѣ функціи f и g перемножить, то произведеніе высшаго члена f на высшій членъ g дастъ высшій членъ функціи $F=f\cdot g$. На этомъ свойствѣ основывается слѣдующій методъ вычисленія функціи g по даннымъ функціямъ F и f. Дѣля высшій членъ F на высшій членъ f получимъ высшій членъ A функціи g. Если теперь положить

$$g=A+g_1,$$

то получимъ

$$F=f\cdot g=A\cdot f+f\cdot g_1$$

и

$$F_1=F-A\cdot f=f\cdot g_1;$$

слѣдовательно, если изъ F вычесть произведеніе $A\cdot F$ и раздѣлить высшій членъ остатка $F_1=F-A\cdot f$ на высшій членъ f, то получится B, высшій членъ g_1; положимъ теперь далѣе

$$g_1=B+g_2$$
$$F_1=f\cdot g_1=f\cdot B+f\cdot g_2,$$
$$F_2=F_1-f\cdot B=f\cdot g_2;$$

тогда дѣленіе высшаго члена F_2 на высшій членъ f, дастъ C—высшій членъ g_2. Продолжая вычисленіе подобнымъ образомъ, найдемъ всѣ члены функціи g. Этотъ пріемъ дѣленія можно примѣнять и тогда, когда F и f суть суммы произведеній степеней, показатели которыхъ или всѣ, или частью, имѣютъ отрицательныя или дробныя значенія, такъ какъ принципъ расположенія, на которомъ и основанъ методъ дѣленія, примѣнимъ и въ этомъ случаѣ, и для умноженія и дѣленія такихъ степеней справедливы тѣ же (см. гл. II § 5 B и гл. IV § 7 C) правила, какъ и для соотвѣт-

[1]) Вмѣсто того, чтобы начинать съ высшихъ степеней, мы могли бы вездѣ начать и съ низшихъ.

ствующихъ дѣйствій надъ степенями, показатели которыхъ натуральныя числа.

Примѣръ. Пусть

$$F = 3ax^6y - 6x^6y + 9x^4y^4 - 2a^2x^4y^2 + 4ax^4y^2 - 3ax^3y^4 + \\ + 4a^3x^3y^2 - 8a^2x^3y^2 - 6ax^2y^5 + 14a^2xy^5 - 4a^3y^5$$

и

$$f = ax^3y - 2x^3y + 3xy^4 - ay^4.$$

Очевидно, что здѣсь всѣ члены уже расположены согласно установленному принципу.

Высшій членъ A искомой функціи g есть частное

$$3ax^6y : ax^3y = 3x^3.$$

$$F_1 = F - 3x^3 \cdot f = -2a^2x^4y^2 + 4ax^4y^2 + 4a^3x^3y^2 - \\ - 8a^2x^3y^2 - 6ax^2y^5 + 14a^2xy^5 - 4a^3y^5.$$

Слѣдующій членъ B функціи g есть частное

$$-2a^2x^4y^2 : ax^3y = -2axy.$$

$$F_2 = F_1 + 2axy \cdot f = 4a^3x^3y^2 - 8a^2x^3y^2 + 12a^2xy^5 - 4a^3y^5.$$

$$C = 4a^3x^3y^2 : ax^3y = 4a^2y.$$

$$F^2 - 4a^2y \cdot f = 0;$$

слѣдовательно:

$$F_1 + 2axyf - 4a^2yf = 0,$$

и

$$F - 3x^3f + 2axyf - 4a^2yf = 0,$$

т.е.,

$$F = f \cdot (3x^3 - 2axy + 4a^2y).$$

Часто встрѣчаются слѣдующія частныя:

$$(x^n - y^n) : (x - y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1};$$

$$(x^{2n+1} + y^{2n+1}) : (x + y) = x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \ldots - xy^{2n-1} + y^{2n}.$$

Если для F и f выбрать произвольныя суммы произведеній степеней, то примѣняя къ F и f нашъ способъ дѣленія, вообще говоря, мы не придемъ къ остатку 0, какъ бы далеко мы ни продолжали дѣленіе; въ этомъ случаѣ не существуетъ функціи такого же рода, чтобы $F = f \cdot g$. При этомъ указанный пріемъ можно закончить на любомъ членѣ частнаго, но необходимо указать соотвѣтствующій остатокъ. Если, напримѣръ,

$$F = x^2 + y^2,\ f = x + y,$$

то дѣленіе $F : f$ невыполнимо безъ остатка; если частное $x - y + \frac{2y^2}{x} - \frac{2y^3}{x^2} + \cdots$ вычислить до члена $(-1)^n \cdot \frac{2y^n}{x^{n-1}}$, то получится остатокъ $(-1)^{n+1} \cdot \frac{2y^{n+1}}{x^{n-1}}$; слѣдовательно, имѣетъ мѣсто равенство:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = x - y + \frac{2y^2}{x} - \frac{2y^3}{x^2} + \cdots + $$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{2y^n}{x^{n-1}} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2y^{n+1}}{x^{n-1}(x+y)}.$$

При $y = 1$ получимъ

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \cdots +$$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{2}{x^{n-1}} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{x^{n-1}(x+1)}.$$

Если $x > 1$ и δ означаетъ произвольно малое данное положительное число, то всегда можно найти такое положительное цѣлое число n, что $\frac{2}{x^{n-1}} < \delta$ (ср. стр. 219), а, слѣдовательно, и подавно $\frac{2}{x^{n-1}(x+1)} < \delta$. Тогда съ ошибкой, по абсолютной величинѣ не превышающей δ имѣемъ, что

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{2}{x^{n-1}}.$$

При $x = 1$ выше написанное равенство приметъ видъ:

$$\frac{1 + y^2}{1 + y} = 1 - y + 2y^2 - 2y^3 + \cdots + (-1)^n \cdot 2y^n + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2y^{n+1}}{1 + y}.$$

Если $0 < y < 1$, и δ есть произвольно малое положительное число, то можно всегда выбрать такое цѣлое положительное значеніе числа n, чтобы

$$2y^{n+1} < \delta$$

а, слѣдовательно, и подавно

$$\frac{2y^{n+1}}{1 + y} < \delta.$$

Итакъ, съ ошибкой меньшей δ будемъ имѣть

$$\frac{1 + y^2}{1 + y} = 1 - y + 2y^2 - 2y^3 + \cdots + (-1)^n \cdot 2y^n.$$

E. Извлеченіе корня.

Чтобы опредѣлить функцію f по данной функціи $F=f^2$, представимъ себѣ эти функціи расположенными по принципу, указанному въ D. Если A есть высшій членъ функціи f и

$$f=A+f_1,$$

то

$$F=f^2=A^2+2Af_1+f_1^2.$$

Такъ какъ A^2 есть высшій членъ функціи F, то высшій членъ функціи f находимъ, извлекая квадратный корень изъ перваго члена функціи F; затѣмъ находимъ разность:

$$F_1=F-A^2=2Af_1+f_1^2$$

и полагаемъ

$$f_1=B+f_2,$$

гдѣ B есть еще неизвѣстный намъ высшій членъ f_1. Тогда находимъ:

$$F_1=2AB+2Af_2+B^2+2Bf_2+f_2^2.$$

Легко видѣть, что $2AB$ представляютъ высшій членъ F_1; слѣдовательно, для вычисленія B слѣдуетъ первый членъ F_1 раздѣлить на $2A$, затѣмъ вычислить разность

$$F_2=F_1-(2AB+B^2)=2Af_2+2Bf_2+f_2^2$$

и положить

$$f_2=C+f_3,$$

гдѣ C означаетъ высшій членъ функціи f_2.

Тогда будемъ имѣть:

$$F_2=2AC+2Af_3+2BC+2Bf_3+C^2+2Cf_3+f_3^2.$$

C получимъ дѣленіемъ высшаго члена $2AC$ функціи F_2 на $2A$ и т. д. Продолжая вычисленіе подобнымъ же образомъ, найдемъ по порядку всѣ члены искомой функціи f, если только предположить заранѣе, что вообще существуетъ такая функція, квадратъ которой равенъ данной функціи F.

Пользуясь формулами для $(A+f_1)^3, \ldots (A+f_1)^n$ можно аналогичнымъ пріемомъ установить способъ извлеченія корня съ любымъ показателемъ.

§ 3. Ариѳметическіе ряды любого порядка.

Пусть a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, $a_5, \ldots$ представляютъ изъ себя произвольныя числа, взятыя въ опредѣленной послѣдовательности. Вычитая каждое число изъ послѣдующаго, получаемъ новыя числа:

$$d_0^{(1)} = a_1 - a_0;\quad d_1^{(1)} = a_2 - a_1,\quad d_2^{(1)} = a_3 - a_2,$$
$$d_3^{(1)} = a_4 - a_3,\quad d_4^{(1)} = a_5 - a_4 \ldots,$$

которыя назовемъ перымъ разностнымъ рядомъ данной послѣдовательности чиселъ. Разность двухъ слѣдующихъ другъ за другомъ членовъ этого ряда даетъ второй разностный рядъ:

$$d_0^{(2)} = a_2 - 2a_1 + a_0;\quad d_1^{(2)} = a_3 - 2a_2 + a_1;\quad d_2^{(2)} = a_4 - 2a_3 + a_2;$$
$$d_3^{(2)} = a_5 - 2a_4 + a_3; \ldots$$

Соотвѣтственнымъ образомъ составляемъ третій разностный рядъ:

$$d_0^{(3)} = a_3 - 3a_2 + 3a_1 - a_0;\quad d_1^{(3)} = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1;$$
$$d_2^{(3)} = a_5 - 3a_4 + 3a_3 - a_2 \ldots$$

ν-ый разностный рядъ будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\text{(I)}\qquad d_0^{(\nu)} = a_\nu - \binom{\nu}{1}a_{\nu-1} + \binom{\nu}{2}a_{\nu-2} - \binom{\nu}{3}a_{\nu-3} + \cdots + (-1)^\nu a_0;$$
$$d_1^{(\nu)} = a_{\nu+1} - \binom{\nu}{1}a_\nu + \binom{\nu}{2}a_{\nu-1} - \cdots + (-1)^\nu a_1, \ldots$$

Въ правильности выраженій для $d_0^{(\nu)}$, $d_1^{(\nu)} \ldots$ легко убѣдиться заключеніемъ отъ ν къ $\nu+1$, примѣняя формулы (§ 1 C, I *b*, стр. 208):

$$\binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1} = \binom{\nu+1}{k}.$$

Если члены одного изъ полученныхъ разностныхъ рядовъ, напримѣръ, p-го, имѣютъ всѣ одно и то же значеніе, то данную послѣдовательность чиселъ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, $a_5, \ldots$ называютъ **„ариѳметическимъ рядомъ p-го порядка“**. Послѣдовательность, названная коротко въ гл. I, § 5 E, добавленіе стр. 25 „ариѳметическимъ рядомъ“, оказывается, согласно только что установленному опредѣленію, ариѳметическимъ рядомъ перваго порядка. Первый разностный рядъ для ариѳметическаго ряда p-го порядка есть ариѳметическій рядъ $p-1$-го порядка, второй — есть ариөметическій рядъ $p-2$-го порядка и т. д. и, наконецъ, $(p-1)$-ый разностный рядъ, — ариөметическій рядъ перваго порядка.

Если произвольно заданы первые $p+1$ членъ: $a_0, a_1, a_2, \cdots a_p$, то соотвѣтствующимъ подборомъ членовъ $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots$ можнб достигнуть того, что всѣ они составятъ ариөметическій рядъ p-го порядка; этими именно членами $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$, и опредѣляется (по I) $d_0^{(p)}$; тогда достаточно a_{p+1} выбрать такъ, чтобы $d_1^{(p)}=d_0^{(p)}$; a_{p+2} такимъ образомъ, чтобы $d_2^{(p)}=d_0^{(p)}$ и т. д.

Ариөметическій рядъ p-го порядка характеризуется не только $(p+1)$ первыми членами, но и начальнымъ членомъ a_0 и начальными членами первыхъ p разностныхъ рядовъ, $d_0^{(1)}, d_0^{(2)}, \ldots d_0^{(p)}$. Чтобы показать, что этими числами каждый членъ ариөметическаго ряда p-го порядка вполнѣ опредѣленъ, прежде всего образуемъ изъ $d_0^{(p-1)}$ и $d_0^{(p)}$ разностный рядъ $(p-1)$-го порядка. Послѣдній имѣетъ видъ:

$$d_0^{(p-1)},\ d_1^{(p-1)}=d_0^{(p-1)}+d_0^{(p)},\ d_2^{(p-1)}=d_0^{(p-1)}+2d_0^{(p)}, \ldots,$$
$$d_{n-1}^{(p-1)}=d_0^{(p-1)}+(n-1)\cdot d_0^{(p)},$$

а сумма его первыхъ n членовъ:

$$s_n^{(p-1)}=nd_0^{(p-1)}+(1+2+3+\cdots+(n-1))d_0^{(p)}=$$
$$=nd_0^{(p-1)}+\binom{n}{2}d_0^{(p)}$$

(ср. гл. I § 5 E, добавл. стр. 25).

Далѣе, для n-го члена разностнаго ряда $(p-2)$ порядка имѣемъ выраженіе:

$$d_{n-1}^{(p-2)}=d_0^{(p-2)}+d_0^{(p-1)}+d_1^{(p-1)}+\cdots+d_{n-2}^{(p-1)}=$$
$$=d_0^{(p-2)}+s_{n-1}^{(p-1)}=$$
$$=d_0^{(p-2)}+(n-1)d_0^{(p-1)}+\binom{n-1}{2}d_0^{(p)}$$

и для суммы n первыхъ членовъ разностнаго ряда $(p-2)$-го порядка

$$s_n^{(p-2)}=nd_0^{(p-2)}+[1+2+\cdots+(n-1)]d_0^{(p-1)}+$$
$$+\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n-1}{2}\right]d_0^{(p)}=$$
$$=\binom{n}{1}d_0^{(p-2)}+\binom{n}{2}d_0^{(p-1)}+\binom{n}{3}d_0^{(p)}$$

(ср. § 1 C I, b) 3, стр. 209).

Выполненныя вычисленія даютъ возможность предполагать, что если $1 \leqq r \leqq p$, то

$$d_{n-1}^{(p-r)} = d_0^{(p-r)} + \binom{n-1}{1} d_0^{(p-r+1)} + \binom{n-1}{2} d_0^{(p-r+2)} + \cdots + \binom{n-1}{r} d_0^{(p)}.$$

Справедливость этого предположенія доказывается заключеніемъ отъ r къ $r+1$. Прежде всего составимъ сумму n первыхъ членовъ разностнаго ряда $(p-r)$-го порядка:

$$s_n^{(p-r)} = n d_0^{(p-r)} + d_0^{(p-r+1)} \sum_{\nu=2}^{\nu=n} \binom{\nu-1}{1} + d_0^{(p-r+2)} \sum_{\nu=3}^{\nu=n} \binom{\nu-1}{2} + \cdots$$
$$+ d_0^{(p)} \sum_{\nu=r+1}^{\nu=n} \binom{\nu-1}{r},$$

или, такъ какъ на основаніи § 1 C, I, стр. 209

$$\sum_{\nu=k+1}^{\nu=n} \binom{\nu-1}{k} = \binom{n}{k+1},$$

то

$$s_n^{(p-r)} = \binom{n}{1} d_0^{(p-r)} + \binom{n}{2} d_0^{(p-r+1)} + \binom{n}{3} d_0^{(p-r+2)} + \cdots + \binom{n}{r+1} d_0^{(p)}.$$

Поэтому n-ый членъ $(p-r-1)$-го разностнаго ряда будетъ:

$$d_{n-1}^{(p-r-1)} = d_0^{(p-r-1)} + d_0^{(p-r)} + d_1^{(p-r)} + \cdots + d_{n-2}^{(p-r)} =$$
$$= d_0^{(p-r-1)} + s_{n-1}^{(p-r)} =$$
$$= d_0^{(p-r-1)} + \binom{n-1}{1} d_0^{(p-r)} + \binom{n-1}{2} d_0^{(p-r+1)} +$$
$$+ \binom{n-1}{3} d_0^{(p-r+2)} + \cdots + \binom{n-1}{r+1} d_0^{(p)}.$$

Найденное для $d_{n-1}^{(p-r-1)}$ выраженіе имѣетъ совершенно ту же форму, какъ взятое для $d_{n-1}^{(p-r)}$, съ тою лишь разницей, что вездѣ вмѣсто r стоитъ $r+1$. Такъ какъ справедливость этой формулы доказана для $r=1$ и $r=2$, то, слѣдовательно, она справедлива и для большихъ цѣлыхъ значеній r; въ частности n-ый членъ первоначальнаго ряда имѣетъ видъ $(r=p)$:

$$\text{(II)}\quad a_{n-1}\ (= d_{n-1}^{(0)}) = a_0 + \binom{n-1}{1} d_0^{(1)} + \binom{n-1}{2} d_0^{(2)} + \cdots + \binom{n-1}{p} d_0^{(p)}$$

а сумма n первыхъ членовъ этого ряда:

$$(\text{III})\quad s_n = \binom{n}{1}a_0 + \binom{n}{2}d_0^{(1)} + \binom{n}{3}d_0^{(2)} + \cdots + \binom{n}{p+1}d_0^{(p)}.\text{ [1]}$$

Равенства (II) и (III) даютъ выраженія n-аго члена и суммы n первыхъ членовъ ариѳметическаго ряда p-го порядка черезъ ихъ первый членъ и первые члены ихъ p первыхъ разностныхъ рядовъ.

Примѣчаніе. Числа $s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots$ образуютъ ариѳметическій рядъ $(p+1)$-го порядка, такъ какъ разности $s_2 - s_1 = a_1$, $s_3 - s_2 = a_2$, $s_4 - s_3 = a_4, \cdots$ представляютъ ариѳметическій рядъ p-го порядка.

Теорема[2]. Если въ цѣлую раціональную функцію $p^{\text{ой}}$ степени относительно x

$$f(x) = c_0x^p + c_1x^{p-1} + c_2x^{p-2} + \cdots + c_{p-1}x + c_p$$

подставить вмѣсто x послѣдовательно члены ариѳметическаго ряда $1^{\text{го}}$ порядка a, $a+d$, $a+2d, \cdots$, то полученныя въ результатѣ значенія функціи

$$f(a),\ f(a+d),\ f(a+2d), \cdots$$

образуютъ ариѳметическій рядъ $p^{\text{го}}$ порядка.

Доказательство. Разности

$$f(a+d) - f(x) = g_1(x),\ f(x+2d) - f(x+d) = g_1(x+d),$$
$$f(x+3d) - f(x+2d) = g_1(x+2d), \cdots$$

суть функціи $(p-1)$-ой степени, получающіяся изъ $g_1(x)$ при послѣдовательной замѣнѣ x черезъ $x+d$, $x+2d, \cdots$ Разности же

$$g_1(x+d) - g_1(x) = g_2(x),\ g_1(x+2d) - g_1(x+d) = g_2(x+2d),$$
$$g_1(x+3d) - g_1(x+2d) = g_2(x+2d), \cdots,$$

суть функціи $(p-2)$-ой степени, такъ же получающіеся изъ первой, замѣной x черезъ $x+d$, $x+2d$, и т. д. Продолжая далѣе такимъ же образомъ, находимъ, что $(p-1)$-ый разностный рядъ

[1] Для ариѳметическаго ряда третьяго порядка $(p=3)$ Яковъ Бернулли въ Ars conjectandi (стр. 98 и 99) вывелъ эти формулы (II) и (III) изъ ранѣе полученныхъ суммъ фигурныхъ чиселъ.

[2] De Lagny, Histoire de l'Académie des Sciences, 1722, стр. 281—282. Ср. Cantor III, стр. 389.

для $f(x)$, $f(x+d)$, $f(x+2d)$ и т. д. состоитъ изъ функцій первой степени:

$$g_{p-1}(x),\ g_{p-1}(x+d),\ g_{p-1}(x+2d),\cdots.$$

Если теперь

$$g_{p-1}(x)=mx+n,$$

то при $x=a$, $(p-1)$-ый разностный рядъ имѣетъ видъ:

$$ma+n,\ ma+n+md,\ ma+n+2md,\cdots;$$

слѣдовательно, этотъ рядъ есть ариѳметическій рядъ перваго порядка, и тѣмъ самымъ предложенная теорема доказана.

Примѣненія:

1. Пусть

$$f(x)=\binom{x}{p}.$$

Давая x значенія p, $p+1$, $p+2$, $p+3,\cdots$, получаемъ рядъ значеній функціи

$$\binom{p}{p},\quad \binom{p+1}{p},\quad \binom{p+2}{p},\quad \binom{p+3}{p},\cdots,$$

которыя на основаніи § 1 C, I, b 3, стр. 209, являются фигурными числами p-го порядка и образуютъ ариѳметическій рядъ p-го порядка.

2. Для

$$f(x)=x^p \text{ и } a=1,\ d=1,$$

получаемъ ариѳметическій рядъ p-го порядка:

$$1^p,\quad 2^p,\quad 3^p,\cdots,\ n^p.$$

Чтобы найти сумму этихъ n чиселъ достаточно только въ равенствѣ (III) стр. 231 замѣнить $d_0^{(1)}$, $d_0^{(2)},\cdots,d_0^{(p)}$значеніями I (стр. 228); тогда получимъ:

$$\text{(IV)}\quad s_n^{(p)}=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p=$$
$$=\binom{n}{1}\cdot 1^p+\binom{n}{2}[2^p-1^p]+\binom{n}{3}\left[3^p-\binom{2}{1}2^p+1^p\right]+$$
$$+\cdots+\binom{n}{\nu}\left[\nu^p-\binom{\nu-1}{1}(\nu-1)^p+\binom{\nu-1}{2}(\nu-2)^p+\cdots+(-1)^{\nu-1}\cdot 1^p\right]+$$
$$+\cdots+\binom{n}{p+1}\left[(p+1)^p-\binom{p}{1}p^p+\binom{p}{2}(p-1)^p+\cdots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}2^p+(-1)^p\cdot 1^p\right].$$

Правая часть равенства есть цѣлая раціональная функція n, $(p+1)$-ой степени; члена, не содержащаго n, въ ней не встрѣчается.

При $p=2$ имѣемъ:

$$s_n^{(2)}=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdot 3+\binom{n}{3}\cdot 2=$$
$$=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

При $p=3$ получаемъ:

$$s_n^{(3)}=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=$$
$$=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdot 7+\binom{n}{3}\cdot 12+\binom{n}{4}\cdot 6=$$
$$=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}=$$
$$=\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2=(1+2+3+\cdots+n)^2.$$

Слѣдовательно, сумма третьихъ степеней натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n равна квадрату суммы этихъ чиселъ.

При $p=4$ получаемъ:

$$s_n^{(4)}=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=$$
$$=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdot 15+\binom{n}{3}\cdot 50+\binom{n}{4}\cdot 60+\binom{n}{5}\cdot 24=$$
$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30} \text{ и т. д.}$$

Сумму одинаковыхъ степеней натуральныхъ чиселъ можно найти, независимо отъ теоріи ариѳметическихъ рядовъ, слѣдующимъ образомъ: воспользуемся формулой бинома

$$(x+1)^{p+1}=x^{p+1}+\binom{p+1}{1}x^p+\binom{p+1}{2}x^{p-1}+\binom{p+1}{3}x^{p-2}+\cdots$$
$$+\binom{p+1}{2}x^2+\binom{p+1}{1}x+1,$$

подставимъ въ это равенство вмѣсто x послѣдовательно числа $1, 2, 3, \cdots, n$ и сложимъ полученныя такимъ образомъ равенства. Тогда будемъ имѣть:

$$\text{(V)}\quad (n+1)^{p+1}=1+\binom{p+1}{1}s_n^{(p)}+\binom{p+1}{2}s_n^{(p-1)}+\binom{p+1}{3}s_n^{(p-2)}+\cdots+$$
$$+\binom{p+1}{2}s_n^{(2)}+\binom{p+1}{1}s_n^{(1)}+n.$$

При помощи равенствъ, получающихся изъ (V) послѣдовательной замѣной p значеніями 2, 3, 4 и т. д. можно вычислить одну за другой суммы

$$s_n^{(2)},\ s_n^{(3)},\ s_n^{(4)},\cdots$$

пользуясь уже знакомымъ выраженіемъ

$$s_n^{(1)}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Можно составить еще болѣе удобныя рекурсіонныя формулы для суммъ степеней, если воспользоваться слѣдующимъ равенствомъ:

$$(x-1)^{p+1}=x^{p+1}-\binom{p+1}{1}x^p+\binom{p+1}{2}x^{p-1}-\binom{p+1}{3}x^{p-2}+\cdots+$$
$$+(-1)^{p-1}\cdot\binom{p+1}{2}x^2+(-1)^p\cdot\binom{p+1}{1}x+(-1)^{p+1},$$

замѣнивъ и въ немъ x числами $1, 2, 3,\cdots n$; складывая, наконецъ, полученныя такимъ образомъ равенства найдемъ:

$$\text{(VI)}\quad 0=n^{p+1}-\binom{p+1}{1}s_n^{(p)}+\binom{p+1}{2}s_n^{(p-1)}-\binom{p+1}{3}s_n^{(p-2)}+\cdots+$$
$$+(-1)^{p-1}\cdot\binom{p+1}{2}s_n^{(2)}+(-1)^p\cdot\binom{p+1}{1}s_n^{(1)}+(-1)^{p+1}\cdot n.$$

Сложеніемъ и вычитаніемъ (V) и (VI) получаемъ слѣдующія соотношенія:

$$\text{(VII)}\quad (n+1)^{p+1}=1+n^{p+1}+2\binom{p+1}{2}s_n^{(p-1)}+2\binom{p+1}{4}s_n^{(p-3)}+\cdots,$$

(въ случаѣ p четнаго послѣдніе члены будутъ:

$$2\binom{p+1}{3}s_n^{(3)}+2(p+1)s_n^{(1)};$$

въ случаѣ p нечетнаго послѣдніе члены будутъ:

$$2\binom{p+1}{2}s_n^{(2)}+2n)$$

$$\text{(VIII)}\quad (n+1)^{p+1}=1-n^{p+1}+2\binom{p+1}{1}s_n^{(p)}+2\binom{p+1}{3}s_n^{(p-2)}+\cdots,$$

(если p четное, то послѣдніе члены будутъ:

$$2\binom{p+1}{2}s_n^{(2}+2n;$$

если p нечетное, то послѣдніе члены будутъ:

$$2\binom{p+1}{3}s_n^{(3)}+2\binom{p+1}{1}s_n^{(1)}).$$

Равенства (VII) и (VIII) являются болѣе удобными для рекуррентныхъ вычисленій суммъ степеней, чѣмъ равенства (V) и (VI), такъ какъ они содержатъ менѣе членовъ.

Примѣчаніе.

Равенствами (VII) и (VIII) можно пользоваться и для непосредственнаго составленія выраженія $s_n^{(p)}$, какъ мы вкратцѣ это и покажемъ.

Разлагая лѣвую часть (VIII) по формулѣ бинома, получимъ:

$$\text{(IX)}\ 2_n^{p+1}+\binom{p+1}{1}n^p+\binom{p+1}{2}n^{p-1}+\binom{p+1}{3}n^{p-2}+\binom{p+1}{4}n^{p-3}+\cdots=$$
$$=2\binom{p+1}{1}s_n^{(p)}+2\binom{p+1}{3}s_n^{(p-2)}+2\binom{p+1}{5}s_n^{(p-4)}+\cdots.$$

Такъ какъ въ лѣвой части n не встрѣчается въ степени выше $(p+1)$-ой то $s_n^{(p)}$, какъ функція числа n, не можетъ быть выше $(p+1)$-ой степени (это, впрочемъ, слѣдуетъ изъ (IV), стр. 232).

Положимъ поэтому:

$$s_n^{(p)}=\varphi(p)\cdot n^{p+1}+\varphi_0(p)\cdot n^p+\varphi_1(p)\cdot n^{p-1}+\varphi_2(p)\cdot n^{p-2}+$$
$$+\varphi_3(p)\cdot n^{p-3}+\cdots,$$

гдѣ φ, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, ... означаютъ функціи, подлежащія опредѣленію.

Соотвѣтственно этому предположенію получимъ:

$$s_n^{(p-2)}=\varphi(p-2)\cdot n^{p-1}+\varphi_0(p-2)\cdot n^{p-2}+\varphi_1(p-2)\cdot n^{p-3}$$
$$+\varphi_2(p-2)\cdot n^{p-4}+\varphi_3(p-2)\cdot n^{p-5}+\cdots \text{ и т. д.}$$

Если эти выраженія $s_n^{(p)}$, $s_n^{(p-2)}$, ... подставить въ правую часть формулы (IX), то непосредственнымъ сравненіемъ коэффиціентовъ при однѣхъ и тѣхъ же степеняхъ n получимъ:

1. $\varphi(p)=\dfrac{1}{p+1}$, слѣдовательно, $\varphi(p-2)=\dfrac{1}{p-1}$ и т. д.,
2. $\varphi_0(p)=\dfrac{1}{2}$, т.-е. не зависитъ отъ p,
3. $\varphi_1(p)=\dfrac{p}{12}$, слѣдовательно, $\varphi_1(p-2)=\dfrac{p-2}{12}$ и т. д.,
4. $\varphi_2(p)=0$,
5. $\varphi_3(p)=\dfrac{1}{120}\cdot\binom{p}{3}$.

Примѣняя способъ полной индукціи, не трудно показать далѣе, что

a) всѣ функціи съ четными индексами $\varphi_4, \varphi_6, \varphi_8, \cdots$, имѣютъ значеніе 0;
b) если u означаетъ какое-либо нечетное число, то

$$\varphi_u(p) = \binom{p}{u} \cdot C,$$

гдѣ C есть число, не зависящее отъ p.

Если поэтому положить

$$\varphi_1(p) = \binom{p}{1} \cdot \left(\frac{B_1}{2}\right), \qquad \varphi_3(p) = \binom{p}{3} \cdot \frac{B_2}{4},$$

$$\varphi_5(p) = \binom{p}{5} \left(\frac{B_3}{6}\right), \cdots, \varphi_{2k-1}(p) = \binom{p}{2k-1} \cdot \frac{B_k}{2k},$$

гдѣ $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_k$ суть не зависящія отъ p числа, то получимъ:

$$\text{(X)} \qquad s_n^{(p)} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \binom{p}{1} \frac{B_1}{2} n^{p-1} + \binom{p}{3} \frac{B_2}{4} n^{p-3} + \cdots$$
$$+ \binom{p}{2k-1} \frac{B_k}{2k} n^{p-(2k-1)} + \cdots;$$

послѣдній членъ правой части, въ случаѣ p четнаго, равнаго $2l$, имѣетъ видъ:

$$\binom{2l}{2l-1} \frac{B_l}{2l} n,$$

а въ случаѣ нечетнаго p, равнаго $2l+1$,

$$\binom{2l+1}{2l-1} \frac{B_l}{2l} n^2.$$

Чтобы опредѣлить теперь числовыя значенія $B_1, B_2, \cdots, B_k \cdots$ положимъ p равнымъ четному числу $2l$; тогда (X) преобразуется въ

$$s_n^{(2l)} = \frac{n^{2l+1}}{2l+1} + \frac{n^{2l}}{2} + \binom{2l}{1} \frac{B_1}{2} n^{2l-1} + \binom{2l}{3} \frac{B_2}{4} n^{2l-3} + \cdots +$$
$$+ \binom{2l}{2k-1} \frac{B_k}{2k} n^{2(l-k)+1} + \cdots + \binom{2l}{2l-3} \frac{B_{l-1}}{2(l-1)} n^3 + \binom{2l}{2l-1} \frac{B_l}{2l} n.$$

Такъ какъ при $n = 1$ лѣвая часть имѣетъ значеніе 1, то будемъ имѣть далѣе:

$$\text{(XI)} \qquad 1 = \frac{1}{2l+1} + \binom{2l}{1} \frac{B_1}{2} + \binom{2l}{3} \frac{B_2}{4} + \cdots + \binom{2l}{2k-1} \frac{B_k}{2k} + \cdots +$$
$$+ \binom{2l}{3} \frac{B_{l-1}}{2(l-1)} + B_l.$$

Пользуясь формулой (XI) можно вычислить B_l, если намъ уже извѣстны значенія $B_1, B_2, \cdots, B_{l-1}$.

При $l = 1$ имѣемъ $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + B_1$, откуда $B_1 = \frac{1}{6}$;

» $l = 2$ » $1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2B_1 + B_2$, откуда $B_2 = -\frac{1}{30}$;

» $l = 3$ » $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 3B_1 + 5B_2 + B_3$, откуда $B_3 = \frac{1}{42}$ и т. д.

Историческое примѣчаніе.

Сумму квадратовъ натуральныхъ чиселъ уже вычислялъ Архимедъ въ своей книгѣ, посвященной спиралямъ (Cantor I, стр. 298); также хорошо была извѣстна въ древности и сумма кубовъ, а сумма четвертыхъ степеней впервые попадается въ арабской литературѣ XV столѣтія (Cantor I, 736). Между 1612 и 1619 годами Johann Faulhaber изъ Ульма далъ, хотя и безъ всякаго вывода формулы суммы степеней натуральныхъ чиселъ, включительно до 11-ой степени (вѣроятно, онъ пользовался рядами разностей). Лѣтъ двадцать спустя той же задачей занялся Ферматъ, не зная о результатахъ, полученныхъ Faulhaber'омъ. Яковъ Бернули въ его „Ars conjectandi“ (Базель, 1713, стр. 96—98) показалъ, какъ можно при помощи свойствъ фигурныхъ чиселъ вывести формулы суммъ степеней, и самъ выполнилъ вычисленіе для суммъ до 10-ой степени включительно. Безъ точнаго обоснованія онъ даетъ общую формулу (X). Встрѣчающіяся тамъ числа $B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots$ были названы позднѣе де-Муавромъ и Эйлеромъ числами [1]) Бернулли. (Ср. Эйлеръ, дифференціальное исчисленіе, часть II, § 122, гдѣ также даны значенія первыхъ 15 чиселъ Бернулли).

§ 4. Непрерывныя дроби.

A. Историческое вступленіе.

Первое примѣненіе непрерывныхъ дробей находится въ алгебрѣ Бомбелли (впервые напечатанной въ 1572 г.), гдѣ составитель представляетъ $\sqrt{13}$ въ видѣ непрерывной дроби (Cantor, ч. II, стр. 622). Нѣкоторый шагъ впередъ въ формальной разработкѣ непрерывныхъ дробей сдѣлалъ Cataldi (Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri, изд. 1613), который уже для непрерывной дроби

[1]) Болѣе подробно объ этихъ числахъ смотри у Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Berlin 1893; Haussner, Zur Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, Göttinger Nachrichten, 1893, Nr. 21 и Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften II A 3, Nr. 18, стр. 181.

$$4 \& \cfrac{2}{8 \& \cfrac{2}{8 \& \cfrac{2}{8},}}$$

ввелъ ради удобства печати такое сокращенное обозначеніе

$$4 \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8}$$

(Cantor, II, стр. 762—763). Вѣроятно, независимо отъ обоихъ итальянскихъ математиковъ, непрерывными дробями пользовался для приближенной замѣны отношеній большихъ чиселъ дробями съ меньшими числителями и знаменателями Daniel Schwenter изъ Нюренберга въ своей Geometria practica (1618) (Cantor, II, стр. 763—765). Возможно, что также самостоятельно пришелъ къ этому положенію и Lord Brouncker, первый президентъ королевскаго общества (1620—1684) (Cantor, II, стр. 765). Дальнѣйшее развитіе ученія о непрерывныхъ дробяхъ получило у Гюйгенса, который пользовался ими для тѣхъ же цѣлей, какъ Schwenter [1]), въ своемъ, впервые изданномъ послѣ его смерти (1698) „Descriptio automati planetarii“ (Cantor, III, стр. 97). Полную теорію непрерывныхъ дробей далъ Леонардъ Эйлеръ въ двухъ работахъ, помѣщенныхъ въ IX и XI томахъ Commentarii Academiae Petropolitanae (ad annum 1737 и ad annum 1739), гдѣ впервые онъ предложилъ для нихъ особое названіе „непрерывная дробь“ (fractio continua); элементарные отдѣлы этихъ статей воспроизведены также въ главѣ 18 перваго тома „Introductio in analysin infinitorum“ Эйлера (1748). Сравнительно старая литература о непрерывныхъ дробяхъ приведена у S. Günther'a въ его „Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche“, — программѣ гимназіи въ Вейсенбургѣ 1872, новѣйшія же работы — въ энциклопедіи математики томъ I, стр. 119.

B. Обыкновенныя или правильныя непрерывныя дроби.

Опредѣленіе. *Примѣняя къ какимъ-либо двумъ цѣлымъ положительнымъ числамъ a и c пріемъ, указанный для нахожденія*

1) Ср. примѣчаніе стр. 250.

общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ (гл. I, § 11 A, стр. 59 и 60), получаемъ цѣпь слѣдующихъ равенствъ:

$$
\begin{array}{llll}
a = k_0 e + e_1, & \text{гдѣ} & k_0 \geqq 0, & e_1 < e, \\
e = k_1 e_1 + e_2, & „ & k_1 \geqq 1, & e_2 < e_1, \\
e_1 = k_2 e_2 + e_3, & „ & k_2 \geqq 1, & e_3 < e_2, \\
\dots\dots\dots & & & \\
e_{m-2} = k_{m-1} e_{m-1} + e_m, & \text{гдѣ} & k_{m-1} \geqq 1, & e_m < e_{m-1}, \\
e_{m-1} = k_m e_m, & „ & k_m > 1. &
\end{array}
$$

Дѣлитель e_m, дѣленіе на который выполняется безъ остатка, и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ a и e; если же эти оба числа оказываются взаимнопростыми, то $e_m = 1$. Изъ перваго равенства написанной цѣпи, получаемъ:

$$\frac{a}{e} = k_0 + \frac{e_1}{e} = k_0 + \frac{1}{\frac{e}{e_1}},$$

изъ второго:

$$\frac{e}{e_1} = k_1 + \frac{e_2}{e_1} = k_1 + \frac{1}{\frac{e_1}{e_2}},$$

изъ третьяго:

$$\frac{e_1}{e_2} = k_2 + \frac{e_3}{e_2} = k_2 + \frac{1}{\frac{e_2}{e_3}},$$

. . . .

изъ предпослѣдняго:

$$\frac{e_{m-2}}{e_{m-1}} = k_{m-1} + \frac{e_m}{e_{m-1}} = k_{m-1} + \frac{1}{\frac{e_{m-1}}{e_m}}$$

и, наконецъ, изъ послѣдняго:

$$\frac{e_{m-1}}{e_m} = k_m.$$

При помощи послѣдовательныхъ подстановокъ находимъ:

$$\frac{a}{e} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \dots\dots\dots + \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{k_m}}}}.$$

Выраженіе, стоящее въ правой части равенства называется непрерывной дробью, и въ противоположность дробямъ болѣе общаго вида, которыя будутъ разсмотрѣны въ отдѣлѣ С, обыкновенной или правильной непрерывной дробью. Числа $k_0, k_1, \cdots, k_m$ называются частными знаменателями, или просто частными, а всѣ „частные" числители здѣсь равны 1; дроби $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \cdots, \frac{1}{k_m}$ называются звеньями данной непрерывной дроби. Короче непрерывную дробь пишутъ въ видѣ:

$$k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots + \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{k_m}}}}.$$

или еще короче:

$$k_0 \dot{+} \frac{1}{k_1} \dot{+} \frac{1}{k_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{k_{m-1}} \dot{+} \frac{1}{k_m}$$ [1]),

или такъ же:

$$k_0 + \frac{1|}{|k_1} + \frac{1|}{|k_2} + \cdots + \frac{1|}{|k_{m-1}} + \frac{1|}{|k_m}$$ [2]),

или еще проще [3])

$$(k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}, k_m).$$

Примѣръ. Чтобы десятичное число 3,14159265 обратить въ непрерывную дробь, примѣнимъ Евклидовъ алгориѳмъ для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ:

314 159 265 и 100 000 000:

$$\begin{aligned}
314\,159\,265 &= 3 \cdot 100\,000\,000 + 14\,159\,265,\\
100\,000\,000 &= 7 \cdot 14\,159\,265 + 885\,145,\\
14\,159\,265 &= 15 \cdot 885\,145 + 882\,090,\\
885\,145 &= 1 \cdot 882\,090 + 3\,055,\\
882\,090 &= 288 \cdot 3\,055 + 2\,250,\\
3\,055 &= 1 \cdot 2\,250 + 805,\\
2\,250 &= 2 \cdot 805 + 640,
\end{aligned}$$

[1]) По Baltzer'y, Elemente, I Bd. § 30, стр. 172 этотъ значительно распространенный способъ письма введенъ J. H. F. Müller'омъ (Allgemeine Arithmetik, 1838). Какъ упомянуто въ А, уже Cataldi примѣнялъ совершенно аналогичное обозначеніе.

[2]) Предложеніе Pringsheim'a въ Encyklop. der. Math. Wissenschaften томъ I, стр. 119; тамъ же приведены и сокращенія, примѣнявшіяся другими авторами.

[3]) По Dirichlet, Werke II, стр. 141.

$$\begin{aligned}805 &= 1\cdot 640 + 165,\\ 640 &= 3\cdot 165 + 145,\\ 145 &= 7\cdot 20 + 5,\\ 20 &= 4\cdot 5;\end{aligned}$$

слѣдовательно

$$3{,}14159265 = (3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 288,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 7,\ 4)\,[1].$$

Пріемы вычисленія непрерывной дроби.

Ближайшая идея вычисленія, т.-е. изображенія въ видѣ обыкновенной дроби непрерывной дроби

$$K = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cdots + \cfrac{1}{k_{m-2} + \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{k_m}}}},$$

гдѣ $k_0, k_1, \ldots, k_{m-1}$ означаютъ любыя цѣлыя положительныя числа, при чемъ нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть и нулями, но k_m должно быть цѣлымъ положительнымъ числомъ, отличнымъ отъ нуля, состоитъ въ томъ, чтобы смѣшанное число $k_{m-1} + \frac{1}{k_m}$ прежде всего обратить въ неправильную дробь и обратное значеніе этой дроби прибавить къ k_{m-2}. Полагаемъ для сокращенія

$$V_\mu = k_\mu + \cfrac{1}{k_{\mu+1} + \cdots + \cfrac{1}{k_{m-2} + \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{k_m}}}}$$

и обозначаемъ черезъ P_μ и Q_μ соотвѣтственно числитель и знаменатель той дроби, въ которую обращается эта непрерывная примѣненіемъ только что описаннаго пріема, при чемъ предполагается, что надъ встрѣчающимися дробями не выполняется иныхъ, кромѣ указанныхъ выше операцій (преобразованіе въ неправильную дробь и обращеніе дроби); такимъ образомъ,

$$V_m = \frac{P_m}{Q_m} = \frac{k_m}{1};\ P_m = k_m,\ Q_m = 1;$$

[1]) Четыре первыхъ знаменателя совпадаютъ со знаменателями непрерывной дроби, въ которую можно разложить трансцендентное число π. Пятый знаменатель въ разложеніи числа π равенъ не 288, а 292.

$$V_{m-1}=\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}=\frac{k_{m-1}k_m+1}{k_m};\quad P_{m-1}=k_{m-1}k_m+1=k_{m-1}P_m+Q_m,$$
$$Q_{m-1}=k_m=P_m;$$
$$V_{m-2}=k_{m-2}+\frac{1}{V_{m-1}}=k_{m-2}+\frac{Q_{m-1}}{P_{m-1}}=\frac{k_{m-2}\cdot P_{m-1}+Q_{m-1}}{P_{m-1}}$$

такъ что

$$P_{m-2}=k_{m-2}\cdot P_{m-1}=Q_{m-1}$$

и

$$Q_{m-2}=P_{m-1};$$

и вообще,

$$V_\mu=k_\mu+\frac{Q_{\mu+1}}{P_{\mu+1}}=\frac{k_\mu\cdot P_{\mu+1}+Q_{\mu+1}}{P_{\mu+1}},$$

слѣдовательно,

$$\begin{cases} P_\mu=k_\mu\cdot P_{\mu+1}+Q_{\mu+1}, \\ Q_\mu=P_{\mu+1} \end{cases}$$

или

(I)
$$\begin{cases} P_\mu=k_\mu\cdot P_{\mu+1}+P_{\mu+2}, \\ Q_\mu=P_{\mu+1}. \end{cases}$$

При помощи формулъ (I) вычисляютъ послѣдовательно, по найденнымъ уже значеніямъ P_m и P_{m-1}, значенія P_{m-2}, $P_{m-3}, \ldots$, P_1, P_0 и затѣмъ находятъ.

$$K=V_0=\frac{P_0}{Q_0}=\frac{P_0}{P_1}.$$

Въ силу предположенія, сдѣланнаго относительно частныхъ, P_m и P_{m-1} суть отличныя отъ нуля цѣлыя положительныя числа. Изъ рекурсіонныхъ формулъ (I) слѣдуетъ, что тогда и всѣ P съ меньшими индексами должны быть отличными отъ нуля положительными цѣлыми числами; слѣдовательно, всѣ дроби V_m, $V_{m-1}, \ldots$, V_1, V_0 имѣютъ опредѣленныя конечныя значенія.

Доказавъ это, мы можемъ вычислить непрерывную дробь и другимъ пріемомъ, который окажется еще болѣе цѣлесообразнымъ. Положимъ

$$U_\mu=k_0\dot{+}\frac{1}{k_1}\dot{+}\frac{1}{k_2}\dot{+}\cdots\dot{+}\frac{1}{k_{\mu-1}}\dot{+}\frac{1}{k_\mu}$$
$$(\mu=0,\ 1,\ 2,\ldots\ m)$$

и постараемся U_μ обратить въ обыкновенную дробь $\frac{Z_\mu}{N_\mu}$. При этомъ Z_μ и N_μ представляютъ значенія числителя и знаменателя, которыя мы получимъ, приводя чисто формально къ простѣйшему виду встрѣчающіяся дроби уничтоженіемъ двойныхъ дробей, но не выполняя, ни сокращеній, ни умноженій числителя и знаменателя на одно и то же число. Получающіяся при этомъ дроби

$$\frac{Z_0}{N_0}, \frac{Z_1}{N_1}, \ldots, \frac{Z_{m-1}}{N_{m-1}}, \frac{Z_m}{N_m} = K,$$

которыя, какъ мы это сейчасъ увидимъ, находятся въ тѣсной связи съ значеніемъ K самой непрерывной дроби, называются „подходящими“ дробями (приближеніями) данной непрерывной дроби. Чтобы не только K, но и всѣ эти подходящія дроби имѣли опредѣленное конечное значеніе, мы должны предположить теперь, что всѣ отдѣльныя частныя отличны отъ нуля вплоть до k_0, которое можетъ быть и нулемъ.

Такъ какъ

$$U_0 = \frac{Z_0}{N_0} = \frac{k_0}{1}, \text{ то } Z_0 = k_0, \ N_0 = 1;$$

$$U_1 = \frac{Z_1}{N_1} = \frac{k_0 k_1 + 1}{k_1}, \text{ то } Z_1 = k_0 k_1 + 1, \ N_1 = k_1.$$

U_2 получается изъ U_1, если вмѣсто k_1 подставить $k_1 + \frac{1}{k_2}$; поэтому

$$U_2 = \frac{Z_2}{N_2} = \frac{k_0\left(k_1 + \frac{1}{k_2}\right) + 1}{k_1 + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_2(k_0 \cdot k_1 + 1) + k_0}{k_2 k_1 + 1},$$

слѣдовательно:

$$Z_2 = k_2 Z_1 + Z_0, \quad N_2 = k_2 N_1 + N_0.$$

Чтобы доказать, что вообще

$$\text{(II)} \qquad \boldsymbol{Z_\mu = k_\mu Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}, \quad N_\mu = k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2}},$$

воспользуемся пріемомъ полной индукціи.

$U_{\mu+1} = \frac{Z_{\mu+1}}{N_{\mu+1}}$ получается изъ U_μ, если замѣнить въ немъ k_μ черезъ $k_\mu + \frac{1}{k_{\mu+1}}$. Такъ какъ элементъ k_μ не входитъ въ $Z_{\mu-1}$, $Z_{\mu-2}$, $N_{\mu-1}$, $N_{\mu-2}$, то будемъ имѣть:

$$\frac{Z_{\mu+1}}{N_{\mu+1}} = \frac{\left(k_\mu + \frac{1}{k_{\mu+1}}\right) Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}}{\left(k_\mu + \frac{1}{k_{\mu+1}}\right) N_{\mu-1} + N_{\mu-2}} = \frac{k_{\mu+1}(k_\mu Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}) + Z_{\mu-1}}{k_{\mu+1}(k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2}) + N_{\mu-1}},$$

слѣдовательно:

$$Z_{\mu+1}=k_{\mu+1}\cdot Z_{\mu}+Z_{\mu-1},\quad N_{\mu+1}=k_{\mu+1}N_{\mu}+N_{\mu-1}.$$

Поэтому, если формулы (II) справедливы для индекса μ, то онѣ справедливы и для индекса $\mu+1$: такъ какъ справедливость этихъ формулъ имѣетъ мѣсто для индекса 2, то вмѣстѣ съ тѣмъ доказана ихъ справедливость и для всѣхъ значеній $\mu=2, 3, \ldots m$.

При помощи этихъ формулъ (II) мы можемъ послѣдовательно [1]) болѣе простымъ пріемомъ вычислить всѣ подходящія дроби

$$U_0,\ U_1,\ U_2, \ldots,\ U_{m-1},\ U_m=K.$$

Изъ предыдущихъ формулъ вытекаетъ, что Z_{μ} и N_{μ} (для $\mu=2, 3, \ldots m$) оказываются цѣлыми положительными числами, и что всегда имѣютъ мѣсто неравенства:

$$Z_{\mu}>Z_{\mu-1} \text{ и } N_{\mu}>N_{\mu-1}.$$

Для непрерывной дроби:

$$(3,\ 7,\ 15,\ 288,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 7,\ 4),$$

разсмотрѣнной выше въ видѣ примѣра, получаемъ слѣдующія приближенія

$$U_0=\frac{3}{1},$$

$$U_1=\frac{3\cdot 7+1}{7}=\frac{22}{7},$$

$$U_2=\frac{15\cdot 22+3}{15\cdot 7+1}=\frac{333}{106},$$

$$U_3=\frac{1\cdot 333+22}{1\cdot 106+7}=\frac{355}{113},$$

$$U_4=\frac{288\cdot 355+333}{288\cdot 113+106}=\frac{102\,573}{32\,650} \text{ и т. д. } [2]).$$

Исключимъ изъ равенствъ (II) k_{μ}, вычитая изъ перваго равенства, умноженнаго почленно на $N_{\mu-1}$, второе равенство, умноженное на $Z_{\mu-1}$; тогда получимъ:

$$Z_{\mu}\cdot N_{\mu-1}-N_{\mu}\cdot Z_{\mu-1}=-Z_{\mu-1}\cdot N_{\mu-2}+N_{\mu-1}Z_{\mu-2}.$$

---

[1]) О непосредственномъ вычисленіи числителя и знаменателя какой-либо подходящей дроби смотри S. Günther, Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form. Habilitationschrift, Erlangen 1872.

[2]) U_0, U_1, U_2, U_3 являются въ то же время приближенными значеніями трансцендентнаго числа π; U_4 уже не принадлежитъ къ приближеніямъ π.

Это равенство указываетъ, что если въ разности

$$Z_\mu N_{\mu-1} - N_\mu Z_{\mu-1}$$

индексъ μ замѣнить посредствомъ $\mu - 1$, то она мѣняетъ знакъ на обратный, сохраняя то же самое абсолютное значеніе. Имѣемъ теперь

$$Z_1 N_0 - N_1 Z_0 = k_0 k_1 + 1 - k_0 k_1 = 1,$$

слѣдовательно,

$$Z_2 N_1 - N_2 Z_1 = -1$$

$$Z_3 N_2 - N_3 Z_2 = 1$$

и вообще

$$\text{(III)} \qquad \boldsymbol{Z_\mu \cdot N_{\mu-1} - N_\mu \cdot Z_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1}}.$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что Z_μ и N_μ числа взаимно простыя, такъ какъ общій дѣлитель чиселъ Z_μ и N_μ, отличный отъ единицы, долженъ былъ бы также дѣлить и всю лѣвую часть, а, слѣдовательно, быть дѣлителемъ и $(-1)^{\mu-1}$, — что невозможно. Дѣлимъ всѣ члены равенства (III) на произведеніе $N_{\mu-1} N_\mu$ и получаемъ:

$$\text{(IV)} \qquad \boldsymbol{\frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{N_\mu N_{\mu-1}}}.$$

Разность между двумя послѣдовательными подходящими дробями является, такимъ образомъ, наименьшей, какую, вообще говоря, только и могутъ имѣть двѣ дроби съ такими же знаменателями.

На основаніи равенства (IV) получаемъ далѣе

$$\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_0}{N_0} = \frac{1}{N_1 N_0},$$

$$\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_1}{N_1} = -\frac{1}{N_2 N_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} - \frac{Z_{\mu-2}}{N_{\mu-2}} = \frac{(-1)^{\mu-2}}{N_{\mu-1} N_{\mu-2}},$$

$$\frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{N_\mu \cdot N_{\mu-1}}.$$

Складывая эти μ равенствъ получаемъ:

$$\text{(V)} \qquad \boldsymbol{\frac{Z_\mu}{N_\mu} - k_0 = \frac{1}{N_1 N_0} - \frac{1}{N_2 N_1} + \cdots + \frac{(-1)^{\mu-2}}{N_{\mu-1} N_{\mu-2}} + \frac{(-1)^{\mu-1}}{N_\mu N_{\mu-1}}}.$$

Равенство (V) представляетъ подходящую дробь $\frac{Z_\mu}{N_\mu}$ въ видѣ алгебраической суммы, члены которой имѣютъ по очереди знаки $+$ и $-$ и уменьшаются[1]). Если перейти отъ данной подходящей дроби къ другой съ бо̀льшимъ индексомъ, то ранѣе полученные члены суммы не измѣняются, но къ нимъ присоединяются еще новые.

Сравненіе непрерывной дроби съ ея приближеніями.

Мы можемъ положить

$$K=(k_0,\ k_1,\ k_2,\ldots,\ k_{\mu-1},\ x),$$

гдѣ

$$x=(k_\mu,\ k_{\mu+1},\ldots,k_m).$$

Слѣдовательно, K получается изъ U_μ замѣной въ немъ k_μ черезъ x. Но мы имѣли

$$U_\mu=\frac{k_\mu Z_{\mu-1}+Z_{\mu-2}}{k_\mu N_{\mu-1}+N_{\mu-2}},$$

слѣдовательно,

$$K=\frac{x\cdot Z_{\mu-1}+Z_{\mu-2}}{x\cdot N_{\mu-1}+N_{\mu-2}},$$

такъ какъ $Z_{\mu-1}$, $Z_{\mu-2}$, $N_{\mu-1}$, $N_{\mu-2}$ не зависятъ отъ k_μ.

Теперь находимъ

$$K-U_\mu=\frac{(x-k_\mu)\cdot(Z_{\mu-1}N_{\mu-2}-Z_{\mu-2}N_{\mu-1})}{(x\cdot N_{\mu-1}+N_{\mu-2})\cdot(k_\mu\cdot N_{\mu-1}+N_{\mu-2})},$$

или на основаніи (III)

$$\text{(VI)}\qquad K-U_\mu=\frac{(-1)^\mu(x-k_\mu)}{(x\cdot N_{\mu-1}+N_{\mu-2})(k_\mu\cdot N_{\mu-1}+N_{\mu-2})}.$$

Такъ какъ знаменатель правой части положителенъ, а $x>k_\mu$, то $K-U_\mu$ имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и $(-1)^\mu$, т.-е. всѣ подходящія дроби съ четными индексами меньше, а съ нечетными индексами всѣ больше K. Слѣдовательно, значеніе K заключено между какими-либо двумя под-

1) Это примѣчаніе важно прежде всего для того случая, на которомъ мы сейчасъ останавливаться не станемъ, а именно, когда непрерывная дробь разлагается въ безконечную.

ходящими дробями съ четнымъ и нечетнымъ индексами, напр. между U_μ и $U_{\mu-1}$. Поэтому должно быть

$$|K - U_{\mu-1}| < |U_\mu - U_{\mu-1}|$$

а, слѣдовательно, на основанiи равенства (IV):

$$|K - U_{\mu-1}| < \frac{1}{N_{\mu-1} N_\mu},$$

или, такъ какъ $N_\mu > N_{\mu-1}$, то и подавно

$$|K - U_{\mu-1}| < \frac{1}{N^2_{\mu-1}}.$$

Слѣдовательно, замѣняя значенiе непрерывной дроби какой-либо подходящей дробью $U_{\mu-1}$, мы дѣлаемъ погрѣшность, меньшую дроби, числитель которой равенъ 1, а знаменатель произведенiю знаменателей этой подходящей дроби и слѣдующей за ней, или подавно меньшую дроби, числитель которой $=1$, а знаменатель квадрату знаменателя этой подходящей дроби.

Чтобы сравнить абсолютныя значенiя разностей $K - U_\mu$ и $K - U_{\mu-1}$ образуемъ еще:

$$K - U_{\mu-1} = \frac{x \cdot Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}}{x \cdot N_{\mu-1} + N_{\mu-2}} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} =$$

$$= \frac{-(Z_{\mu-1}N_{\mu-2} - N_{\mu-1}Z_{\mu-2})}{(x \cdot N_{\mu-1} + N_{\mu-2}) \cdot N_{\mu-1}} =$$

$$\text{(VII)} \qquad = \frac{(-1)^{\mu-1}}{(x \cdot N_{\mu-1} + N_{\mu-2}) \cdot N_{\mu-1}}.$$

Такъ какъ

$$x - k_\mu < 1 \text{ и } k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2} > N_{\mu-1},$$

то изъ сравненiя правыхъ частей равенствъ (VI) и (VII) слѣдуетъ, что

$$\text{(VIII)} \qquad |K - U_\mu| < |K - U_{\mu-1}|.$$

Каждая слѣдующая подходящая дробь ближе къ значенiю непрерывной дроби, чѣмъ предшествующая ей.

Изъ этого предложенiя и слѣдствiя, выведеннаго изъ (VI), получаемъ, что

$$\text{(IX)} \qquad U_0 < U_2 < U_4 < \cdots \leqq K \leqq \cdots < U_5 < U_3 < U_1.$$

Такимъ образомъ подходящія дроби четнаго порядка образуютъ возрастающій рядъ, а дроби нечетнаго порядка — убывающій; оба приближаются къ значенію K непрерывной дроби, которое равно или послѣднему члену перваго ряда или первому члену второго ряда, смотря потому, принадлежитъ ли m къ четнымъ или нечетнымъ числамъ.

Не трудно также опредѣлить разность между двумя послѣдовательными членами одного изъ двухъ этихъ рядовъ:

$$
\begin{aligned}
U_\mu - U_{\mu-2} &= \frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{Z_{\mu-2}}{N_{\mu-2}} = \\
&= \frac{k_\mu Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}}{k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2}} - \frac{Z_{\mu-2}}{N_{\mu-2}} = \\
&= \frac{k_\mu (Z_{\mu-1} N_{\mu-2} - N_{\mu-1} Z_{\mu-2})}{N_\mu \cdot N_{\mu-2}} = \\
&= \frac{(-1)^\mu k_\mu}{N_\mu \cdot N_{\mu-2}}.
\end{aligned}
$$

Для абсолютнаго значенія разности между K и какой-либо подходящей дробью $U_{\mu-1}$ мы уже дали верхнюю границу $\frac{1}{N_\mu \cdot N_{\mu-1}}$. Изъ равенства (VII) мы можемъ также установить и нижнюю границу для $|K - U_{\mu-1}|$. Такъ какъ $x < k_\mu + 1$, то

$$|K - U_{\mu-1}| > \frac{1}{(k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2} + N_{\mu-1}) \cdot N_{\mu-1}},$$

или

$$|K - U_{\mu-1}| > \frac{1}{(N_\mu + N_{\mu-1}) N_{\mu-1}}$$

и тѣмъ болѣе

$$|K - U_{\mu-1}| > \frac{1}{2N_\mu N_{\mu-1}},$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{2N_\mu N_{\mu-1}} < |K - U_{\mu-1}| < \frac{1}{N_\mu \cdot N_{\mu-1}}.$$

Чтобы показать, что подходящія дроби даютъ наиболѣе совершенное приближеніе къ значенію непрерывной дроби, докажемъ слѣдующее **предложеніе:**

Если дробь $\frac{a}{b}$ отличается отъ значенія K непрерывной дроби $(k_0, k_1, k_2, \ldots k_m)$ меньше, чѣмъ подходящая дробь $U_\mu = \frac{Z_\mu}{N_\mu}$, то $a > Z_\mu$ и $b > N_\mu$.

Доказательство: На основаніи сдѣланнаго предположенія и слѣдствія, выведеннаго изъ формулы (VI), получаемъ, что $\frac{a}{b}$ должно быть заключено между U_μ и $U_{\mu-1}$, а именно,

$$\text{если } \mu \text{ четное, то } U_\mu < \frac{a}{b} < U_{\mu-1},$$

$$\text{если } \mu \text{ нечетное, то } U_\mu > \frac{a}{b} > U_{\mu-1}.$$

Согласно этому $U_\mu - \frac{a}{b}$, такъ же, какъ и $\frac{a}{b} - U_{\mu-1}$, всегда имѣютъ тотъ же самый знакъ, что и $(-1)^{\mu-1}$. Теперь

$$U_\mu - \frac{a}{b} = \frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{a}{b} = \frac{bZ_\mu - aN_\mu}{N_\mu b}$$

и

$$\frac{a}{b} - U_{\mu-1} = \frac{a}{b} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} = \frac{aN_{\mu-1} - bZ_{\mu-1}}{bN_{\mu-1}}.$$

Положимъ теперь

$$bZ_\mu - aN_\mu = (-1)^{\mu-1}\alpha$$

и

$$aN_{\mu-1} - bZ_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1}\beta;$$

въ такомъ случаѣ α и β представляютъ отличныя отъ нуля положительныя цѣлыя числа. Умноживъ первое изъ двухъ послѣднихъ равенствъ на $Z_{\mu-1}$, а второе на Z_μ и складывая ихъ, получаемъ:

$$a(Z_\mu \cdot N_{\mu-1} - Z_{\mu-1} N_\mu) = (-1)^{\mu-1}(\alpha Z_{\mu-1} + \beta Z_\mu)$$

или, вслѣдствіе (III) стр. 245

$$a = \alpha Z_{\mu-1} + \beta Z_\mu;$$

слѣдовательно,

$$a > Z_\mu.$$

Умножая первое изъ равенствъ на $N_{\mu-1}$ и второе на N_μ и складывая ихъ, получаемъ:

$$b(Z_\mu N_{\mu-1} - Z_{\mu-1} N_\mu) = (-1)^{\mu-1}(\alpha N_{\mu-1} + \beta N_\mu), \text{ или}$$
$$b = \alpha N_{\mu-1} + \beta N_\mu;$$

итакъ

$$b > N_\mu.$$

Слѣдовательно, если данную дробь, числитель и знаменатель которой являются большими числами, разложить въ непрерывную, то каждое приближенное значеніе послѣдней представляетъ лучшее приближеніе къ данной дроби въ томъ смыслѣ, что не существуетъ другой дроби, которая ближе подходила бы къ данной и членами которой были бы меньшія числа [1]).

Чтобы было удобнѣе судить о степени приближенія ранѣе вычисленныхъ подходящихъ дробей U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 непрерывной дроби (3, 7, 15, 1, 288, 1, 2, 1, 3, 1, 7, 4) къ значенію $K = 3{,}14\ 159\ 265$, выразимъ подходящія дроби въ десятичныхъ дробяхъ:

$$U_0 = \frac{3}{1} = 3,$$

$$U_1 = \frac{22}{7} = 3{,}142\ 857\ldots,$$

$$U_2 = \frac{333}{106} = 3{,}141\ 509\ 4\ldots,$$

$$U_3 = \frac{355}{113} = 3{,}141\ 592\ 92\ldots,$$

$$U_4 = \frac{102\ 573}{32\ 650} = 3{,}141\ 592\ 649\ 3\ldots$$

U_4 отличается отъ K только на 7 единицъ десятаго десятичнаго знака, а числовыя значенія въ этомъ примѣрѣ подтверждаютъ, что

$$U_0 < U_2 < U_4 < K < U_3 < U_1.$$

[1]) Именно это свойство подходящихъ дробей и побудило Daniel'я Schwenter'а и Христіана Гюйгенса ввести непрерывныя дроби (ср. § 4. A, стр. 214). Гюйгенсъ хотѣлъ построить планетарій, который приводился бы въ движеніе при помощи зубчатыхъ колесъ. Число зубцовъ различныхъ колесъ должно было соотвѣтствовать временамъ обращенія планетъ, при чемъ отношенія этихъ временъ точно могли быть выражены лишь большими числами. Но такъ какъ изготовленіе колесъ болѣе чѣмъ съ милліономъ равныхъ зубцовъ практически было невыполнимо, то передъ Гюйгенсомъ встала задача замѣнить приближенно отношенія, выраженныя большими числами, при помощи дробей съ меньшими членами.

С. Непрерывныя дроби общаго вида [1]).

Изъ цѣпи равенствъ

$$K = k_0 + \frac{h_1}{V_1},$$

$$V_1 = k_1 + \frac{h_2}{V_2},$$

$$V_2 = k_2 + \frac{h_3}{V_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_{m-2} = k_{m-2} + \frac{h_{m-1}}{V_{m-1}},$$

$$V_{m-1} = k_{m-1} + \frac{h_m}{k_m},$$

гдѣ $k_0, k_1, \ldots k_m, h_1, h_2, \ldots, h_m$ означаютъ любыя числа, на которыя впослѣдствіи намъ придется, конечно, наложить опредѣленныя ограниченія, получаемъ при помощи послѣдовательныхъ подстановокъ:

$$K = k_0 + \cfrac{h_1}{k_1 + \cfrac{h_2}{k_2 + \cdots \, k_{m-2} + \cfrac{h_{m-1}}{k_{m-1} + \cfrac{h_m}{k_m}}}}.$$

Выраженіе, стоящее въ правой части равенства называется непрерывной дробью общаго вида (общая непрерывная дробь) $h_1, h_2, \ldots h_m$ ея частными числителями, $k_0, k_1, k_2, \ldots k_m$ частными знаменателями и $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}, \ldots \frac{h_m}{k_m}$ — отдѣльными членами. Обычно пишутъ непрерывную дробь въ болѣе короткой формѣ

$$K = k_0 \dot{+} \frac{h_1}{k_1} \dot{+} \frac{h_2}{k_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{h_{m-1}}{k_{m-1}} \dot{+} \frac{h_m}{k_m}$$

---

1) Такъ какъ непрерывныя дроби общаго вида почти не находятъ примѣненія въ элементахъ, то мы и ограничимся короткимъ выводомъ такихъ соотношеній, которыя представляютъ изъ себя непосредственное обобщеніе изложенныхъ въ В свойствъ обыкновенныхъ дробей. Для болѣе подробнаго изученія см. M. A. Stern, Lehrbuch der algebraischen Analysis, Лейпцигъ и Гейдельбергъ 1860, В гл. 13 и O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Лейпцигъ 1886, II, Teil, 8. Abschnitt.

или

$$K = k_0 + \frac{h_1|}{|k_1} + \frac{h_2|}{|k_2} + \cdots + \frac{h_{m-1}|}{|k_{m-1}} + \cdots + \frac{h_m|}{|k_m}.$$

Для вычисленія ея значенія слѣдуетъ вернуться къ данной выше цѣпи равенствъ и, начиная съ послѣдняго равенства, послѣдовательно обратить въ простыя дроби V_{m-1}, $V_{m-2}, \cdots$, V_1, K. При этомъ мы не будемъ производить другихъ преобразованій кромѣ преобразованія въ неправильную дробь и умноженій частныхъ числителей на обратное значеніе дроби, не производя при этомъ ни сокращенія, ни умноженія числителя и знаменателя на одно и то же число.

Полученный такимъ образомъ числитель дроби V_μ обозначимъ черезъ P_μ, а знаменатель—черезъ Q_μ. Имѣемъ

$$\begin{aligned} V_\mu = \frac{P_\mu}{Q_\mu} &= k_\mu + \frac{h_{\mu+1}}{V_{\mu+1}} \\ &= k_\mu + \frac{h_{\mu+1} \cdot Q_{\mu+1}}{P_{\mu+1}} \\ &= \frac{k_\mu P_{\mu+1} + h_{\mu+1} Q_{\mu+1}}{P_{\mu+1}}, \end{aligned}$$

слѣдовательно:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} Q_\mu &= P_{\mu+1}, \\ P_\mu &= k_\mu P_{\mu+1} + h_{\mu+1} P_{\mu+2}. \end{aligned}$$

По этимъ рекурсіоннымъ формуламъ вычисляютъ рядъ значеній P_{m-2}, $P_{m-3}, \cdots$, P_0. Чтобы V_{m-1}, $V_{m-2}, \cdots$, V_2, V_1, K имѣли опредѣленный смыслъ, ихъ знаменатели должны быть отличны отъ нуля. Поэтому изъ всѣхъ значеній частныхъ числителей и частныхъ знаменателей слѣдуетъ исключить тѣ, при которыхъ k_m, P_{m-1}, $P_{m-2}, \cdots$, P_2, P_1 обращаются въ нули. Послѣ того, какъ мы установили тѣ условія, при выполненіи которыхъ непрерывная дробь только и имѣетъ смыслъ, можно начать производить ея вычисленія и *слѣва*.

Полагаемъ

$$U_\mu = k_0 \dot{+} \frac{h_1}{k_1} \dot{+} \frac{h_2}{k_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{h_\mu}{k_\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots, m),$$

слѣдовательно:

$$U_0 = k_0,$$

$$U_1 = k_0 + \frac{h_1}{k_1} + \frac{k_0 k_1 + h_1}{k_1},$$

$$U_2 = \frac{k_0\left(k_1 + \frac{h_2}{k_2}\right) + h_1}{k_1 + \frac{h_2}{k_2}} = \frac{k_2(k_0 k_1 + h_1) + h_2 k_0}{k_2 k_1 + h_2}.$$

Если обозначить опять числитель и знаменатель дроби, полученной для значенія U_μ при помощи этихъ преобразованій (обращеніе въ неправильную дробь и упрощеніе сложныхъ дробей) безъ сокращеній и умноженія членовъ дроби на одно и то же число, соотвѣтственно черезъ Z_μ и N_μ, то ясно, что

$$\begin{aligned} Z_0 &= k_0 & N_0 &= 1, \\ Z_1 &= k_1 k_0 + h_1, & N_1 &= k_1, \\ Z_2 &= k_2 Z_1 + h_2 Z_0 & N_2 &= k_2 N_1 + h_2 N_0. \end{aligned}$$

Вполнѣ аналогично тому, какъ и въ B, стр. 243, можно доказать заключеніемъ отъ μ къ $\mu+1$, что вообще

$$\text{(II)} \qquad \boldsymbol{Z_\mu = k_\mu Z_{\mu-1} + h_\mu Z_{\mu-2}, \quad N_\mu = k_\mu N_{\mu-1} + h_\mu N_{\mu-2}}.$$

При помощи этихъ формулъ можно вычислять послѣдовательно значенія U_0, U_1, $U_2, \cdots$, U_{m-1}, $U_m = K$ [1]), которыя и для общей непрерывной дроби называются подходящими, хотя онѣ при произвольныхъ значеніяхъ частныхъ числителей и частныхъ знаменателей не обладаютъ свойствомъ, оправдывающимъ такое названіе.

Если первое изъ равенствъ (II) умножить почленно на $N_{\mu-1}$, второе на $Z_{\mu-1}$ и затѣмъ вычесть изъ перваго второе, то получимъ:

$$Z_\mu N_{\mu-1} - N_\mu Z_{\mu-1} = -h_\mu (Z_{\mu-1} N_{\mu-2} - N_{\mu-1} Z_{\mu-2}).$$

---

[1]) Легко можетъ случиться, что изъ этихъ равенствъ для N_m получится значеніе, отличное отъ нуля, но тѣмъ не менѣе непрерывная дробь K не будетъ имѣть смысла. Если, напримѣръ,

$$k_m = 0, \; h_m \gtrless 0 \text{ и } N_{m-2} \gtrless 0,$$

то

$$Z_m = h_m \cdot Z_{m-2}; \; N_m = h_m \cdot N_{m-2}, \text{ слѣдовательно, } \frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_{m-2}}{N_{m-2}},$$

между тѣмъ какъ при $k_m = 0$ значеніе K не является опредѣленнымъ.

Перемноженіе $(\mu-1)$ равенствъ, получающихся изъ послѣдняго послѣдовательной замѣной μ числами $2, 3, \cdots, \mu-1, \mu$ даетъ (ср. выводъ III, въ В, стр. 220):

$$Z_\mu \cdot N_{\mu-1} - N_\mu \cdot Z_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1} h_2 h_3 \cdots h_{\mu-1} h_\mu (Z_1 N_0 - N_1 Z_0)$$

или, такъ какъ

$$Z_1 N_0 - N_1 Z_0 = k_1 k_0 + h_1 - k_1 k_0 = h_1,$$

(III) $$\boldsymbol{Z_\mu N_{\mu-1} - N_\mu Z_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1} h_1 h_2 h_3 \cdots h_{\mu-1} h_\mu}.$$

Дѣля эти равенства на $N_{\mu-1} N_\mu$, получаемъ далѣе:

(IV) $$\frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} = (-1)^{\mu-1} \frac{h_1 h_2 \cdots h_{\mu-1} h_\mu}{N_\mu N_{\mu-1}}.$$

Замѣняемъ въ (IV) μ послѣдовательно числами $1, 2, \cdots, \mu-1, \mu$ и затѣмъ складываемъ полученныя μ равенствъ; тогда получаемъ:

(V) $$\frac{Z_\mu}{N_\mu} - k_0 = \frac{h_1}{N_1 N_0} - \frac{h_1 h_2}{N_1 N_2} + \cdots + (-1)^{\mu-1} \frac{h_1 h_2 \cdots h_{\mu-1} h_\mu}{N_\mu N_{\mu-1}}.$$ [1]

Выведемъ еще одно равенство, нѣсколько болѣе общее, чѣмъ (IV), а именно, вычислимъ разность $U_\nu - U_\mu$, гдѣ $0 \leqq \mu < \nu \leqq m$. Имѣемъ

$$U_\nu = k_0 \dot{+} \frac{h_1}{k_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{h_\mu}{k_\mu} \dot{+} \frac{h_{\mu+1}}{k_{\mu+1}} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{h_\nu}{k_\nu},$$

полагая

$$x = k_{\mu+1} \dot{+} \frac{h_{\mu+2}}{k_{\mu+2}} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{h_\nu}{k_\nu},$$

находимъ

$$U_\nu = k_0 \dot{+} \frac{h_1}{k_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{h_\mu}{k_\mu} \dot{+} \frac{h_{\mu+1}}{x}.$$

Слѣдовательно, U_ν получается изъ $U_{\mu+1}$, замѣной $k_{\mu+1}$ черезъ x. Въ силу этого

$$U_\nu = \frac{x Z_\mu + h_{\mu+1} Z_{\mu-1}}{x N_\mu + h_{\mu+1} N_{\mu-1}}$$

---

[1]) Это равенство примѣняется главнымъ образомъ при изслѣдованіи сходимости непрерывныхъ безконечныхъ дробей. Если μ возрастаютъ, то уже имѣющіеся члены правой части остаются безъ измѣненія, но къ нимъ присоединяются новые.

и

$$
\text{(VI)}\qquad
\begin{aligned}
U_\nu - U_\mu &= \frac{xZ_\mu + h_{\mu+1} Z_{\mu-1}}{xN_\mu + h_{\mu+1} N_{\mu-1}} - \frac{Z_\mu}{N_\mu} = \\
&= \frac{-h_{\mu+1}(Z_\mu N_{\mu+1} - N_\mu Z_{\mu-1})}{(xN_\mu + h_{\mu+1} N_{\mu-1}) \cdot N_\mu} = \\
&= \frac{(-1)^\mu h_1 h_2 \cdots h_\mu h_{\mu+1}}{(xN_\mu + h_{\mu+1} N_{\mu-1}) \cdot N_\mu}.
\end{aligned}
$$

Если ограничиться только такими непрерывными дробями, у которыхъ всѣ частные числители и частные знаменатели положительны, то и въ такомъ случаѣ числители и знаменатели всѣхъ подходящихъ дробей также должны быть положительными, и изъ (VI) слѣдуетъ, что если $\nu > \mu$, то $U_\nu - U_\mu$ имѣетъ знакъ $(-1)^\mu$. Слѣдовательно, если μ четное, то $U_\nu > U_\mu$, если же μ нечетное, то $U_\nu < U_\mu$, при чемъ безразлично, будетъ ли ν четное, или нечетное.

Въ силу этого имѣютъ мѣсто слѣдующія неравенства

$$U_0 < U_2 < U_4 < \cdots \leqq K \leqq \cdots < U_5 < U_3 < U_1.$$

Итакъ, выведенное соотношеніе В (IX), стр. 247 для подходящихъ дробей обыкновенной непрерывной дроби имѣетъ мѣсто и для общихъ непрерывныхъ дробей, всѣ частные числители и знаменатели которыхъ положительны; у этихъ послѣднихъ, слѣдовательно, на самомъ дѣлѣ оправдывается названіе „подходящія дроби“ для U_0, U_1, $U_2, \cdots$ Если положить всѣ частные числители равными 1, а всѣ частные знаменатели равными положительнымъ цѣлымъ числамъ, то изъ формулъ въ (C) получатся формулы (B) [1]).

D. Примѣненіе обыкновенныхъ непрерывныхъ дробей къ рѣшенію сравненій.

Задача I. Полагая, что числа e, a, A означаютъ цѣлыя и положительныя числа, и что e и A числа взаимно простыя, опредѣлить цѣлое число x такъ, чтобы

$$ex \equiv a (\text{мод. } A).$$

---

[1]) Мы отдѣльно вывели свойства правильныхъ непрерывныхъ дробей потому, что въ школьномъ преподаваніи повсюду совершенно опускается прохожденіе непрерывныхъ дробей общаго вида.

Рѣшеніе: разлагаемъ $\frac{A}{e}$ въ непрерывную дробь (сравни В, стр. 239 и 240):

$$\frac{A}{e} = (k_0, k_1, \cdot \cdot \cdot, k_{m-1}, k_m).$$

Между числителями и знаменателями $(m-1)$-ой и m-ой подходящихъ дробей имѣетъ мѣсто равенство (В, III)

$$Z_m \cdot N_{m-1} - N_m \cdot Z_{m-1} = (-1)^{m-1},$$

или, такъ какъ

$$Z_m = A, \ N_m = e,$$
$$A \cdot N_{m-1} - e \cdot Z_{m-1} = (-1)^{m-1},$$

то

$$e \cdot Z_{m-1} \equiv (-1)^m \text{ (мод. } A)$$

и

$$e \cdot aZ_{m-1} \equiv (-1)^m \cdot a \text{ (мод. } A);$$

Если m число четное, то aZ_{m-1} удовлетворяетъ данному сравненію; если m число нечетное, то

$$e \cdot (-a \cdot Z_{m-1}) \equiv a \text{ (мод. } A),$$

откуда $a \cdot Z_{m-1}$ является рѣшеніемъ этого сравненія.

Если предположить, что e и A взаимнопростыя числа, то это сравненіе не можетъ имѣть болѣе одного рѣшенія при условіи, что всѣ числа, сравнимыя другъ съ другомъ по модулю A, не разсматриваются, какъ различныя; въ самомъ дѣлѣ, изъ

$$ex_1 \equiv a \text{ (мод. } A) \text{ и } ex_2 \equiv a \text{ (мод. } A)$$

слѣдовало бы:

$$e \cdot (x_1 - x_2) \equiv 0 \text{ (мод. } A).$$

Такъ какъ e и A взаимно простыя числа, то должно было бы имѣть мѣсто

$$x_1 \equiv x_2 \text{ (мод. } A).$$

Примѣръ:

$$27x \equiv 1 \text{ (мод. } 100).$$

Рѣшеніе:

$$\frac{100}{27} = (3, \ 1, \ 2, \ 2, \ 1, \ 2).$$

$$\frac{Z_0}{N_0}=\frac{3}{1};\quad \frac{Z_1}{N_1}=\frac{4}{1};\quad \frac{Z_2}{N_2}=\frac{2\cdot 4+3}{2\cdot 1+1}=\frac{11}{3};$$
$$\frac{Z_3}{N_3}=\frac{2\cdot 11+4}{2\cdot 3+1}=\frac{26}{7};\quad \frac{Z_4}{N_4}=\frac{1\cdot 26+11}{1\cdot 7+3}=\frac{37}{10};$$
$$\frac{Z_5}{N_5}=\frac{2\cdot 37+26}{2\cdot 10+7}=\frac{100}{27};$$

слѣдовательно:

$$m=5,\ Z_4=37,\ a=1,$$

а поэтому

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv -37 \\ &\equiv +63 \end{aligned}\right\}\ (\text{мод. } 100).$$

Задача II. Даны произвольныя цѣлыя числа a, b, c, d и, кромѣ того, A, B, C, D, — послѣднія числа взаимно простыя, въ остальномъ же совершенно произвольныя. Требуется найти цѣлое число x такъ, чтобы одновременно $x\equiv a$ (мод. A); $x\equiv b$ (мод. B); $x\equiv c$ (мод. C); $x\equiv d$ (мод. D).

Рѣшеніе. Опредѣляемъ четыре цѣлыхъ числа α, β, γ, δ изъ сравненій:

$$BCD\cdot\alpha\equiv a\ (\text{мод. } A);$$
$$ACD\cdot\beta\equiv b\ (\text{мод. } B);$$
$$ABD\cdot\gamma\equiv c\ (\text{мод. } C);$$
$$ABC\cdot\delta\equiv d\ (\text{мод. } D);$$

тогда

$$x=BCD\alpha+ACD\beta+ABD\gamma+ABC\delta+k\cdot ABCD,$$

гдѣ k есть произвольное положительное или отрицательное цѣлое число.

Если x_1 и x_2 два различныхъ числа, удовлетворяющія всѣмъ даннымъ сравненіямъ, то должны имѣть мѣсто сравненія:

$$x_1\equiv x_2\ (\text{мод. } A);\ x_1\equiv x_2\ (\text{мод. } B);\ x_1\equiv x_2\ (\text{мод. } C);\ x_1\equiv x_2\ (\text{мод. } D);$$

въ силу чего x_1-x_2 должно дѣлиться какъ на A, такъ и на B, на C и D, а такъ какъ эти числа взаимно простыя, то, слѣдовательно, и на $ABCD$; это значитъ, что x_1 и x_2 могутъ отличаться другъ отъ друга лишь на число, кратное $ABCD$.

Частный случай: пусть

$$a=b=c=d=M;$$

обозначая

$$ABCD=N,$$

имѣемъ изъ сравненій

$x \equiv M$ (мод. A), $x \equiv M$ (мод. B), $x \equiv M$ (мод. C), $x \equiv M$ (мод. D)

съ одной стороны:

$$x = M + k' N,$$

гдѣ k' означаетъ какое-либо цѣлое число; съ другой стороны (см. только что рѣшенную задачу II):

$$x = BCD\alpha + ACD\beta + ABD\gamma + ABC\delta + kN,$$

слѣдовательно:

$$M + k' N = BCD\alpha + ACD\beta + ABD\gamma + ABC\delta + kN$$

и

$$\frac{M}{N} = \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} + K,$$

гдѣ $K = k - k'$.

Этимъ самымъ дробь $\frac{M}{N}$, знаменатель которой есть произведеніе взаимно простыхъ чиселъ A, B, C, D, мы представили въ видѣ суммы дробей, знаменатели которыхъ суть отдѣльные сомножители A, B, C, D; слѣдователено, мы рѣшили задачу, уже ранѣе нами поставленную (глава III, § 6, стр. 147 и 148), а именно, преобразовать дробь съ произвольнымъ знаменателемъ въ сумму дробей, знаменатели которыхъ суть степени простыхъ чиселъ, входящихъ въ данный знаменатель [1]).

Примѣръ. Представить дробь $\frac{16}{315}$ въ видѣ суммы дробей со знаменателями 9, 5, 7.

Рѣшеніе: прежде всего опредѣляемъ цѣлыя числа α, β, γ такъ, чтобы $5 \cdot 7 \cdot \alpha \equiv 16$ (мод. 9); $9 \cdot 7 \cdot \beta \equiv 16$ (мод. 5); $9 \cdot 5 \cdot \gamma \equiv 16$ (мод. 7 или

$$8\alpha \equiv 7 \text{ (мод. 9)}; \qquad 3\beta \equiv 1 \text{ (мод. 5)}; \qquad 3\gamma \equiv 2 \text{ (мод. 7)}.$$

Этимъ сравненіямъ удовлетворяютъ

$$\alpha = 2; \qquad \beta = 2; \qquad \gamma = 3.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{16}{315} = \frac{2}{9} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + K.$$

1) Гауссъ Disquisitiones Arithmeticae, §§ 309—311.

Такъ какъ

$$\frac{2}{9}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{331}{315},$$

то слѣдуетъ положить $$K=-1.$$

§ 5. Дѣйствія съ логариѳмами въ области раціональныхъ чиселъ [1]).

A. Историческій очеркъ происхожденія логариѳмовъ.

Первоначально логариѳмы не опредѣлялись, какъ показатели степени, что обычно дѣлается теперь (ср. гл. I, § 8 A); устанавливалось такое соотвѣтствіе между геометрическимъ рядомъ $a, aq, aq^2, \cdots, aq^n, \cdots$ и ариѳметическимъ рядомъ $0, d\cdot1, d\cdot2, d\cdot3, \cdots, d\cdot n, \cdots$, что соотвѣтственными оказывались члены, стоящіе подъ однимъ и тѣмъ же номеромъ. Уже Архимедъ, въ своемъ Псаммитѣ замѣтилъ, что умноженіе двухъ членовъ геометрическаго ряда соотвѣтствуетъ сложенію двухъ соотвѣтственныхъ членовъ ариѳметическаго ряда. Далѣе эта мысль развивается въ концѣ 15 столѣтія французскимъ математикомъ Chuquet, а позднѣе, въ особенности Michael'емъ Stifel'емъ, который въ своей Arithmetica integra (1544) опредѣленно высказывается, что сложенію въ ариѳметическомъ рядѣ соотвѣтствуетъ умноженіе въ геометрическомъ, вычитанію въ ариѳметическомъ— дѣленіе въ геометрическомъ, умноженію въ ариѳметическомъ— возведеніе въ степень въ геометрическомъ и дѣленію въ ариѳметическомъ извлеченіе корня въ геометрическомъ. Слѣдовательно, то, что теперь мы называемъ теоріей логариѳмическихъ вычисленій, было въ существенныхъ чертахъ знакомо уже Stifel'ю.

[1]) Если изложеніе теоріи логариѳмовъ положительныхъ чиселъ, основывающееся на точномъ опредѣленіи логариѳма произвольнаго положительнаго числа при любомъ положительномъ основаніи, возможно лишь послѣ введенія ирраціональныхъ чиселъ, то на самомъ дѣлѣ логариѳмы не только были введены первоначально въ науку, какъ числа раціональныя, но и теперь еще точное понятіе ирраціональнаго числа можетъ быть чуждо многимъ, кому необходимо практически пользоваться логариѳмами; обычно учащихся знакомятъ съ логариѳмами раньше, чѣмъ имъ станетъ извѣстенъ смыслъ, въ какомъ говорятъ о существованіи ирраціональныхъ чиселъ. Поэтому, мнѣ кажется, есть потребность уже въ области раціональныхъ чиселъ познакомиться съ логариѳмами и ихъ примѣненіями. Само собой ясно, что мы вернемся затѣмъ нѣсколько позднѣе къ точному опредѣленію логариѳма (ср. гл. VI, § 7, E и гл. VII, § 4, E).

Чтобы использовать эти мысли для числовыхъ вычисленій требовалась лишь еще наличность такихъ геометрическаго и соотвѣтствующаго ему ариѳметическаго рядовъ, члены которыхъ такъ близко подходили бы другъ къ другу, что каждое произвольное число можно было бы или найти непосредственно въ одномъ изъ рядовъ, а, слѣдовательно, и прямо прочесть соотвѣтствующее число другого ряда, или же опредѣлить послѣднее быстро и достаточно точно путемъ простой интерполяціи. Работа по вычисленію такихъ соотвѣтствующихъ другъ другу рядовъ была выполнена, съ одной стороны, Joost'омъ Bürgi [1]), который въ своихъ „Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen“ вычислилъ ихъ уже въ промежутокъ отъ 1603 до 1611 года, но опубликовалъ ихъ только въ 1620 году, а съ другой стороны, независимо отъ него John'омъ Neper'омъ, барономъ Мерчистонскимъ [2]), котораго „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ появилось въ 1614 году.

У Bürgi даны такой геометрическій рядъ:

$$10^8,\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right),\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2,\cdots,\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n,\cdots,$$

и такой ариѳметическій

$$0,\qquad 10\cdot 1,\qquad 10\cdot 2,\cdots,\qquad 10\cdot n,\cdots.$$

Какъ видно, вычисленіе этихъ рядовъ сравнительно очень нетрудно [3]). Каждый членъ геометрическаго ряда получается изъ предыдущаго прибавленіемъ къ нему десятитысячной доли его. Bürgi продолжилъ этотъ рядъ до значеній

$$n=23\,027 \text{ и } n=23\,028$$

---

[1]) 1552—1632; родился въ Швейцаріи, большую часть своей жизни провелъ въ Касселѣ и Прагѣ.

[2]) Родился въ 1550 году, въ Мерчистонѣ близъ Эдинбурга, умеръ въ 1617.

[3]) Поэтому M. Koppe въ программной работѣ для Andreasrealgymnasium въ Берлинѣ 1893 г. предлагаетъ вполнѣ аналогичный способъ введенія въ изученіе логариѳмовъ, при чемъ для цѣлей преподаванія довольствуется геометрическимъ рядомъ, знаменатель котораго равенъ $1+\frac{1}{10^2}$. Онъ разсматриваетъ члены этого ряда, какъ результаты задачъ на проценты, и замѣчаетъ при этомъ (вмѣстѣ съ Zeuthen), что таблицами процентовъ, опубликованными Stevin'омъ въ 1585. въ его Practique d'Arithmétique (ср. Cantor II. стр. 615), а слѣдовательно, до Bürgi и Neper'а можно было пользоваться для облегченія вычисленій такъ же, какъ таблицами логариѳмовъ.

и затѣмъ интерполяціей нашелъ, что значенію

$$n = 23027{,}0022,$$

т.-е. члену 230 270,022 ариѳметическаго ряда соотвѣтствуетъ какъ разъ членъ 10^9 геометрическаго ряда. „Progress-Tabulen" Bürgi можно отождествить съ системой логариѳмовъ въ позднѣйшемъ смыслѣ только въ томъ случаѣ, если каждый членъ геометрическаго ряда раздѣлить на 10^8, а каждый членъ ариѳметическаго ряда на 10^5.

Тогда числу

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n$$

будетъ соотвѣтствовать логариѳмъ

$$\frac{n}{10^4},$$

или, если положить

$$n = \nu \cdot 10^4,$$

числу

$$\left[\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^\nu$$

логариѳмъ ν.

Послѣ указаннаго незначительнаго преобразованія мы можемъ таблицы Bürgi разсматривать, какъ систему логариѳмовъ, съ основаніемъ

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = 2{,}7181459\cdots$$

которое только въ четвертомъ десятичномъ знакѣ отличается отъ предѣльнаго значенія

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818\cdots,$$

играющаго важную роль въ анализѣ.

Neper поясняетъ соотношеніе между своими обоими рядами соображеніями, заимствованными изъ механики. Точкѣ, движущейся съ постоянной скоростью по прямой линіи, онъ приводитъ въ соотвѣтствіе другую, двигающуюся по нѣкоторой другой прямой по направленію къ нѣкоторой неподвижной точкѣ, со скоростью численно равной ея разстоянію отъ послѣдней. Нетрудно замѣтить, что если пути, пройденные первой точкой возрастають въ ариөметической прогрессіи, разстоянія второй отъ неподвижной точки уменьшаются въ геометрической прогрессіи.

Если бы Neper въ своей задачѣ разсматривалъ скорость второй точки, какъ дѣйствительно непрерывно измѣняющуюся, соотвѣтствіе между его ариөметическимъ и геометрическимъ рядомъ привело бы его къ той системѣ логариөмовъ, основаніемъ которой служило бы какъ разъ значеніе, обратное вышеупомянутому числу e. Neper не перешелъ къ предѣльному значенію, но разсматривалъ скорости, какъ постоянныя на очень малыхъ отрѣзкахъ (на 10^7 доли всего пути), и именно, равныя половинѣ суммы скоростей въ конечныхъ точкахъ этого маленькаго отрѣзка, и пришелъ къ такому геометрическому ряду, общій членъ котораго есть $10^7\cdot\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n$, въ то время какъ соотвѣтствующій общій членъ ариөметическаго ряда имѣетъ видъ: $\left(1+\frac{0,5}{10^7}\right)\cdot n$. Члены этого ариөметическаго ряда въ указанномъ выше „Descriptio" Неперъ назвалъ логариөмами [1]). Эти ряды можно было бы отождествить съ системой логариөмовъ, какъ ее понимаютъ теперь, только въ томъ случаѣ, если бы члены этихъ рядовъ раздѣлить на 10^7. Тогда числу

$$(1-10^{-7})^n$$

сотвѣтствовалъ бы логариөмъ:

$$\left(1+\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}\right)\cdot n\cdot 10^{-7},$$

или при

$$\left(1+\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}\right)\cdot n\cdot 10^{-7}=\nu$$

числу

$$(1-10^{-7})^{\frac{\nu\cdot 10^7}{1+\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}}}$$

---

1) Первоначально, а именно въ Mirifici logarithmorum canonis constructio, опубликованной лишь въ 1619 году (послѣ смерти Непера), т.-е. послѣ Descriptio, *но составленной раньше ея*, Неперъ *называлъ члены* ариөметическаго ряда «numeri artificiales» въ противоположность «numeri naturales» — членамъ геометрическаго ряда.

соотвѣтствовалъ бы логариѳмъ ν; иначе

$$\nu = \log \left[(1-10^{-7})^{\frac{10^7}{1+\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}}} \right]^{\nu};$$

слѣдовательно, основаніемъ системы логариѳмовъ было бы число

$$(1-10^{-7})^{\frac{10^7}{1+\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}}},$$

лишь очень мало отличающееся отъ $\frac{1}{e}$. Neper и Bürgi, избѣгая перехода къ предѣлу, пользовались своими рядами, не выходя изъ области раціональныхъ чиселъ. Вычисленіе ряда

$$10^7, \quad 10^7\cdot\left(1-\frac{1}{10^7}\right), \quad 10^7\cdot\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2, \cdots$$

до члена, равнаго половинѣ перваго, потребовало бы чрезвычайной большой работы (а именно вычисленія приблизительно 6 900 000 членовъ). Поэтому Неперъ избралъ путь (указанный въ „Constructio", см. примѣчаніе пред. стр.), который можетъ показаться сложнѣе, чѣмъ методъ Bürgi, а въ дѣйствительности не только облегчилъ работу, но сдѣлалъ ее вообще возможной. Именно въ первоначальномъ рядѣ онъ вычислилъ только 101 членъ, затѣмъ составилъ второй геометрическій рядъ, первый членъ котораго совпадалъ съ первымъ членомъ перваго ряда, а второй совпадалъ (а въ крайнемъ случаѣ приближался) къ 101 числу перваго ряда; въ этомъ второмъ ряду онъ вычислялъ 51 членъ; подобнымъ же образомъ онъ перешелъ затѣмъ къ третьему ряду и послѣ вычисленія 21 числа въ послѣднемъ къ четвертому, знаменатель котораго $\left(1-\frac{1}{100}\right)$, а семидесятый членъ равенъ приблизительно половинѣ 10^7. Необычное для насъ построеніе таблицъ, заключавшееся въ томъ, что возрастанію членовъ ариѳметическаго ряда соотвѣтствовало убываніе членовъ геометрическаго ряда, такъ что для чиселъ, меньшихъ начальнаго члена, логариѳмы были положительны, имѣло основаніемъ то, что Неперъ пользовался ими преимущественно для тригонометрическихъ цѣлей и желалъ дать логариѳмы sinus'а и cosinus'а въ положительныхъ числахъ.

Вскорѣ послѣ появленія „Descriptio" съ Neper'омъ завязалъ сношенія его соотечественникъ Henry Briggs, бывшій въ восторгѣ отъ новаго открытія. Результатомъ совмѣстныхъ обсужденій явилась мысль измѣнить ряды такъ, чтобы числу 10 геометрическаго ряда соотвѣтствовала 1 въ ариѳметическомъ ряду [1]). Вскорѣ послѣ этой встрѣчи Неперъ умеръ, и, такимъ образомъ, эти новыя таблицы вычислилъ одинъ Briggs. Въ 1617 году онъ выпустилъ въ свѣтъ „Logarithmorum Chilias prima", содержавшую восьмизначные логариѳмы чиселъ отъ 1 до 1000 при основаніи 10. Въ 1624 году послѣдовала его „Arithmetica Logarithmica", содержавшая логариѳмы съ четырнадцатью знаками для чиселъ отъ 1 до 20 000 и отъ 90 000 до 100 000. Въ то время какъ Briggs былъ занятъ заполненіемъ оставшагося интервала, голландецъ Adriaen Vlack уже принялся за такую же работу и въ 1628 году выпустилъ въ свѣтъ десятизначные логариѳмы всѣхъ чиселъ отъ 1 до 100 000.

На болѣе подробной исторіи логариѳмовъ мы здѣсь останавливаться не можемъ; мы поэтому укажемъ на M. Cantor'a, „Vorlesungen" II, стр. 727—748 и на Tropfke „Geschichte der Elementarmathematik" II, стр. 141—186. Къ этому остается добавить еще только то, что позднѣйшее опредѣленіе логариѳма, какъ показателя степени, впервые ясно и опредѣленно высказывается [1]) (по Tropfke) въ Gardiners „Tables of Logarithms", Лондонъ 1742, въ то время какъ общимъ признаніемъ такого пониманія логариѳма мы обязаны только Эйлерову „Introductio in analysin infinitorum" (1748).

В. Обоснованіе понятія „логариѳмъ" въ области раціональныхъ чиселъ.

Въ гл. II, § 5 D, стр. 96 мы показали уже, что въ области раціональныхъ чиселъ при произвольномъ положительномъ основаніи, вообще говоря, не существуетъ логариѳма произвольнаго положительнаго числа.

Но аналогично тому, какъ въ области раціональныхъ чиселъ мы могли замѣнить, вообще говоря, неразрѣшимую задачу извле-

---

[1]) Въ предисловіи къ англійскому переводу Descriptio Edward'a Wright'a Неперъ уже говоритъ, что онъ намѣренъ всѣ свои логариѳмы раздѣлить на опредѣленное число, а именно на 2,3025851. Тогда онъ получилъ бы систему, въ которой числу $\frac{1}{10}$ соотвѣтствовалъ бы логариѳмъ 1.

[1]) «The common Logarithm of a number is the Index of that power of 10 which is equal to the number».

ченія какого-либо корня изъ произвольнаго положительнаго числа, другой разрѣшимой, если только при этомъ не требовать абсолютной математической точности, мы, при томъ же условіи, и въ данномъ случаѣ можемъ найти логариѳмъ произвольнаго положительнаго числа[1]). Пусть дана задача опредѣлить при основаніи 10 логариѳмъ 2. Если и не существуетъ такой степени 10 съ раціональнымъ показателемъ, которая равнялась бы 2, или другими словами не существуетъ степени 10 съ цѣлымъ показателемъ, которая равнялась бы цѣлой степени двухъ, то все-таки можно, выбравъ произвольное положительное цѣлое число n, опредѣлить положительное цѣлое число ν такъ, чтобы

$$10^{\nu} < 2^{n} < 10^{\nu+1}.$$

Изъ этихъ неравенствъ непосредственно мы легко могли бы вывести

$$10^{\frac{\nu}{n}} < 2 < 10^{\frac{\nu+1}{n}}$$

т.-е. заключить 2 между двумя степенями 10, показатели которыхъ отличаются другъ отъ друга только на $\frac{1}{n}$, т.-е. на дробь, которая можетъ быть сдѣлана произвольно малой при соотвѣтствующемъ увеличеніи n, если бы только $10^{\frac{1}{n}}$ существовало въ нашей числовой области. Но это не имѣетъ мѣста ни для какого значенія n (конечно за исключеніемъ $n = 1$). Выбравъ произвольное положительное цѣлое число m, всегда можно (ср. гл. II § 5 С, (III) и гл. III § 3 F) найти такое положительно цѣлое число μ, что

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^{n} < 10 < \left(\frac{\mu+1}{m}\right)^{n}.$$

Теперь имѣемъ

$$\left(\frac{\mu+1}{m}\right)^{n} - \left(\frac{\mu}{m}\right)^{n} = \frac{(\mu+1)^{n} - \mu^{n}}{m^{n}} =$$

$$= \frac{1}{m^{n}}\left[n \cdot \mu^{n-1} + \frac{1}{2!} \cdot n(n-1) \cdot \mu^{n-2} + \frac{1}{3!} n(n-1)(n-2)\mu^{n-3} + \cdots\right] =$$

$$= \frac{n}{m} \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-1} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m} \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m} \cdot \frac{n-2}{m} \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-3} + \cdots$$

---

1) О приближенномъ значеніи логариѳма мы можемъ не говорить до тѣхъ поръ, пока не установимъ, что слѣдуетъ понимать подъ истиннымъ значеніемъ логариѳма.

Такъ какъ

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^n < 10,$$

то также

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-1} < 10, \quad \left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-2} < 10, \text{ и т. д.,}$$

слѣдовательно,

$$\left(\frac{\mu+1}{m}\right)^n - \left(\frac{\mu}{m}\right)^n < 10\left(\frac{n}{m} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n-1}{m} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m} + \cdots\right).$$

Полагаемъ

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{G},$$

тогда

$$\frac{n-1}{m} < \frac{1}{G}, \quad \frac{n-2}{m} < \frac{1}{G}, \text{ и т. д.,}$$

поэтому

$$\left(\frac{\mu+1}{m}\right)^n - \left(\frac{\mu}{m}\right)^n < \frac{10}{G}\left(1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{G} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{G^2} + \cdots\right).$$

При достаточно большомъ значеніи $G = \frac{m}{n}$ можно правую часть неравенства, а, слѣдовательно, и лѣвую сдѣлать меньше произвольно-малаго числа δ. Если положить

$$10 = \left(\frac{\mu}{m}\right)^n + \varepsilon \text{ или } (10-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} = \frac{\mu}{m}$$

и

$$10 = \left(\frac{\mu+1}{m}\right)^n - \varepsilon' \text{ или } (10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} = \frac{\mu+1}{m},$$

то мы можемъ, придавая достаточно большія значенія $G = \frac{m}{n}$, достигнуть того, что какъ ε, такъ и ε' будутъ меньше произвольно малаго числа δ.

Изъ неравенствъ

$$10^\nu < 2^n < 10^{\nu+1}$$

теперь слѣдуетъ далѣе:

$$(10-\varepsilon)^\nu < 2^n < (10+\varepsilon')^{\nu+1}$$

и

$$(10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}} < 2 < (10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}}.$$

$$(10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}} = \left(\frac{\mu}{m}\right)^\nu \text{ и } (10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}} = \left(\frac{\mu+1}{m}\right)^{\nu+1},$$

несомнѣнно, числа раціональныя. Ихъ разность

$$(10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}}-(10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}}=(10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}}\left[\left(\frac{10+\varepsilon'}{10-\varepsilon}\right)^{\frac{\nu}{n}}\cdot(10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}}-1\right]<$$

$$<(10-\varepsilon)\left[\frac{10+\varepsilon'}{10-\varepsilon}\cdot(10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}}-1\right],$$

и такъ какъ $\frac{\nu}{n}<1$,

то она $<10\cdot\left[\frac{10+\delta}{10-\delta}\cdot(10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}}-1\right]$.

Придавая n достаточно большое значеніе, мы можемъ прежде всего достигнуть того, что $(10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}}$ подойдетъ произвольно близко къ значенію 1 (см. гл. II, § 5 В, стр. 100). Если затѣмъ придать достаточно большое значеніе числу $G=\frac{m}{n}$, то δ, а слѣдовательно, и разность между дробью $\frac{10+\delta}{10-\delta}$ и 1 будутъ сколь угодно малы. Поэтому при выбранныхъ значеніяхъ n и $\frac{m}{n}$ правая часть послѣдняго неравенства, а слѣдовательно, и

$$(10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}}-(10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}}$$

будетъ меньше, чѣмъ произвольно малое данное число η.

Если теперь положить, что

$$2-(10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}}=\rho \text{ и } (10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}}-2=\rho',$$

то также и $\rho<\eta$ и $\rho'<\eta$.

Равенства:

$$2-\rho=(10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}}$$

и

$$2+\rho'=(10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}}$$

показываютъ, что если въ области раціональныхъ чиселъ логариѳма 2-хъ при основаніи 10 и не существуетъ, то все-таки могутъ быть указаны такія раціональныя дроби $\frac{\nu}{n}$ и $\frac{\nu+1}{n}$, являющіяся вполнѣ точными логариѳмами чиселъ, отличающихся отъ 2 менѣе, тѣмъ на произвольно малое число η, при основаніи, отличномъ отъ десяти менѣе, чѣмъ на произвольно малое число δ. Если опять-таки не требуется абсолютной точности, а дѣло сводится, какъ и во всѣхъ приложеніяхъ математики, лишь къ тому, чтобы допущенная погрѣшность не превышала предѣла, обусловленнаго характеромъ самой задачи, то можно въ этомъ случаѣ[1]) одно изъ двухъ чиселъ $\frac{\nu}{n}$ и $\frac{\nu+1}{n}$, отличающихся другъ отъ друга на дробь $\frac{1}{n}$, которая увеличеніемъ числа n можетъ быть сдѣлана произвольно малой, разсматривать какъ логариѳмъ числа 2 при основаніи 10; и, на самомъ дѣлѣ, при практическихъ вычисленіяхъ, подъ логариѳмомъ какого-либо положительнаго числа всегда понимаютъ раціональное число, опредѣленное вышеуказаннымъ образомъ, и мы въ слѣдующей главѣ также примкнемъ къ такому пониманію.

C. **Пріемы вычисленія логариѳмовъ.**

Согласно тому, что изложено въ В, вычисленіе логариѳма какого-либо положительнаго числа a при какомъ-либо положительномъ основаніи g сводится къ опредѣленію степени a, возможно близкой къ какой-либо степени g. Мы можемъ ограничиться тѣмъ случаемъ, когда a есть число простое, такъ какъ, въ силу того, (Гл. I, § 11 C), что каждое произвольное цѣлое число можно представить въ видѣ

$$z = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdots,$$

гдѣ $p_1, p_2, p_3, \cdots$ — числа простыя и $n_1, n_2, n_3 \cdots$ положительныя цѣлыя числа, легко вычислить

$$\log z = n_1 \log p_1 + n_2 \log p_2 + n_3 \log p_3 + \cdots,$$

если знать $\log p$, $\log p_2$, $\log p_3 \cdots$.

---

[1]) Исходя, напримѣръ, изъ неравенства $10^{308} < 2^{1024} < 10^{309}$ (ср. C, I этого §) и, замѣняя, во-первыхъ, 10 ближайшимъ числомъ, изъ котораго можно извлечь корень 1024-й степени, напримѣръ, числомъ $\left(\frac{4009}{4000}\right)^{1024}$, приблизительно на $\frac{1}{100}$ меньшимъ 10, а затѣмъ 2 замѣняя $\left(\frac{308}{1024}\right)$-ою степенью этого числа, которая приблизительно на $\frac{1}{500}$ меньше 2-хъ, можно несуществующій въ раціональной числовой области $^{(10)}\log 2$ замѣнить въ вышеуказанномъ смыслѣ дробью $\frac{308}{1024}$.

Если приближенно выполняется равенство $a^n = g^m$, то мы можемъ въ смыслѣ, указанномъ въ В, положить ${}^{(g)}\log a = \frac{m}{n}$. Нѣкоторые пріемы возможно быстраго нахожденія такой пары чиселъ m и n мы пояснимъ на примѣрѣ: $a = 2$, и $g = 10$.

I. Если бы имѣть таблицу значеній всѣхъ степеней двухъ до очень большого показателя, то легко можно было бы найти степени 2, мало отличающіяся отъ степеней 10 [1]). Въ противномъ случаѣ послѣдовательнымъ умноженіемъ можно дойти до высшихъ степеней 2, напр., возводя въ квадратъ уже вычисленныя степени двухъ. Полное и точное вычисленіе является практически невыполнимой работой, но его и не требуется; вѣдь для нашей цѣли интересно знать только, между какими степенями 10 лежитъ та или другая степень двухъ. Поэтому мы пишемъ съ самаго начала каждую степень двухъ въ видѣ произведенія, одинъ изъ сомножителей котораго есть степень 10, а другой—десятичное число, которое заключенно между 1 и 10 и въ которомъ мы сохраняемъ только 2 знака. Такъ какъ при сравнительно высокихъ степеняхъ и показатель 10 можетъ оказаться невѣрнымъ изъ-за неточности, получаемой благодаря этому упрощенію, то каждую степень 2 мы будемъ заключать между двумя значеніями, одно изъ которыхъ несомнѣнно больше, а другое несомнѣнно меньше соотвѣтствующей степени 2-хъ.

Начнемъ съ

$$2^8 = 2{,}56 \cdot 10^2;$$

откуда, такъ какъ

$$6{,}55 < 2{,}56^2 = 6{,}5536 < 6{,}56,$$

слѣдуетъ, что

$$6{,}55 \cdot 10^4 < 2^{16} < 6{,}56 \cdot 10^4$$

и далѣе:

$$4{,}29 \cdot 10^9 < 2^{32} < 4{,}31 \cdot 10^9,$$
$$1{,}84 \cdot 10^{19} < 2^{64} < 1{,}86 \cdot 10^{19},$$
$$3{,}38 \cdot 10^{38} < 2^{128} < 3{,}46 \cdot 10^{38},$$

---

1) Въ программной работѣ Prinz Heinrich-Gymnasiums въ Берлинѣ A. Schmidt въ 1905 году, опубликовалъ такого рода таблицы или, вѣрнѣе, таблицу степеней 2-хъ, дѣленныхъ на такія степени 10-ти, чтобы частное заключалось между 1 и 10-ю. Всякія другія числа (соотвѣтственно и ихъ 2-ыя, 3-ьи и т. д. степени) можно заключить между числами этой таблицы и такимъ образомъ опредѣлить ихъ логариѳмы.

$$1{,}14\cdot 10^{77} < 2^{256} < 1{,}20\cdot 10^{77},$$
$$1{,}29\cdot 10^{154} < 2^{512} < 1{,}44\cdot 10^{154},$$
$$1{,}66\cdot 10^{308} < 2^{1024} < 2{,}08\cdot 10^{308},$$
$$2{,}75\cdot 10^{616} < 2^{2048} < 4{,}33\cdot 10^{616},$$
$$7{,}56\cdot 10^{1232} < 2^{4096} < 1{,}88\cdot 10^{1233}.$$

Изъ послѣдняго неравенства вытекаетъ

$$10^{1232} < 2^{4096} < 10^{1234},$$

слѣдовательно, 2^{4096} въ силу этихъ неравенствъ заключено между двумя степенями 10, показатели которыхъ отличаются уже на 2. Поэтому остановимся лучше на предпослѣднемъ неравенствѣ и изъ него выведемъ:

$$10^{616} < 2^{2048} < 10^{617}.$$

Въ смыслѣ, указанномъ въ В, положимъ ${}^{(10)}\log 2$ равнымъ либо

$$\frac{616}{2048} = 0{,}30078\ldots,$$

либо

$$\frac{617}{2048} = 0{,}30127\ldots$$

Если ограничиваться тремя десятичными знаками, то обѣ дроби дадутъ одно и то же значеніе 0,301 [1]).

II. Вмѣсто послѣдовательнаго возведенія въ степень числа 2, мы можемъ опредѣлить логариѳмъ 2 при основаніи 10 и повторнымъ извлеченіемъ корня изъ 10. Имѣемъ

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162277\ldots,$$
$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3{,}162277\ldots} = 1{,}77828\ldots,$$

если эти равенства перемножить почленно и извлечь квадратный корень изъ обѣихъ частей полученнаго равенства, то будемъ имѣть:

$$10^{\frac{3}{8}} = \sqrt{3{,}162277\cdot 1{,}77828} = 2{,}371374\ldots;$$

---

[1]) Этотъ методъ по существу исходитъ отъ H. Briggs'a, который постепенно переходилъ къ степенямъ 2^{10}, 2^{100}, 2^{1000} и т. д.

если тѣ же самыя дѣйствія продѣлать надъ двумя послѣдними равенствами, то:

$$10^{\frac{5}{16}} = \sqrt{1,77828 \cdot 2,371374} = 2,053525\ldots$$

Но $10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{5}{16}} = 10^{\frac{9}{16}}$, поэтому

$$10^{\frac{9}{32}} = \sqrt{1,77828 \cdot 2,053525} = 1,910953\ldots;$$

$$\sqrt{10^{\frac{5}{16}} \cdot 10^{\frac{9}{32}}} = 10^{\frac{19}{64}} = \sqrt{2,053525 \cdot 1,910953} = 1,980956;$$

$$\sqrt{10^{\frac{5}{16}} \cdot 10^{\frac{19}{64}}} = 10^{\frac{39}{128}} = \sqrt{2,053525 \cdot 1,980956} = 2,016914;$$

$$\sqrt{10^{\frac{19}{64}} \cdot 10^{\frac{39}{128}}} = 10^{\frac{77}{256}} = \sqrt{1,980956 \cdot 2,016914} = 1,998855;$$

$$\sqrt{10^{\frac{39}{128}} \cdot 10^{\frac{77}{256}}} = 10^{\frac{155}{512}} = \sqrt{2,016914 \cdot 1,998855} = 2,007864;$$

$$\sqrt{10^{\frac{77}{256}} \cdot 10^{\frac{155}{512}}} = 10^{\frac{309}{1024}} = \sqrt{1,998855 \cdot 2,007864} = 2,003354;$$

$$\sqrt{10^{\frac{77}{256}} \cdot 10^{\frac{309}{1024}}} = 10^{\frac{617}{2048}} = \sqrt{1,998855 \cdot 2,003354} = 2,001103;$$

$$\sqrt{10^{\frac{77}{256}} \cdot 10^{\frac{617}{2048}}} = 10^{\frac{1233}{4096}} = \sqrt{1,998855 \cdot 2,001103} = 1,999976.$$

Если замѣнить число 2 числомъ 2,001103, то получимъ, какъ и въ I, для log2 значеніе $\frac{617}{2048} = 0,30127$; замѣняя же 2 числомъ 1,999976, которое отличается отъ 2 еще меньше, найдемъ $\log 2 = \frac{1233}{4096} = 0,3010254\ldots$ или, ограничиваясь пятью знаками, 0,30103. Ясно, что простымъ продолженіемъ того же самаго пріема будутъ получаться степени 10, которыя все ближе подходятъ къ значенію 2 [1]).

III. Къ той же цѣли, найти степень двухъ, по возможности мало отличающуюся отъ степени 10, можно притти еще слѣдующимъ путемъ: умножаемъ степень двухъ, лишь немногимъ меньшую степени 10, на степень двухъ, лишь немногимъ большую степени 10. Вновь найденную степень снова умножаютъ на первую изъ

---

[1]) Методъ II имѣется въ прибавленіи къ Неперовой Constructio. Имъ пользовались Briggs, Vlack и Kepler.

только что названныхъ степеней двухъ въ томъ случаѣ, если она болѣе, чѣмъ ближайшая къ ней степень 10, а если она окажется менѣе сосѣдней степени 10, то на вторую изъ названныхъ.

Продолжая такимъ образомъ далѣе, дойдемъ до степеней двухъ, которыя при дѣленіи на подходящія степени 10 будутъ давать въ частныхъ значенія, все болѣе и болѣе приближающіяся къ 1. Какъ и въ I, сохраняемъ только первые десятичные знаки. Чтобы три послѣднихъ десятичныхъ знака и въ послѣднихъ равенствахъ были еще вѣрны, вычисленіе производимъ съ пятью десятичными знаками [1]).

Исходимъ изъ:

1. $$2^3 = 0,8 \cdot 10.$$

и

2. $$2^{10} = 1,024 \cdot 10^3.$$

Почленнымъ умноженіемъ обоихъ равенствъ получаемъ

3. $$2^{13} = 0,8192 \cdot 10^4$$

и далѣе:

4. $2^{10} \cdot 2^{13} = 2^{23} = 0,83886 \cdot 10^7$, (Погрѣшность $f < 0,5 \cdot 10^{-5}$),
5. $2^{10} \cdot 2^{23} = 2^{33} = 0,85899 \cdot 10^{10}$, $(f < 1 \cdot 10^{-5})$,
6. $2^{10} \cdot 2^{33} = 2^{43} = 0,87961 \cdot 10^{13}$, $(f < 1,5 \cdot 10^{-5})$,
7. $2^{10} \cdot 2^{43} = 2^{53} = 0,90072 \cdot 10^{16}$, $(f < 2 \cdot 10^{-5})$,
8. $2^{10} \cdot 2^{53} = 2^{63} = 0,92234 \cdot 10^{19}$, $(f < 2,5 \cdot 10^{-5})$,
9. $2^{10} \cdot 2^{63} = 2^{73} = 0,94448 \cdot 10^{22}$, $(f < 3 \cdot 10^{-5})$,
10. $2^{10} \cdot 2^{73} = 2^{83} = 0,96715 \cdot 10^{25}$, $(f < 3,5 \cdot 10^{-5})$,
11. $2^{10} \cdot 2^{83} = 2^{93} = 0,99036 \cdot 10^{28}$, $(f < 4 \cdot 10^{-5})$,
12. $2^{10} \cdot 2^{93} = 2^{103} = 1,01413 \cdot 10^{31}$, $(f < 4,5 \cdot 10^{-5})$,
13. $2^{93} \cdot 2^{103} = 2^{196} = 1,00435 \cdot 10^{59}$, $(f < (4 + 4,5 + 0,5) \cdot 10^{-5} = 9 \cdot 10^{-5})$,
14. $2^{93} \cdot 2^{196} = 2^{289} = 0,99467 \cdot 10^{87}$, $(f < (4 + 9 + 0,5) \cdot 10^{-5} = 13,5 \cdot 10^{-5})$,
15. $2^{196} \cdot 2^{289} = 2^{485} = 0,99900 \cdot 10^{146}$, $(f < 23 \cdot 10^{-5})$,
16. $2^{196} \cdot 2^{485} = 2^{681} = 1,00335 \cdot 10^{205}$, $(f < 32,5 \cdot 10^{-5})$,
17. $2^{485} \cdot 2^{681} = 2^{1166} = 1,00235 \cdot 10^{351}$, $(f < 56 \cdot 10^{-5})$,
18. $2^{485} \cdot 2^{1166} = 2^{1651} = 1,00135 \cdot 10^{497}$, $(f < 79,5 \cdot 10^{-5})$,
19. $2^{485} \cdot 2^{1651} = 2^{2136} = 1,00035 \cdot 10^{643}$. $(f < 103 \cdot 10^{-5})$.

[1]) Уже въ цитированной подъ *A*, на стр. 260 программной работѣ Копие при примѣненіи этого метода принимаетъ во вниманіе только 3 знака, въ результатѣ чего онъ находитъ: $2^{485} = 1,003 \cdot 10^{146}$, тогда какъ въ дѣйствительности $2^{485} < 10^{146}$.

Дальнѣйшее продолженіе такого вычисленія безцѣльно, такъ какъ при опредѣленіи возможной погрѣшности мы уже не можемъ сказать съ увѣренностью, будетъ ли въ (19) первый сомножитель правой части больше или меньше единицы[1]). Легко замѣтить, что первый сомножитель правой части все ближе и ближе подходитъ къ значенію 1; если пренебречь разностью между нимъ и единицей, то каждое изъ равенствъ отъ (1) до (19), даетъ значеніе ${}^{(10)}\log 2$, а именно:

Равенство 1. значеніе $\frac{1}{3} = 0{,}33333$,

„ 2. „ $\frac{3}{10} = 0{,}30000$,

„ 11. „ $\frac{28}{93} = 0{,}301075$,

„ 13. „ $\frac{59}{196} = 0{,}3010204$,

„ 15. „ $\frac{146}{485} = 0{,}3010309$,

„ 19. „ $\frac{643}{2136} = 0{,}3010299625$ [2]),

въ то время какъ въ десятизначныхъ логариѳмическихъ таблицахъ, составленныхъ на основаніи вычисленій, выполненныхъ съ большей точностью имѣется:

$$\log 2 = 0{,}3010299957.$$

IV. Примѣненіе пріемовъ, данныхъ въ I—III, требуетъ при вычисленіи логариѳма каждаго новаго числа повторенія всѣхъ вычисленій съ самаго начала. Имѣются еще пріемы, дающіе возможность сравнительно быстро найти логариѳмы любыхъ чиселъ, пользуясь заранѣе разъ навсегда вычисленными вспомогательными таблицами. Основателемъ этого пріема является Long[3]) (Philosophical Transactions 1714).

---

1) Вычисленіе, выполненное съ самаго начала съ большимъ числомъ десятичныхъ знаковъ даетъ $2^{2136} = 1{,}00016 \cdot 10^{643}$.

2) Эти же дроби даетъ, напр., Tropfke (Geschichte der Elementarmathematik II. стр. 169), какъ приближенныя значенія разложенія въ непрерывную дробь, кажущагося отличнымъ отъ вышеприведеннаго, но по существу совпадающаго съ нимъ.

3) По Tropfke II, стр. 170.

Если при основаніи 10

$$\log a = \alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ означаютъ однозначныя числа (цыфры),—слѣдовательно, всѣ они меньше 10 — то

$$a = 10^\alpha \cdot 10^{\frac{\alpha_1}{10}} \cdot 10^{\frac{\alpha_2}{100}} \cdot 10^{\frac{\alpha_3}{1000}} \ldots$$

Если, обратно, удастся привести a къ послѣднему виду, то этимъ самымъ мы опредѣлимъ числа $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, а слѣдовательно, и $\log a$. Этого можно достигнуть, пользуясь таблицами, которыя содержатъ значенія отъ первой до девятой степеней числа $10^{\frac{1}{10}}$, отъ первой до девятой — числа $10^{\frac{1}{100}}$, отъ первой до девятой степеней числа $10^{\frac{1}{1000}}$ и т. д. Прежде всего опредѣляемъ α и сравниваемъ $\frac{a}{10^\alpha}$ со степенями числа $10^{\frac{1}{10}}$. Наибольшая, но все же меньшая, чѣмъ $\frac{a}{10^\alpha}$, изъ этихъ степеней даетъ α_1; послѣ выполненія дѣленія: $\frac{a}{10^\alpha} : 10^{\frac{\alpha_1}{10}}$, по второй таблицѣ подобнымъ же образомъ опредѣляемъ α_2 и т. д. Допуская, что $\log a$ записанъ въ видѣ систематической дроби, съ основаніемъ G:

$$\log a = \alpha + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \cdots,$$

гдѣ теперь каждая изъ цыфръ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ можетъ быть только нулемъ или единицей, аналогично получимъ, что

$$a = 10^\alpha \cdot 10^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot 10^{\frac{\alpha_2}{2^2}} \cdot 10^{\frac{\alpha_3}{2^3}} \ldots$$

Цыфры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ опредѣляются какъ и раньше, но теперь для этого требуются лишь значенія

$$\sqrt{10},\quad \sqrt{\sqrt{10}},\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \text{ и т. д.}$$

слѣдовательно, можно обойтись только квадратными корнями, и такъ какъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ могутъ имѣть только значенія 0 или 1, то возможно избавиться и отъ вычисленія степеней этихъ корней. (Ср. Baltzer Die Elemente der Mathematik I, Allgemeine Arithmetik, § 20).

V. **Briggs** въ своей Arithmetica logarithmica (1624) указалъ пріемъ быстраго полученія логариѳмовъ всѣхъ чиселъ, пользуясь лишь ограниченнымъ числомъ независимо вычисленныхъ заранѣе логариѳмовъ. Данное число

$$A = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots,$$

изображенное въ видѣ десятичной дроби, цѣлую часть которой a_0, не нарушая общности, можно приравнять одному изъ чиселъ 1, 2,..., 9, приводится къ виду

$$A = a_0\left(1 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \cdots\right)$$

дѣленіемъ на a_0 и записью частнаго въ видѣ десятичной дроби.

Если второй сомножитель правой части раздѣлить на $1 + \frac{\alpha_1}{10}$, то получится равенство слѣдующаго вида:

$$\left(1 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \cdots\right) = \left(1 + \frac{\alpha_1}{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \frac{\beta_4}{10^4} + \cdots\right).$$

Второй сомножитель правой части не можетъ содержать десятыхъ долей, такъ какъ уже

$$\left(1 + \frac{\alpha_1}{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{\alpha_1 + 1}{10} + \frac{\alpha_1}{10^2}$$

было бы несомнѣнно больше лѣвой части предыдущаго равенства.

Подобнымъ же образомъ получается далѣе:

$$\left(1 + \frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \frac{\beta_4}{10^4}\right) = \left(1 + \frac{\beta_2}{10^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\gamma_3}{10^3} + \frac{\gamma_4}{10^4} + \cdots\right),$$

гдѣ второй сомножитель правой части не можетъ содержать сотыхъ долей, и

$$\left(1 + \frac{\gamma_3}{10^3} + \frac{\gamma_4}{10^4} + \cdots\right) = \left(1 + \frac{\gamma_3}{10^3}\right) \cdot \left(1 + \frac{\delta_4}{10^4} + \cdots\right).$$

Изъ этихъ равенствъ послѣдовательными подстановками получимъ:

$$A = a_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha_1}{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{\beta_2}{10^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\gamma_3}{10^3}\right) \cdot \left(1 + \frac{\delta_4}{10^4}\right) \cdots {}^{1)}$$

---

1) Для произвольно выбраннаго числа $A = 6{,}407262$, вышеуказаннымъ способомъ дѣленія послѣдовательно получаются равенства.

$$\begin{aligned} A &= 6 \cdot 1{,}067877 = \\ &= 6 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}007431 = \\ &= 6 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}007 \cdot 1{,}000428 = \\ &= 6 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}007 \cdot 1{,}0004 \cdot 1{,}000028 = \\ &= 6 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}007 \cdot 1{,}0004 \cdot 1{,}00002 \cdot 1{,}000008. \end{aligned}$$

$$и\ \log A = \log a_0 + \log\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right) + \log\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}\right) + \log\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}\right) + \\ + \log\left(1+\frac{\delta_4}{4}\right) + \cdots$$

a_0 можетъ имѣть значенія 1; 2;... 9;

$1+\frac{\alpha_1}{10}$ значенія 1,1; 1,2;...; 1,9;

$1+\frac{\beta_2}{10^2}$ „ 1,01; 1,02;..., 1,09;

$1+\frac{\gamma_3}{10^3}$ „ 1,001; 1,002;... 1,009;

$1+\frac{\delta_4}{10^4}$ „ 1,0001; 1,0002;... 1,0009; и т. д.

Логариѳмы всѣхъ этихъ чиселъ Briggs вычислилъ сперва съ 15 десятичными знаками [1]). Послѣ того, какъ дѣленіемъ найдены значенія a_0, α_1, β_2, γ_3, δ_4,... можно, пользуясь указанными таблицами, простымъ сложеніемъ получить логариѳмъ даннаго числа A.

VI. Раньше и на самомъ дѣлѣ пользовались для вычисленія логариѳмовъ только что приведенными способами. Теперь же эти пріемы могутъ служить лишь для того, чтобы ученикамъ, еще не посвященнымъ въ анализъ, показать возможность вычисленія логариѳмовъ. Для болѣе легкаго и точнаго вычисленія логариѳмовъ, начиная съ XVIII столѣтія, извѣстенъ другой болѣе цѣлесообразный пріемъ, основанный на разложеніи логариѳма въ быстро сходящійся рядъ, о чемъ здѣсь еще не можетъ быть и рѣчи. Этимъ пріемомъ сперва вычисляются такъ называемые „натуральные" логариѳмы, основаніемъ которыхъ является

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

число уже упомянутое на стр. 261.

---

[1]) Arithmetica logarithmica, стр. 32 (1624). Подобнымъ же методомъ пользуются еще и теперь, если желаютъ получить логариѳмы отдѣльныхъ чиселъ съ бо́льшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ, чѣмъ они даются обыкновенно въ таблицахъ. Поэтому во многихъ работахъ находятся такія вспомогательныя таблицы, какъ и таблицы Бриггса, напечатанныя съ бо́льшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ. Ср. литературныя указанія въ Encyklopädie der Math. Wissenschaften, томъ I, стр. 993 и Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Лейпцигъ 1900, §§ 53—55.

D. Системы и таблицы логариѳмовъ.

Совокупность логариѳмовъ всѣхъ положительныхъ чиселъ при какомъ-либо одномъ основаніи называется системой логариѳмовъ. За основаніе можетъ принято любое, отличное отъ 1, положительное число. Но особенно просто выполняются вычисленія съ логариѳмами систематическихъ чиселъ, если за основаніе логариѳмовъ принять основаніе числовой системы, а, слѣдовательно, при нашей десятичной — число десять. На самомъ дѣлѣ, всѣ десятичныя числа, состоящія изъ однѣхъ и тѣхъ цыфръ, расположенныхъ въ одной и той же послѣдовательности, отличающіеся, слѣдовательно, другъ отъ друга, лишь мѣстомъ запятой или приписанными нулями, могутъ быть получены изъ одного и того же числа, скажемъ, напримѣръ, заключеннаго между 1 и 10 и обозначеннаго черезъ A, при помощи умноженія или дѣленія на какую-либо степень десяти; всѣ они имѣютъ слѣдующій видъ:

$$z_1 = A \cdot 10^m \text{ или } z_2 = A : 10^n,$$

гдѣ m и n положительныя цѣлыя числа.

Поэтому при любомъ основаніи системы логариѳмовъ имѣемъ:

$$\log z_1 = \log A + m \cdot \log 10 \text{ или } \log z_2 = \log A - n \cdot \log 10.$$

Если за основаніе системы логариѳмовъ принять 10, то эти равенства примутъ болѣе простой видъ:

$$\log z_1 = \log A + m \text{ и } \log z_2 = \log A - n.$$

Логариѳмы всѣ этихъ чиселъ z_1, z_2 отличаются другъ отъ друга только на цѣлое число; они совпадаютъ въ десятичныхъ знакахъ, совокупность которыхъ называется „мантиссой“ [1]). При расположеніи логариѳмовъ различныхъ чиселъ при основаніи 10 въ такъ называемыя таблицы логариѳмовъ, достаточно дать только мантиссу логариѳма лишь одного изъ чиселъ, составлен-

[1]) Мантисса есть слово этрусскаго происхожденія, означаетъ «придатокъ». Wallis въ своей алгебрѣ (1685) обозначалъ этимъ словомъ знаки любой десятичной дроби, и только впервые Эйлеръ въ Introductio (1748) воспользовался имъ спеціально для обозначенія десятичныхъ знаковъ логариѳма. Съ тѣхъ поръ оно и получило это значеніе. И только Гауссъ въ Disquisitiones Arithmeticae снова примѣнилъ это слово для обозначенія десятичныхъ знаковъ, получающихся при обращеніи простой дроби въ десятичную. Ср. Tropfke II, стр. 177 и Encyklopädie d. Math. Wiessensch. I, стр. 986.

ныхъ изъ однѣхъ и тѣхъ же цыфръ въ одномъ и томъ же порядкѣ. Поэтому таблицы содержатъ только логариѳмы цѣлыхъ чиселъ, расположенныхъ въ ихъ натуральномъ порядкѣ. Цѣлое число, которое слѣдуетъ придать къ мантиссѣ, называющееся „характеристикой", легко опредѣляется, а именно: если это число содержитъ передъ запятой n ($\geqq 1$) цыфръ, то оно заключено между 10^{n-1} и 10^n, а слѣдовательно, логариѳмъ его—между $n-1$ и n въ силу чего характеристика равна $n-1$. Если же число не содержитъ цѣлой части и непосредственно за запятой слѣдуютъ, скажемъ, еще $(n-1)$ нуль ($n \geqq 1$), то это число равно нѣкоторому числу A, заключенному между 1 и 10 и раздѣленному на 10^n; слѣдовательно, логариѳмъ его равенъ разности, уменьшаемое которой есть правильная десятичная дробь, а вычитаемое—цѣлое число n. Для вычисленія съ логариѳмами цѣлесообразнѣе такого вычитанія не выполнять, а, наоборотъ, оставлять логариѳмъ въ видѣ разности; и тогда число n, снабженное отрицательнымъ знакомъ также называютъ характеристикой [1]).

Въ силу только что указанныхъ преимуществъ на практикѣ пользуются почти исключительно логариѳмами при основаніи 10, которыя и принято обозначать символомъ „log" безъ дальнѣйшихъ добавленій. Такъ какъ эти логариѳмы впервые вычислилъ Briggs, то они и носятъ названіе Бригговыхъ. Въ анализѣ важную роль играютъ натуральные логариѳмы, основаніемъ которыхъ служитъ неоднократно упоминавшееся число e, которое здѣсь не можетъ быть строго опредѣлено, какъ не принадлежащее къ раціональнымъ числамъ. Натуральный логариѳмъ какого-либо числа z пишутъ въ видѣ $\log \operatorname{nat} z$, или lnz, или также lz.

Если извѣстны логариѳмы всѣхъ чиселъ при какомъ-либо основаніи, то легко вычислить ихъ и при какомъ-либо другомъ основаніи. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\alpha_1 = {}^{(g_1)}\log a \quad \text{или} \quad g_1^{\alpha_1} = a$$

и

$$\alpha_2 = {}^{(g_2)}\log a \quad \text{или} \quad g_2^{\alpha_2} = a,$$

то слѣдуетъ:

$$g_1^{\alpha_1} = g_2^{\alpha_2}.$$

---

[1]) Словомъ «характеристика» пользовался уже Briggs въ своей Arithmetica logarithmica, нѣмецкое названіе «Kennziffer» примѣнилъ Kästner въ своихъ Anfangsgründen der Arithmetik (1 изд. 1759 и 2 изд. 1764).

Въ зависимости отъ того, берется ли логариѳмъ обѣихъ частей равенства по основанію g_1, или g_2, получаемъ соотвѣтственно

$$\alpha_1 = \alpha_2 \cdot {}^{(g_1)}\log g_2$$

или

$$\alpha_1 \cdot {}^{(g_2)}\log g_1 = \alpha_2.$$

Въ силу этого, зная логариѳмы чиселъ по второй системѣ, получимъ логариѳмы тѣхъ же чиселъ по первой системѣ, умножая логариѳмы второй системы на одно и то же число ${}^{(g_1)}\log g_2$; изъ логариѳмовъ первой системы получимъ логариѳмы соотвѣтствующихъ чиселъ по второй умноженіемъ каждаго логариѳма первой системы на ${}^{(g_2)}\log g_1$. Такимъ образомъ изъ системы логариѳмовъ при основаніи e получаются Бригговы логариѳмы умноженіемъ первыхъ на ${}^{(10)}\log e = 0{,}43429448\ldots$, и обратно, умноженіемъ Бригговыхъ логариѳмовъ на ${}^{(e)}\log 10 = 2{,}30258509\ldots$ Число, на которое слѣдуетъ умножить логариѳмъ одной системы (преимущественно логариѳмъ при основаніи e) для полученія соотвѣтствующихъ логариѳмовъ по другой системѣ, называется модулемъ [1]) послѣдней системы по отношенію къ первой.

Въ теченіе послѣднихъ 300 лѣтъ издано чрезвычайно много таблицъ логариѳмовъ [2]). Первая полная таблица логариѳмовъ всѣхъ чиселъ отъ 1 до 100 000 была составлена Vlack'омъ; она даетъ логариѳмы съ десятью десятичными знаками. Долгое время пользовались преимущественно семизначными таблицами; лишь въ XIX столѣтіи перешли къ 5 и 4-хъ значнымъ таблицамъ, точность которыхъ для большинства практическихъ цѣлей была признана вполнѣ достаточной. Само собой ясно, что ни однѣ таблицы не могутъ содержать логариѳмовъ всѣхъ чиселъ. Такъ, напримѣръ, особенно часто употреблявшіяся раньше семизначныя таблицы Вега, даютъ логариѳмы всѣхъ пятизначныхъ чиселъ. Непосредственно изъ этихъ таблицъ можно получить логариѳмы и всѣхъ шестизначныхъ чиселъ, оканчивающихся однимъ нулемъ.

[1]) Это слово введено Cotes (письмо къ Ньютону отъ 25 мая 1712 г.); выше приведенное значеніе ${}^{10}\log e$ было уже вычислено Меркаторомъ (Philosophical Transactions, 1668), а затѣмъ точнѣе, съ 60-ю знаками Halley (Philosophical Transactions 1695).

[2]) Bierens de Haan въ 1875 году составилъ списокъ, заключавшій 553 таблицы. Ср. Encyklopädie d. Math. Wissensch. I, стр. 987 и Tropfke II, стр. 155.

и всѣхъ семизначныхъ чиселъ, оканчивающихся двумя нулями, и т. д. Простымъ же пріемомъ вычисленія, такъ называемой интерполяціей, при помощи этихъ таблицъ могутъ быть съ точностью до семи знаковъ опредѣлены логариѳмы любого шести или семизначнаго числа. Два послѣдовательныя числа, данныя въ таблицахъ, имѣють постоянную разность 1, или разность 100, если всѣ числа присоединеніемъ двухъ нулей обратить въ семизначныя. Непосредственно изъ таблицъ видно, что разности двухъ послѣдовательныхъ логариѳмовъ не всегда имѣютъ одно и то же значеніе, а, напротивъ, постепенно убываютъ. Но двѣ сосѣднія разности или бываютъ равны, или же очень мало отличаются другъ отъ друга. Такъ, напримѣръ, на случайно открытой страницѣ таблицъ Вега находимъ, что въ интервалѣ 4 729 400 — 4 729 900 увеличенію числа на 100 всегда соотвѣтствуетъ увеличеніе логариѳма на $92 \cdot 10^{-7}$. При меньшихъ интервалахъ, напримѣръ, 4 729 400 — 4 729 500 и подавно будемъ въ правѣ утверждать, что каждый разъ, когда число получаетъ одно и то же приращеніе, то и логариѳмъ его растетъ равномѣрно. Тогда приращенію числа въ одну единицу соотвѣтствуетъ увеличеніе логариѳма на $0{,}92 \cdot 10^{-7}$, а приращенію числа $d\,(d < 100)$ — увеличеніе логориѳма на $d \cdot 0{,}92 \cdot 10^{-7}$. Такъ, напримѣръ, получаемъ:

$$\begin{aligned}\log\ 4\,729\,452 &= \log\ 4\,729\,400 + 52 \cdot 0{,}92 \cdot 10^{-7}\\ &= 6{,}6748060 + 47{,}84 \cdot 10^{-7}\\ &= 6{,}6748108.\end{aligned}$$

Подобнымъ же образомъ можно принимать во вниманіе также и 8-й знакъ числа; девятый знакъ уже не оказываетъ никакого вліянія на семизначныя логариѳмы. Предположеніе, что въ интервалѣ двухъ послѣдовательныхъ чиселъ—измѣненіе логариѳма можетъ быть принято пропорціональнымъ измѣненію числа, могло бы, пожалуй, еще дать неточность въ послѣднемъ (седьмомъ) знакѣ для чиселъ, помѣщенныхъ въ началѣ таблицы, т.-е. немного бóльшихъ 10 000. Поэтому Вега продолжилъ свои семизначныя таблицы не только до 100 000 но до 101 000. Новѣйшій авторъ, E. Sang (A new table of seven-place logarithms, 1. изд. 1871, 2. изд. 1883), довелъ свои таблицы даже до 200 000, и такимъ образомъ, въ интервалѣ отъ 1 000 000 до 1 010 000 или отъ 1 000 000 до 2 000 000 числа, если ихъ разсматривать, какъ семизначныя, получаютъ приращенія, равныя не 100, а только 10. Въ интервалѣ же меньшемъ въ 10 разъ, конечно, можно съ значительно большей точностью приращеніе логариѳма считать пропорціональнымъ приращенію числа. Для болѣе удобнаго интерполированія во всѣхъ таблицахъ подъ заголовкомъ „Partes proportionales“ (въ единицахъ послѣдняго знака мантиссы) даны приращенія логариѳмовъ, соотвѣтствующія приращенію числа въ $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \cdots, \frac{9}{10}$ единицы послѣдняго знака.

При помощи тѣхъ же таблицъ, дающихъ логариѳмы чиселъ, расположенныхъ въ натуральномъ порядкѣ, можно обратно по данному логариѳму опредѣлить число. Если логариѳмъ прямо находится въ таблицахъ, то можно число прочесть непосредственно; въ противномъ случаѣ его вычисляютъ, при помощи „partes proportionales“, основываясь на предположенной пропорціональности между приращеніемъ логариѳма и приращеніемъ числа. Имѣются также таблицы, содержащія числа, соотвѣтствующія логариѳмамъ расположеннымъ въ натуральномъ порядкѣ, такъ называемыя таблицы антилогариѳмовъ. Старѣйшія таблицы — Progress-Tabulen Joost'a Bürgi, упомянутыя уже на стр. 260, § 5 A, были именно такими; но такъ какъ при наличности логариѳмическихъ таблицъ можно обойтись безъ таблицъ антилогариѳмовъ, то число послѣднихъ значительно меньше, чѣмъ обыкновенныхъ таблицъ логариѳмовъ [1]).

[1]) Ср. литературныя указанія въ Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften I, стр. 997. Выше въ текстѣ изъ разсмотрѣнія таблицъ логариѳмовъ мы чисто эмпирическимъ путемъ убѣдились, что при ограниченіи незначительными интервалами, приращеніе логариѳма можно считать пропорціональнымъ приращенію числа. Для точнаго обоснованія этого необходимо примѣнить элементы анализа. На основаніи гл. I, § 8 C

$$\log\ (a+x)-\log\ a=\log\left(\frac{a+x}{a}\right)=\log\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

Въ анализѣ доказывается, что $\log\left(1+\frac{x}{a}\right)$ можетъ быть представленъ безконечнымъ рядомъ, первые члены котораго:

$$m\cdot\frac{x}{a}-\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}m\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^3-\ldots,$$

гдѣ m означаетъ вышеуказанный (на стр. 279) модуль перехода 0,43429448. Пусть теперь a, какъ и въ таблицахъ Вега, есть нѣкоторое пятизначное число и при этомъ $x<1$; тогда

$$\left(\frac{x}{a}\right)<\frac{1}{10^4},\ \left(\frac{x}{a}\right)^2<\frac{1}{10^8},\ \left(\frac{x}{a}\right)^3<\frac{1}{10^{12}}\ \text{и т. д.}$$

E. Примѣненіе логариѳмовъ для облегченія вычисленій. Логариѳмы суммъ и разностей.

Значительныя выгоды вычисленія съ логариѳмами обусловливаются примѣненіемъ формулъ (ср. гл. I, § 8 C):

$$\log(a \cdot b \cdot c \cdots) = \log a + \log b + \log c + \cdots,$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b,$$

$$\log a^n = n \cdot \log a,$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a.$$

Послѣднія позволяютъ всякое умноженіе чиселъ замѣнить сложеніемъ ихъ логариѳмовъ, дѣленіе — вычитаніемъ, возведеніе въ степень — умноженіемъ и извлеченіе корня — дѣленіемъ. Такъ, благодаря логариѳмамъ, облегчается вычисленіе любого выраженія, въ которомъ встрѣчаются только произведенія, частныя, степени и корни. Если напримѣръ:

$$x = \sqrt[3]{\frac{a \cdot b^5}{c^7 \cdot \sqrt{d}}} \cdot \sqrt[5]{e^3 \cdot \sqrt[9]{\frac{f}{g}}},$$

гдѣ a, b, c, d, e, f, g означаютъ данныя числа, то

$$\log x = \frac{1}{3}\left(\log a + 5 \log b - 7 \log c + \frac{1}{2} \log d\right)$$
$$+ \frac{1}{5}\left(3 \log e + \frac{1}{9}(\log f - \log g)\right) \cdot$$

Если мы хотимъ ограничиться мантиссой съ семью знаками, то достаточно принять во вниманіе лишь первый членъ ряда, и тогда можно написать

$$\log(a + x) - \log a = \frac{m}{a} \cdot x,$$

т.-е. приращеніе логариѳма пропорціонально приращенію числа. Факторъ пропорціональности убываетъ съ возрастаніемъ числа. Нельзя пренебрегать вторымъ членомъ вышеприведеннаго ряда $\frac{1}{2} m \left(\frac{x}{a}\right)^2$ въ томъ случаѣ, если требуется получить логариѳмъ болѣе, чѣмъ съ 7-ю знаками. Болѣе точныя, чѣмъ здѣсь, указанія относительно необходимой затѣмъ интерполяціи, а также вычисленіе предѣла ошибокъ можно найти у Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Лейпцигъ 1900. 6, 7 и 8 главы. Ср. также Weber-Wellstein, Encyklopädie d. Elementaren Algebra und Analysis, томъ I (2 изд.), стр. 124 и Encyklopädie der Mathem. Wissensch., томъ I, стр. 806.

Прежде всего слѣдуетъ найти логариѳмы чиселъ a, b, c, d, e, f, g, выполнить надъ ними дѣйствія, указанныя въ правой части равенства, и по найденному $\log x$ взять изъ таблицъ соотвѣтствующее число. Удобный пріемъ вычисленія корня любой степени при помощи логариѳмовъ поясняетъ, почему мы въ гл. III, § 3 F, не останавливались подробнѣе на непосредственномъ вычисленіи корней съ показателемъ выше 2-хъ [1]).

Напротивъ, примѣненіе логариѳмовъ къ вычисленію суммъ и разностей не такъ просто. Чтобы по $\log a$ и $\log b$ получить непосредственно $\log (a+b)$ и $\log (a-b)$, не переходя при этомъ къ самымъ числамъ a и b, Leonelli (Supplément logarithmique, Bordeaux, 1802/1803) изобрѣлъ особый пріемъ; послѣднимъ воспользовался Гауссъ и сдѣлалъ его практически примѣнимымъ, опубликовавъ необходимыя для этого (пятизначныя) таблицы (Zachs Monatliche Korrespondenz, 1812 г., стр. 498—528; Ges. Werke, Bd. III, стр. 244 [2]). Мы этотъ пріемъ изложимъ въ болѣе простой формѣ, которую ему придалъ Th. Wittstein (въ его Logarithmentafel, Ганноверъ, 1859) и который въ новѣйшее время получилъ наибольшее распространеніе. Таблицы Wittstein'а даютъ для каждаго значенія $A = \log x$ соотвѣтствующее значеніе $B = \log (x+1)$; онѣ расположены такъ, что по данному A находится соотвѣтствующее B, подобно тому, какъ въ простыхъ таблицахъ находится по числу его логариѳмъ, а по какому-либо значенію B соотвѣтствующее A, — какъ по логариѳму число. Слѣ-

---

1) Если при вычисленіи требуется не столько его точность, сколько быстрота, то вполнѣ цѣлесообразно вмѣсто логариѳмическихъ таблицъ пользоваться такъ называемыми «логариѳмическими линейками». Въ существенныхъ чертахъ этотъ приборъ состоитъ изъ двухъ точно совпадающихъ и свободно скользящихъ одна по другой логариѳмическихъ шкалъ A и B, т.-е. шкалъ съ дѣленіями 1. 2, 3, 4, ..., нанесенными въ точкахъ, разстоянія которыхъ отъ начала соотвѣтственно пропорціональны логариѳмамъ чиселъ 1, 2, 3, 4... Чтобы опредѣлить значеніе произведенія ab, помѣщаютъ штрихъ 1 шкалы B подъ штрихомъ a шкалы A. Штрихъ шкалы A, приходящійся надъ штрихомъ b шкалы B, и дастъ значеніе искомаго произведенія. Помѣщая штрихъ b шкалы B подъ штрихомъ a шкалы А, и прочитавъ число шкалы A, приходящееся надъ штрихомъ 1 шкалы B, найдемъ значеніе частнаго $a:b$ и т. д. Правильность этого способа вытекаетъ непосредственно изъ формулъ $\log (ab) = \log a + \log b$ и $\log (a:b) = \log a - \log b$. Полное описаніе счетныхъ линеекъ и ихъ дальнѣйшихъ примѣненій можно найти въ Ercyklopädie der Mathem. Wissenschaften, Bd. I, стр. 1053.; тамъ же указана и литература.

2) Leonelli далъ только три пробныхъ страницы (съ 14 десятичными знаками).

довательно, непосредственно въ таблицахъ по данному логариѳму какого-либо числа можно прочитать логариѳмъ числа на 1 бо́льшаго или на 1 меньшаго. Общая же задача по даннымъ значеніямъ $\log a$ и $\log b$ — найти значеніе $\log(a+b)$ и $\log(a-b)$ сейчасъ же сводится къ этой частной задачѣ.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\log(a+b)=\log b+\log\left(1+\frac{a}{b}\right)\cdot$$

Полагая

$$\frac{a}{b}=x,$$

а, слѣдовательно,

$$\log a-\log b=\log x=A,$$

получаемъ

$$\log\left(1+\frac{a}{b}\right)=\log(1+x)=B,$$

слѣдовательно,

$$\log(a+b)=\log b+B.$$

Поэтому, прежде всего слѣдуетъ найти разность $\log a-\log b$ въ столбцѣ A, затѣмъ взять по таблицамъ соотвѣтствующее значеніе B и прибавить къ $\log b$, чтобы получить $\log(a+b)$.

Аналогично получаемъ

$$\log(a-b)=\log b+\log\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot$$

Для

$$\frac{a}{b}=x+1$$

будетъ

$$\log a-\log b=\log\frac{a}{b}=\log(x+1)=B$$

и

$$\log\left(\frac{a}{b}-1\right)=\log x=A;$$

слѣдовательно,

$$\log(a-b)=\log b+A.$$

Поэтому для вычисленія $\log(a-b)$ слѣдуетъ найти въ столбцѣ $B \log a-\log b$, опредѣлить по таблицамъ соотвѣтствующее значеніе A и прибавить къ $\log b$.

§ 6. Вычисленіе простыхъ и сложныхъ процентовъ и рентъ.

А. Простые проценты.

Подъ „процентами" понимаютъ то вознагражденіе, которое выдаютъ за пользованіе денежной суммой („капиталъ"), заимообразно взятой на опредѣленный срокъ. Размѣръ вознагражденія зависитъ отъ величины денежной суммы и отъ продолжительности срока займа, и, какъ это обычно принято, проценты пропорціональны тому и другому, т.-е. для капитала въ k_0 единицъ, при срокѣ займа въ n единицъ времени, проценты будутъ содержать

$$z = k_0 \cdot n \cdot r$$

денежныхъ единицъ, гдѣ r означаетъ множитель, независящій отъ капитала и отъ времени. Для $k_0 = 1$ и $n = 1$ будемъ имѣть

$$z = r,$$

т.-е. r денежныхъ единицъ составляютъ проценты на единицу капитала за единицу времени. За единицу времени обычно принимаютъ годъ, а за единицу капитала, въ Германіи — марку, (въ Россіи — рубль). При такомъ условіи капиталъ въ 1 марку (въ 1 рубль), въ 1 годъ приноситъ r марокъ (рублей) процентныхъ денегъ. Величина r устанавливается по соглашенію между должникомъ и кредиторомъ. Это соглашеніе зависитъ, съ одной стороны, отъ настоящаго положенія денежнаго рынка, а съ другой — отъ мнѣнія кредитора о кредитоспособности должника. Такъ какъ r почти безъ исключенія всегда меньше 1, то это число принято писать въ видѣ дроби, и обычно въ видѣ дроби со знаменателемъ 100.

Слѣдовательно, необходимо положить:

$$r = \frac{p}{100},$$

откуда слѣдуетъ

$$z = \frac{k_0 \cdot n \cdot p}{100}.$$

Для $k_0 = 100$, $n = 1$

$$z = p;$$

т.-е. p марокъ (рублей) составляютъ проценты, которые капиталъ въ 100 марокъ (рублей), приноситъ въ 1 годъ. Поэтому говорятъ, что процентная такса равна p процентамъ и короче пишутъ $p^0/_0$ [1]).

При помощи равенства

$$z = \frac{k_0 \cdot n \cdot p}{100}$$

легко вычислить процентныя деньги съ капитала (k_0) за какое-либо цѣлое или дробное число (n) лѣтъ, при какой-либо процентной таксѣ (p). Вообще, легко найти изъ того же равенства одно изъ значеній z, k_0, n, p, если три остальныя извѣстны.

А именно имѣемъ:

$$k_0 = \frac{100z}{np}, \quad n = \frac{100z}{k_0 p}, \quad p = \frac{100z}{k_0 n}.$$

B. Проценты на проценты или сложные проценты.

§ 608 Свода германскихъ гражданскихъ законовъ гласитъ: „если при заключеніи займа опредѣлены проценты и нѣтъ какихъ-либо другихъ особыхъ условій, то проценты должны быть уплачиваемы по истеченіи каждаго года и при возвратѣ долга, если заемъ заключенъ на срокъ меньше года". При болѣе долгомъ срокѣ займа, кредиторъ и должникъ могутъ войти въ такого рода соглашеніе [2]) (при взносахъ въ сберегательныя кассы послѣднее опредѣлено закономъ), чтобы причитающіяся въ концѣ каждаго года процентныя деньги не уплачивались кредитору, а оставались на рукахъ у должника, который и на нихъ присчитывалъ бы проценты, какъ на вновь занятый капиталъ. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что первоначальный капиталъ отданъ взаймы по „сложнымъ" процентамъ.

---

[1]) Этотъ знакъ «$^0/_0$» (по Tropfke. Geschichte der Elementarmathematik, Лейпцигъ 1902, I томъ, стр. 106—см. русскій пер. Д. А. Бема и Р. Э. Струве (Ред.)) получился изъ сокращенія cto вмѣсто cento. Первоначально писали 4 p $^0/_0$; начиная съ XIX столѣтія, стали отбрасывать p (pro—за или per—черезъ). Что касается процентной таксы въ различныя времена, см. Tropfke, I томъ, стр. 102, а также цитируемую тамъ книгу: Billeter, Geschichte des Zinsfusses im Altertum, Лейпцигъ 1898. Если нѣтъ особыхъ условій, то германское гражданское уложеніе въ § 246 опредѣляетъ процентную таксу въ $4^0/_0$.

[2]) Ср. для этого § 248 свода нѣмецкихъ гражданскихъ законовъ.

Если первоначальный долгъ равенъ k_0, то въ концѣ перваго года онъ будетъ

$$k_1 = k_0 + \frac{k_0 p}{100} = k_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Слѣдовательно, въ теченіе одного года долгъ увеличился въ $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ разъ; такъ какъ множитель $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, называемый „процентнымъ множителемъ“ не зависитъ отъ величины капитала, то k_1, при той же процентной таксѣ, въ концѣ второго года обратится въ

$$k_2 = k_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

и k_2 въ концѣ третьяго года въ

$$k_3 = k_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ и т. д.}$$

Въ концѣ n-го года долгъ опредѣлится по формулѣ

$$k_n = k_{n-1} \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Перемножая почленно n равенствъ, полученныхъ для $k_1, k_2, \cdots k_n$, найдемъ

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{k_n = k_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}.$$

Для вычисленія k_n слѣдуетъ прологариѳмировать эту формулу:

$$\log k_n = \log k_0 + n \log \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Чтобы при умноженіи на большое число n, погрѣшность въ логариѳмѣ сильно не увеличивалась, приходится въ

$$\log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

сохранять бо́льше десятичныхъ знаковъ, чѣмъ въ остальныхъ логариѳмахъ, встрѣчающихся въ вычисленіи. Безъ логариѳмовъ можно обойтись въ томъ случаѣ, если пользоваться таблицей значеній $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, какую даетъ, напримѣръ, M. Cantor, въ приложеніяхъ къ своей „Politische Arithmetik“ 2-е изд., Лейпцигъ, 1903 г., для $p = 3$; 3,5; 4, и для всѣхъ значеній числа n отъ 1 до 100.

Предполагая, что всегда есть возможность отдать капиталъ взаймы по $p^0/_0$, можно сказать, что обладаніе суммой въ $k_0 = \frac{k_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$ марокъ равнозначно обладанію суммой въ k_n марокъ черезъ n лѣтъ. Слѣдовательно, долгъ въ k_n марокъ, взятый на срокъ въ n лѣтъ, можетъ быть погашенъ немедленной уплатой въ $\frac{k_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$ марокъ. Разность обѣихъ суммъ, т.-е. то, что надо вычесть изъ собственнаго долга при уплатѣ наличными деньгами, называется въ купеческомъ обиходѣ дисконтомъ, а соотвѣтствующая формула $k_0 = \frac{k_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$ формулой дисконта [1]).

До сихъ поръ мы считали срокъ займа цѣлымъ числомъ лѣтъ. Если же $n = \nu + \nu'$, гдѣ ν есть число цѣлое, а ν' — правильная дробь, то прежде всего получимъ

$$k_\nu = k_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^\nu.$$

k_ν марокъ приносятъ въ ν' лѣтъ $\frac{k_\nu \cdot \nu' \cdot p}{100}$ марокъ процентныхъ денегъ; слѣдовательно, получаемъ

$$\begin{aligned} k_n = k_{\nu+\nu'} &= k_\nu\left(1+\frac{\nu' p}{100}\right) \\ \text{(II)} \qquad &= k_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^\nu\left(1+\frac{\nu' p}{100}\right). \end{aligned}$$

При помощи того же равенства мы можемъ выразить k_0 черезъ k_n, p, ν и ν'. Въ случаѣ $\nu = 0$, особенно часто встрѣчающемся въ коммерческой практикѣ, получаемъ, напримѣръ,

$$k_0 = \frac{k_{\nu'}}{1+\frac{\nu' p}{100}}$$

какъ значеніе взноса для уплаты долга, истекающаго черезъ $\nu'(<1)$ года. Такъ какъ дѣленіе на $\left(1+\frac{\nu' p}{100}\right)$ неудобно, то въ

[1]) Лейбницъ далъ ея выводъ въ своей Meditatio iuridico-mathematica de interusurio simplice. Acta Eruditorum 1683. О допустимости такого способа дисконтировать много спорили въ Германіи въ теченіе всего XVIII столѣтія, въ особенности юристы. Ср. Cantor III, стр. 518 и стр. 525.

дѣйствительности вычисляютъ k_0 не изъ этого равенства, а вмѣсто него по формулѣ:

$$k_0 = k_{\nu'}\left(1 - \frac{\nu' p}{100}\right),$$

которая, строго говоря, является неточной, но при небольшихъ значеніяхъ ν' и p, только и встрѣчающихся на практикѣ, даетъ результатъ лишь немногимъ отличающійся отъ точнаго [1]).

Подобно тому, какъ равенства (I) и (II) мы рѣшали относительно k_0, можно попробовать рѣшить ихъ и относительно n и p. Если спрашивается n, то напередъ неизвѣстно, слѣдуетъ ли пользоваться равенствомъ (I) или (II). Если взять Бригговы логариѳмы обѣихъ частей равенствъ (I) и (II), то получимъ:

$$\log k_n - \log k_0 = n \cdot \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

или

$$\log k_n - \log k_0 = \nu \cdot \log\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \log\left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right).$$

Если частное $\dfrac{\log k_n - \log k_0}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ есть число цѣлое, то оно даетъ искомое значеніе n. Если же дѣленіе

$$(\log k_n - \log k_0) : \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

не выполняется, а, напротивъ, получается цѣлое частное ν и остатокъ ρ и, такимъ образомъ, оказывается

$$\log k_n - \log k_0 = \nu \cdot \log\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \rho,$$

---

1) По гл. III, § 4, стр. 111, такъ какъ на практикѣ всегда $\frac{\nu' p}{100} < 1$,

$$\frac{1}{1 + \frac{\nu' p}{100}}$$

представляетъ значеніе безконечнаго ряда

$$1 - \frac{\nu' p}{100} + \left(\frac{\nu' p}{100}\right)^2 - \ldots,$$

и указанная въ текстѣ неточность состоитъ въ отбрасываніи всѣхъ слѣдующихъ за $\frac{\nu' p}{100}$ членовъ. Исторически интересно то, что Лейбницъ въ своемъ методѣ (ср. предыдущее примѣчаніе) сперва находитъ для опредѣленія цѣны долгового обязательства, срокъ которому еще не вышелъ, такой безконечный геометрическій рядъ.

а слѣдовательно,

$$\rho = \log\left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right),$$

и если число r опредѣлить такъ, чтобы

$$\rho = \log r,$$

то

$$1 + \frac{\nu' p}{100} = r,$$

откуда непосредственно получаемъ:

$$\nu' = \frac{100}{p}\left(r - 1\right)$$

и искомое число

$$n = \nu + \nu' \text{ [1]}.$$

Если по остальнымъ величинамъ, предполагая n числомъ цѣлымъ, слѣдуетъ опредѣлить процентную таксу p, то получаемъ изъ равенства (I):

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}},$$

$$p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} - 1\right).$$

Если же n не есть число цѣлое, то мы должны исходить изъ равенства (II), и для $x = \frac{p}{100}$ получаемъ уравненіе

$$(1 + x)^\nu \cdot (1 + \nu' x) = \frac{k_n}{k_0},$$

которое, вообще говоря, рѣшается методомъ послѣдовательныхъ приближеній, разсматриваемымъ лишь въ алгебрѣ. На практикѣ такого рода задачи врядъ ли могутъ встрѣтиться.

---

[1]) Если бы положить n равнымъ частному $\dfrac{\log k_n - \log k_o}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ и въ томъ случаѣ, когда оно и не является цѣлымъ числомъ, то это значило бы положить въ основаніе вмѣсто вышеприведеннаго равенства (II) равенство $k_n = k_o\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\nu + \nu'}$, слѣдовательно, $\left(1 + \frac{p\nu'}{100}\right)$ замѣнить черезъ $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\nu'}$. При малыхъ значеніяхъ $\frac{p}{100}$ послѣднія два выраженія лишь немногимъ отличаются другъ отъ друга.

За единицу времени мы до сихъ поръ принимали годъ, а слѣдовательно, предполагали, что процентныя деньги причисляются къ капиталу всегда по истеченіи одного года. Формулы (I) и (II) все же останутся справедливыми, если принять за единицу какой-либо другой промежутокъ времени, напр. $\frac{1}{s}$ года. Конечно, тогда n, ν и ν' будутъ означать число $\frac{1}{s}$ долей года и, соотвѣтственно этому, p—процентныя деньги со 100 за новую единицу времени. Если желать и теперь, какъ это обычно бываетъ, понимать подъ p процентныя деньги со 100 въ одинъ годъ, то придется въ (I) и во (II) замѣнить p черезъ $\frac{p}{s}$, слѣдовательно, (I) приметъ видъ:

$$k_n = k_0\left(1 + \frac{p}{s \cdot 100}\right)^n.$$

Если теперь вмѣсто n снова ввести число N цѣлыхъ лѣтъ, пользуясь сооотношеніемъ

$$n = s \cdot N,$$

то

$$\text{(Ia)} \qquad k_n = k_0\left(1 + \frac{p}{s \cdot 100}\right)^{s \cdot N}$$

представитъ изъ себя сумму, въ которую обратится долгъ k_0 въ концѣ N-го года, если годовая процентная такса есть $p^0/_0$ и процентныя деньги присчитываются къ капиталу въ концѣ каждой $\frac{1}{s}$ года.

При

$$\frac{s \cdot 100}{p} = x, \text{ слѣдовательно, при } s = \frac{px}{100}$$

получаемъ

$$k_n = k_0\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{Npx}{100}}$$

или

$$k_n = k_0\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{Np}{100}}.$$

Если придать s значеніе $100p$ (т.-е. положить, что при $p = 4^0/_0$, процентныя деньги причисляются къ капиталу послѣ каждой $\frac{1}{400}$ года, т.-е. приблизительно ежедневно), то

$$x = 10^4 \text{ и } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

явится основаніемъ $g = 2{,}718\,145\,9$ логариомовъ Bürgi [1]), слѣдовательно,

$$\frac{k_n}{k_0} = g^{\frac{Np}{100}}$$

есть число, логариомъ Bürgi котораго равенъ $\frac{Np}{100}$ [2]).

С. Ренты.

Начнемъ съ задачи: капиталъ k_0 отданъ взаймы по p сложныхъ % съ тѣмъ условіемъ, чтобы процентныя деньги причислялись къ капиталу въ концѣ каждаго года. Начиная съ m-го года (m равно 0 или какому-либо положительному цѣлому числу) въ концѣ каждаго года прикладываютъ къ капиталу по r марокъ (или вынимаютъ). Опредѣлить, какъ великъ будетъ капиталъ послѣ n взносовъ (выдачъ) по r марокъ, т.-е. въ концѣ $(m+n-1)$-го года?

Рѣшеніе: Къ концу m-го года капиталъ возросъ до

$$k_m = k_0 q^m \pm r,$$

гдѣ вмѣсто процентнаго множителя $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ введено для краткости q.

Въ концѣ $(m+1)$-го года будемъ имѣть:

$$k_{m+1} = k_0 q^{m+1} \pm rq \pm r,$$

въ концѣ $(m+2)$-го года:

$$k_{m+2} = k_0 q^{m+2} \pm rq^2 \pm rq \pm r$$

---

1) Ср. § 5 A, стр. 261.

2) Если x, неограниченно возрастаетъ, что имѣетъ мѣсто при безконечно большомъ значеніи s, слѣдовательно, процентныя деньги причисляются къ капиталу черезъ все меньшіе промежутки времени, то значеніе выраженія $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, какъ это указывается въ анализѣ и было уже упомянуто въ § 5 A, стр. 261, приближается къ опредѣленному предѣльному значенію $e = 2{,}718281828459\ \ldots$. При такомъ предположеніи $\frac{k_n}{k_0} = e^{\frac{Np}{100}}$ и является числомъ, натуральный логариомъ котораго имѣетъ значеніе $\frac{Np}{100}$. (Яковъ Бернулли, Acta Eruditorum, Май 1690, ср. Cantor III, стр. 55).

и т. д., и, наконецъ, въ концѣ $(m+n-1)$-го года:

$$k_{m+n-1}=k_0q^{m+n-1}\pm rq^{n-1}\pm rq^{n-2}\pm\cdots\pm rq\pm r$$

или:

$$\text{(III)}\qquad k_{m+n-1}=k_0q^{m+n-1}\pm r\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

(см. гл. I, § 7 D, добавленіе стр. 32).

Особый интересъ представляетъ тотъ случай, когда послѣ n — кратнаго выниманія по r марокъ исчерпывается весь капиталъ, т.-е.,

$$k_{m+n-1}=0$$

или

$$\text{(IV)}\qquad \boldsymbol{k_0q^{m+n-1}=r\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если A дастъ B сумму денегъ въ k_0 марокъ на какое-либо время и если B уплатитъ n разъ по r марокъ, дѣлая взносы въ концѣ каждаго года, начиная съ m-го послѣ момента ея полученія, то при процентной таксѣ въ p процентовъ взносы обѣихъ сторонъ окажутся совершенно тождественными въ томъ случаѣ, если между k_0, r, m, n и $q=1+\frac{p}{100}$ будетъ существовать соотношеніе (IV). Такого рода соотношеніе имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, если какое-либо частное лицо (A) вноситъ въ страховое общество (B) нѣкоторую сумму k_0, чтобы затѣмъ въ теченіе ряда лѣтъ пользоваться нѣкоторой „рентой“ (r) или если какая-либо общественная организація погашаетъ ежегодными уплатами (r) сдѣланный заемъ (k_0), или, какъ говорятъ, „амортизируетъ“ его.

Поэтому уравненіе (IV) называется также уравненіемъ ренты или амортизаціи. Оно впервые было установлено Эйлеромъ въ его „Introductio in analysin infinitorum“ 1748, т. I, гл. 6.

(IV) разрѣшается непосредственно относительно k_0 (стоимость ренты) или относительно r (рента или ежегодная уплата). Имѣемъ:

$$k_0=\frac{r\cdot(q^n-1)}{q^{m+n-1}\cdot(q-1)}$$

и

$$r=\frac{k_0q^{m+n-1}\cdot(q-1)}{q^n-1}.$$

Такъ какъ, вообще говоря, правая часть послѣдняго равенства не есть круглое число, то при установленіи плана амортизаціи сдѣланнаго займа, значеніемъ для r, полученнымъ изъ послѣднаго равенства, пользуются какъ среднимъ, для установленія ежегодной уплаты, которая обычно берется кратной 100 маркамъ.

Чтобы рѣшить уравненіе (IV) относительно n, опредѣляютъ прежде всего

$$q^n = \frac{r}{r - k_0 q^{m-1}(q-1)}$$

и логариѳмированіемъ находятъ:

$$n = \frac{\log r - \log [r - kq^{m-1}(q-1)]}{\log q}.$$

Если частное правой части не есть цѣлое число, а заключено между цѣлыми числами ν и $\nu + 1$, то результатъ указываетъ, что рента можетъ выплачиваться ν разъ, и послѣ ν-той уплаты останется нѣкоторая сумма (см. равенство (III))

$$k_0 q^{m+\nu-1} - r \cdot \frac{q^\nu - 1}{q-1},$$

q кратное которой не достигаетъ значенія r.

Рѣшеніе уравненія (IV) относительно q, т.-е вычисленіе процентной таксы p, которое на практикѣ, во всякомъ случаѣ, врядъ ли когда требуется, вообще говоря, возможно лишь при помощи методовъ послѣдовательныхъ приближеній, о которыхъ намъ здѣсь нѣтъ надобности говорить.

Если рента должна выплачиваться не ежегодно, а, скажемъ, по четвертямъ года или ежемѣсячно и т. п., то и при такомъ предположеніи равенства (III) и (IV) остаются справедливыми въ томъ случаѣ, если процентныя деньги всегда присоединяются къ капиталу черезъ такіе же промежутки времени. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ замѣнить p процентными деньгами со 100 марокъ за срокъ, принятый теперь за единицу времени и подъ m и n понимать число новыхъ единицъ времени.

Особеннаго вниманія заслуживаетъ тотъ случай, когда процентныя деньги, хотя и причисляются къ капиталу ежегодно, какъ и ранѣе, но рента выдается въ другіе сроки, напр., по истеченіи каждой $\frac{1}{s}$ года. Эта задача сейчасъ же сведется къ предыдущей, какъ только мы установимъ, какая рента r, выплачиваемая въ концѣ года, равноцѣнна рентѣ ρ срокомъ въ концѣ или въ началѣ каждой $\frac{1}{s}$ года.

ρ марокъ, выплачиваемыя въ концѣ первой $\frac{1}{s}$ года равноцѣнны.

$$\rho + \frac{p\rho(s-1)}{100s}$$

маркамъ въ концѣ года, ρ марокъ, выплачиваемыя въ концѣ второй $\frac{1}{s}$ года равноцѣнны

$$\rho + \frac{p\rho(s-2)}{100s}$$

маркамъ въ концѣ года и т. д.

Слѣдовательно, s — кратный платежъ въ концѣ каждой $\frac{1}{s}$ года по ρ марокъ равносиленъ единовременной уплатѣ r_1 марокъ въ концѣ года, гдѣ

$$\begin{aligned} r_1 &= s\rho + \frac{p\rho}{100s}\cdot[(s-1)+(s-2)+\cdots+2+1] \\ &= s\rho + \frac{p\rho(s-1)}{200}. \end{aligned}$$

Точно также получаемъ, что s — кратный платежъ въ началѣ каждой $\frac{1}{s}$ года по ρ марокъ равносиленъ единовременной уплатѣ въ r_2 марокъ въ концѣ года, гдѣ

$$\begin{aligned} r_2 &= s\rho + \frac{p\rho}{100s}[s+(s-1)+\cdots+2+1] \\ &= s\rho + \frac{p\rho(s+1)}{200}. \end{aligned}$$

Только что вычисленныя значенія для r_1 и r_2 остается подставить вмѣсто r въ равенство (IV).

Дальнѣйшія примѣненія вычисленія процентовъ и рентъ можно найти у M. Cantor'a, Politische Arithmetik, 2 изд., Лейпцигъ 1903.

§ 7. Вычисленіе вѣроятностей.

A. Историческія замѣчанія.

Вычисленіе вѣроятностей ведетъ свое начало отъ математическаго изслѣдованія азартныхъ игръ, игры въ кости и въ карты и выниманія шаровъ различной окраски изъ урнъ и т. д. [1]).

Первое наблюденіе вѣроятностей при игрѣ въ кости мы находимъ уже у Кардана и Галилея. Собственно основателями вычисленія вѣроятностей считаютъ Паскаля и Фермата (середина XVII вѣка). Дальнѣйшее развитіе этой теоріи является заслугой Гюйгенса, Лейбница, Якова Бернулли, Муавра, Стирлинга, Бейеса, Лапласа, Пуассона. Какимъ именно успѣхомъ обязано вычисленіе вѣроятностей каждому изъ этихъ лицъ, мы коротко будемъ указывать въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ. Изъ позднѣйшихъ руководствъ назовемъ: J. Bertrand. Calcul des probabilités, Парижъ 1889; H. Poincaré, Leçons sur le calcul des probabilités, Парижъ 1896; E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, II изд., Лейпцигъ 1908; H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre, Лейпцигъ 1906; E. Borel, Eléments de la théorie des probabilités, Парижъ 1909. Философскія основы вычисленія вѣроятностей изслѣдовали, главнымъ образомъ, J. v. Kries въ сочиненіи „Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, Фрейбургъ 1886 и C. Stumpf въ рефератѣ „Ueber den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit“, Sitzungsbericteh der Philosophischen Klasse der Bayrischen Akademie, 1892.

---

[1]) Если въ настоящее время вся важность теоріи вѣроятности не основывается цѣликомъ или, главнымъ образомъ, на ея примѣненіи къ азартнымъ играмъ, мы въ нашемъ изложеніи все-таки преимущественно будемъ пользоваться азартными играми для разъясненія этой теоріи, такъ какъ въ нихъ проще всего учесть всѣ обстоятельства, и поэтому онѣ оказываются болѣе доступными для математической обработки, и такъ какъ болѣе сложныя задачи теорію вѣроятности, заимствуемыя изъ практической жизни (напр., задачи статистики, страхового дѣла и т. д.), изъ теоретической физики, обычно стараются свести, пользуясь условіями, заимствованными изъ опыта, на задачи азартныхъ игръ.

B. Опредѣленіе вѣроятности и простыя задачи.

Часто бываетъ, что мы, въ силу состоянія нашихъ знаній и освѣдомленности, не можемъ съ увѣренностью указать слѣдствій, являющихся результатомъ совокупности состояній и дѣйствій, а можемъ только утверждать, что при данныхъ условіяхъ можетъ произойти событіе E_1 или событіе E_2, и т. д. или событіе E_m. Для примѣра возьмемъ игральную кость, т.-е. сдѣланный изъ однороднаго матеріала кубъ, грани котораго помѣчены числами отъ 1 до 6; бросимъ ее кверху и дадимъ ей упасть; зная сообщенный этому кубу импульсъ, мы тѣмъ не менѣе не въ состояніи опредѣлить его дальнѣйшаго движенія; слѣдовательно, не можемъ точно сказать, которая изъ его граней окажется сверху при паденіи; мы знаемъ только, что это можетъ быть или 1, или 2 и т. д., или 6. Намъ неизвѣстны настолько точно ни физическая организація какого-либо человѣка, ни внѣшнія причины, вліяющія на него, чтобы мы заранѣе могли рѣшить вопросъ, будетъ ли онъ еще живъ, спустя годъ: мы только и можемъ сказать, что, спустя годъ, онъ либо будетъ живъ, либо уже умретъ.

Если m предположеній (т. н. статочностей) по отношенію къ долженствующему произойти событію, являющемуся результатомъ совокупности всѣхъ данныхъ условій, оказываются для насъ равновозможными, но изъ нихъ только g $(g<m)$ благопріятствуютъ интересующему насъ событію, то правильную дробь $w=\frac{g}{m}$ мы разсматриваемъ, какъ мѣру вѣроятности осуществленія этого событія, и кратко называемъ $\frac{g}{m}$ — математической вѣроятностью ожидаемаго событія. Если нашему событію не благопріятствуетъ ни одна статочность, слѣдовательно, $g=0$, то $w=0$; если каждая изъ возможныхъ статочностей благопріятна, слѣдовательно, $g=m$, то $w=1$. Въ этихъ предѣльныхъ случаяхъ вѣроятность становится достовѣрностью. Статочностей, благопріятствующихъ тому, что данное событіе не произойдетъ, оказывается $m-g$, слѣдовательно, вѣроятность того, что данное событіе не произойдетъ

$$v=\frac{m-g}{m}=1-\frac{g}{m}=1-w.$$

Главное затрудненіе въ примѣненіи даннаго опредѣленія вѣроятности заключается въ рѣшеніи вопроса, можно ли тѣ или другія статочности разсматривать какъ равновозможныя или нельзя. Если въ вышеприведенномъ примѣрѣ мы имѣемъ дѣло съ однороднымъ математически точно построеннымъ кубомъ, и если при игрѣ устранить преимущества какой-либо одной грани, то появленіе каждаго изъ чиселъ 1, 2, ⋯, 6 можно разсматривать, какъ одинаково возможное, и поэтому дробь $\frac{1}{6}$ принять за математическую вѣроятность появленія числа, напр., 3. Не такъ просто положеніе вещей во второмъ примѣрѣ; если въ силу указаннаго незнанія допустить, какъ равновозможное, то, что по истеченіи года данное лицо будетъ живо или уже умретъ, то значеніе вѣроятности оказалось бы равнымъ $\frac{1}{2}$. Этому, полученному на основаніи столь неудовлетворительныхъ свѣдѣній, результату нельзя было бы все-таки придавать практическаго значенія [1]). Но даже въ такихъ задачахъ, гдѣ при всей строгости изслѣдованія не могло быть сомнѣнія въ равновозможности статочностей, не разъ встрѣчались ошибки. Мы приведемъ два примѣра изъ литературы, не только ради ихъ историческаго интереса, но, главнымъ образомъ, потому, что начинающіе постоянно обречены на повтореніе подобнаго рода ошибочныхъ заключеній.

I. Одинъ изъ друзей высказалъ Галилею свое удивленіе по поводу того, что при игрѣ съ тремя костями сумма 10 появляется чаще, чѣмъ сумма 9, несмотря на то, что по его мнѣнію, число благопріятствующихъ равновозможныхъ статочностей для обѣихъ суммъ одинаково. Благопріятствующими для суммы 9 другъ считалъ слѣдующія 6 комбинацій:

---

[1]) Мы упомянемъ лишь вкратцѣ, не входя въ подробности, что по отношенію къ опредѣленію равновозможности статочностей существуютъ двѣ противоположныя точки зрѣнія. Одна точка зрѣнія, представителемъ которой является, главнымъ образомъ, I. v. Kries, требуетъ наличности понуждающей причины, чтобы назвать статочности равновозможными; другая, представителемъ которой является, главнымъ образомъ, Stumpf, довольствуется одинаковымъ, т.-е. абсолютнымъ незнаніемъ отдѣльныхъ статочностей. Если про одну изъ урнъ извѣстно лишь, что она содержитъ бѣлые и черные шары, но неизвѣстно въ какомъ числѣ, то съ послѣдней точки зрѣнія вѣроятность вынуть бѣлый шаръ есть $\frac{1}{2}$, между тѣмъ какъ съ первой точки зрѣнія вѣроятность вообще нельзя вычислить. На практикѣ прибѣгаютъ, повидимому, къ средней точкѣ зрѣнія. Использованія всѣхъ свѣдѣній, какими мы располагаемъ при рѣшенія вопроса о вѣроятности, также требуетъ и Stumpf.

1 2 6,
1 3 5,
1 4 4,
2 2 5,
2 3 4,
3 3 3,

а для суммы 10, слѣдующія шесть:

1 3 6,
1 4 5,
2 2 6,
2 3 5,
2 4 4,
3 3 4.

Въ своей „Considerazione sopra in giuoco dei dadi“ Галилей указываетъ на то, что эти комбинаціи не всѣ слѣдуетъ разсматривать, какъ равновозможныя, а, наоборотъ: напримѣръ, комбинація 1, 2, 6 можетъ быть осуществлена $3! = 6$ различными способами, въ чемъ можно убѣдиться, отличая кубики другъ отъ друга (напр. окраской); комбинацію 1, 4, 4 можно осуществить только тремя различными способами и 3, 3, 3 только — однимъ.

При правильной оцѣнкѣ равновозможныхъ благопріятствующихъ суммѣ 9 статочностей получимъ 25 благопріятствующихъ равновозможныхъ комбинацій, суммѣ же десять—27. Такъ какъ число всѣхъ возможныхъ при трехъ костяхъ комбинацій равно $6^3 = 216$, то вѣроятность выкинуть 9 при трехъ костяхъ будетъ $\frac{25}{216}$; а вѣроятность выкинуть 10 — $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

II. D'Alembert утверждалъ, что если монету бросить два раза кверху и дать упасть, то вѣроятность появленія рѣшки, по крайней мѣрѣ одинъ разъ, равна $\frac{2}{3}$. Онъ строитъ заключеніе именно такъ: или при первомъ бросаніи вскроется рѣшка и тогда игра окончена; или сперва вскроется орелъ, затѣмъ рѣшка, или, наконецъ, оба раза орелъ. Слѣдовательно, всего возможны 3 статочности и между ними 2 благопріятствующихъ, а слѣдовательно, вѣроятность равна $\frac{2}{3}$; это заключеніе невѣрно. Равновозможными, наоборотъ (какъ это легко усмотрѣть, бросая сразу 2 монеты вмѣсто одной), надо разсматривать 4 комбинаціи: рѣшка, рѣшка; рѣшка, орелъ; орелъ, рѣшка; орелъ, орелъ; три изъ нихъ благопріятны, слѣдовательно, искомая вѣроятность равна $\frac{3}{4}$ [1].

Если вопросъ о равновозможности статочностей разрѣшенъ, то рѣшеніе задачи на вѣроятность сводится къ простому подсчету благопріятныхъ и возможныхъ статочностей. Этотъ подсчетъ часто облегчается съ помощью комбинаторики. Этимъ и объясняется то обстоятельство, что обѣ эти дисциплины въ своемъ развитіи шли рука объ руку. Мы коснемся по существу вычисленія вѣроятностей лишь по стольку, по скольку она является однимъ изъ важнѣйшихъ и интереснѣйшихъ примѣненій комбинаторики. Изъ простыхъ, рѣшаемыхъ при помощи формулъ комбинаторики, задачъ на вычисленіе вѣроятности мы разсмотримъ только еще одинъ примѣръ:

Урна содержитъ a бѣлыхъ и b черныхъ шаровъ. Вынимаютъ изъ нея k шаровъ. Какъ велика вѣроятность того, что изъ нихъ α бѣлыхъ и β черныхъ?

$$(\alpha+\beta=k,\ \alpha<a,\ \beta<b).$$

Рѣшеніе: Изъ множества $(a+b)$ шаровъ можно вынуть k шаровъ столькими способами, сколько можно образовать сочетаній k-го класса безъ повтореній изъ $(a+b)$ элементовъ, т.-е. $m=\binom{a+b}{k}$; группъ съ α бѣлыхъ шаровъ будетъ $\binom{a}{\alpha}$, группъ съ β черныхъ шаровъ будетъ $\binom{b}{\beta}$. Такъ какъ каждая комбинація одной группы перваго рода съ одной группой второго рода благопріятна для нашей цѣли, то

$$g=\binom{a}{\alpha}\cdot\binom{b}{\beta},\ \text{слѣдовательно,}\ w=\frac{\binom{a}{\alpha}\cdot\binom{b}{\beta}}{\binom{a+b}{\alpha+\beta}}.$$

C. Сложныя задачи на вычисленіе вѣроятности.

При рѣшеніи многочисленныхъ, отчасти весьма сложныхъ, задачъ получился рядъ правилъ, которыя Лапласъ въ своей „Théorie analytique des probabilités" (Парижъ 1812) свелъ къ не-

[1] Къ этой задачѣ мы еще не разъ вернемся.

многимъ опредѣленнымъ принципамъ, которые постоянно приходится примѣнять. Наиболѣе важны двѣ теоремы.

I. Теорема о полной или „тотальной“ вѣроятности, или вѣроятности „либо-либо“ („Entweder oder“) (теорема сложенія).

Если событіе можетъ осуществиться въ n различныхъ несовмѣстимыхъ видахъ $E_1, E_2, \cdots, E_n$, которымъ соотвѣтствуютъ вѣроятности $w_1, w_2, \cdots, w_n$, то вѣроятность w появленія событія E равна суммѣ $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ [1]).

Доказательство: g статочностей, благопріятствующихъ событію E, распадаются на n группъ, а именно: на группу изъ g_1 статочностей, благопріятныхъ E_1, на группу изъ g_2 — статочностей, благопріятныхъ E_2, и т. д. и, наконецъ, на группу изъ g_n статочностей, благопріятствующихъ E_n. Слѣдовательно, если число равновозможныхъ статочностей, опредѣляемыхъ данной совокупностью условій, есть m, то имѣемъ

$$w = \frac{g}{m} = \frac{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \cdots + \frac{g_n}{m} = w_1 + w_2 + \cdots + w_n.$$

Примѣръ: Какъ велика вѣроятность получить при бросаніи тремя костями болѣе 12 очковъ?

Рѣшеніе: Желаемое событіе тогда можно считать совершившимся, если появится либо сумма 13 (для нея вѣроятность пусть будетъ w_{13}) либо сумма 14 (вѣроятность w_{14}) и т. д. или сумма 18 (вѣроятность w_{18}). Изъ этихъ событій при одномъ бросаніи два не могутъ произойти одновременно; слѣдовательно, мы можемъ примѣнить только что доказанную теорему I и находимъ искомую вѣроятность:

$$w = w_{13} + w_{14} + \cdots + w_{18}.$$

Простой подсчетъ благопріятныхъ статочностей (ср. задачу Галилея въ B, стр. 298) даетъ:

$$w_{13} = \frac{21}{216},\ w_{14} = \frac{15}{216},\ w_{15} = \frac{10}{216},\ w_{16} = \frac{6}{216},\ w_{17} = \frac{3}{216},\ w_{18} = \frac{1}{216},$$

слѣдовательно:

$$w = \frac{56}{216} = \frac{7}{27}.$$

1) Лапласъ разсматриваетъ E_1, $E_2 \ldots E_n$ какъ неравноможныя статочности благопріятствующія добытію E.

II. Теорема о „сложной" вѣроятности или вѣроятности „такъ же, какъ и" (Sowohl als auch) (теорема умноженія).

Пусть событіе E осуществляется, если произойдетъ каждое изъ событій $E_1, E_2, \cdots, E_n$, при чемъ безразлично, происходятъ ли эти n событій одновременно или другъ за другомъ. Но, конечно, будетъ разница, являются ли событія $E_1, E_2, \cdots, E_n$ независимыми другъ отъ друга или осуществленіе одного изъ событій имѣетъ вліяніе на вѣроятность другого.

a) Вѣроятность w совпаденія нѣсколькихъ независящихъ другъ отъ друга событій $E_1, E_2, \cdots, E_n$, равна произведенію $w_1 \cdot w_2 \cdots w_n$ вѣроятностей этихъ n событій.

Доказательство: Пусть для событія E_ν число всевозможныхъ статочностей m_ν, статочностей благопріятствующихъ g_ν ($\nu = 1, 2, \cdots n$). Такъ какъ общее число сочетаній какой либо статочности событія E_1, съ какой либо статочностью E_2 и т. д., съ какой либо статочностью E_n, даетъ всѣ m статочностей для E, то имѣемъ:

$$m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n.$$

Тѣ же соображенія даютъ число статочностей, благопріятствующихъ событію E,

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_n,$$

слѣдовательно,

$$w = \frac{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}{m_1 \cdot m_2 \cdots m_n} = w_1 \cdot w_2 \cdots w_n.$$

Примѣръ: Въ одной урнѣ находится a шаровъ, изъ нихъ α бѣлыхъ; въ другой урнѣ — b шаровъ, изъ нихъ β бѣлыхъ. Изъ каждой урны вынимаютъ по одному шару. Слѣдовательно, вѣроятность того, что оба вынутые шара окажутся бѣлыми, будетъ $\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b}$. Безразлично, будутъ ли оба шара вынуты одновременно или другъ за другомъ.

Слѣдствіе. Если всѣ событія являются слѣдствіемъ одной и той же совокупности статочностей, а слѣдовательно, и $m_1 = m_2 = \cdots = m_n$, то само собой понятно, что событія могутъ слѣдовать только другъ за другомъ. Примѣромъ для этого можетъ служить требованіе бросить однѣми и тѣми же тремя костями сперва 13, затѣмъ 14 и 15. Вѣроятность появленія этихъ событій въ указанной послѣдовательности есть

$$w = w_{13} \cdot w_{14} \cdot w_{15} = \frac{221}{216} \cdot \frac{15}{216} \cdot \frac{10}{216} = \frac{179}{559872}.$$

Возьмемъ еще болѣе частный случай: а именно, подъ E_1, $E_2, \cdots, E_n$, будемъ разумѣть одно и то же событіе; тогда $w_1 = w_2 = \cdots = w_n$. Слѣдовательно, вѣроятность n—кратнаго осуществленія одного и того же событія будетъ $w = w_1{}^n$; слѣдовательно, вѣроятность бросить 13 три раза подрядъ однѣми и тѣми же костями будетъ $w = \left(\frac{21}{216}\right)^3 = \left(\frac{7}{72}\right)^3 = \frac{343}{373248}$.

Если w означаетъ вѣроятность осуществленія нѣкотораго событія при одномъ опытѣ, а слѣдовательно, $(1 - w)$ есть вѣроятность того, что событіе не произойдетъ, то $(1 - w)^n$ есть вѣроятность того, что данное событіе не произойдетъ при n опытахъ, поэтому $w' = 1 - (1 - w)^n$ есть вѣроятность осуществленія этого событія при n опытахъ, хотя бы одинъ разъ. На основаніи этихъ соображеній находимъ въ задачѣ д'Аламбера (В. прим. II, стр. 299), что вѣроятность появленія рѣшки, хотя бы одинъ разъ, при двукратномъ бросаніи монеты,

$$w' = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Изъ равенства $w' = 1 - (1 - w)^n$ при данномъ w легко опредѣлить наименьшее значеніе, которое должно имѣть n, чтобы w' оказалось не менѣе напередъ заданной правильной дроби. Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ:

$$(1 - w)^n = 1 - w',$$

и для n слѣдуетъ выбрать наименьшее цѣлое число, которое

$$\geqq \frac{\log(1 - w')}{\log(1 - w)}.$$

Примѣръ: Сколько разъ надо бросить кость, чтобы вѣроятность появленія шести, хотя бы одинъ разъ, была больше чѣмъ $\frac{1}{2}$?

Рѣшеніе: Такъ какъ

$$w = \frac{1}{6}, \quad w' = \frac{1}{2},$$

то для n слѣдуетъ выбрать наименьшее цѣлое число, которое больше чѣмъ

$$\frac{\log\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\log\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{5}{6}} = \frac{\log 2}{\log 6 - \log 5} = \frac{0{,}30103}{0{,}07918};$$

т.-е. $n=4$. Дѣйствительно, для этого значенія n имѣемъ:

$$w'=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}=0{,}518.$$

b) Пусть событія $E_1, E_2, \cdots, E_n$ не независимы другъ отъ друга; напротивъ, пусть появленіе E_1 вліяетъ на вѣроятность E_2, появленіе E_1 и E_2 — на вѣроятность E_3 и т. д. Разсужденія и выводъ:

$$w=w_1\cdot w_2\cdots w_n$$

для вѣроятности совпаденія n этихъ событій, останутся тѣ же, что и въ a); только теперь подъ w_2 слѣдуетъ понимать вѣроятность осуществленія E_2 послѣ осуществленія E_1, подъ w_3 — вѣроятность осуществленія E_3 послѣ осуществленія событій E_1 и E_2 и т. д.

Примѣръ: Какъ велика вѣроятность вынуть два раза подрядъ короля изъ колоды въ 32 карты, если впередъ вынутая карта не кладется обратно въ колоду?

Рѣшеніе: Вѣроятность вынуть одного изъ королей въ первый разъ равна

$$w_1=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}.$$

Если же одинъ изъ королей вынутъ, то въ колодѣ остается 31 карта и среди нихъ только 3 короля; слѣдовательно, вѣроятность E_2, послѣ осуществленія E_1, есть $w_2=\frac{3}{31}$; поэтому искомая сложная вѣроятность имѣетъ значеніе:

$$w=w_1\cdot w_2=\frac{4\cdot 3}{32\cdot 31}=\frac{3}{248}.$$

Въ справедливости этого результата можно, впрочемъ, убѣдиться еще и другимъ путемъ. Если вынуть обѣ карты изъ колоды не другъ за другомъ, а одновременно, то число равновозможныхъ статочностей $m=\binom{32}{2}$, число статочностей благопріятствующихъ поставленной цѣли $g=\binom{4}{2}$, слѣдовательно,

$$w=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}}=\frac{4\cdot 3}{32\cdot 31}=\frac{3}{248},$$

какъ и выше.

III. Для теоремъ, доказанныхъ въ (I) и во (II), а также и для нѣсколько болѣе общей теоремы Пуанкаре (Leçons sur le calcul des probabilités, Deuxième Leçon) далъ новый изящный выводъ, дающій возможность разсматривать эти теоремы, какъ тождества. Ходъ разсужденій у Пуанкаре приблизительно слѣдующій:

Пусть A и B любыя два событія. Пусть

A и B осуществляются при α различныхъ статочностяхъ,
A осуществляется, а B нѣтъ „ β „ „ ,
A не осуществляется,
а B осуществляется „ γ „ „ ;
ни A, ни B не осуществляются „ δ „ „ .

Всѣ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ статочностей предполагаются равновозможными. Непосредственно видно, что вѣроятность:

осуществленія A есть $w_1=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$,

„ B „ $w_2=\dfrac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$,

„ по крайней мѣрѣ одного изъ событій A и B

$$w_3=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},$$

„ и A и B $w_4=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$,

„ A, если B уже осуществилось,

$$w_5=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma},$$

„ A, если B не осуществилось,

$$w_6=\frac{\alpha}{\beta+\delta},$$

„ B, если A уже осуществилось,

$$w_7=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

„ B, если A не осуществилось,

$$w_8=\frac{\gamma}{\gamma+\delta}.$$

Теперь имѣемъ тождественно:

$$w_1+w_2=w_3+w_4,$$

или

$$w_3=w_1+w_2-w_4$$

т.-е. вѣроятность того, что изъ двухъ произвольныхъ событій осуществится по крайней мѣрѣ одно, равна суммѣ вѣроятностей осуществленія перваго и осуществленія второго событія, уменьшенной на вѣроятность того, что осуществятся, какъ одно, такъ и другое. Въ силу этого вѣроятность появленія хотя бы одинъ разъ рѣшки при двукратномъ бросаніи одной монеты, а также и при бросаніи двухъ монетъ

$$w_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Если въ частномъ случаѣ $w_4 = 0$, т.-е. оба событія одновременно произойти не могутъ, то

$$w_3 = w_1 + w_2.$$

Въ этомъ равенствѣ заключается теорема (I) о полной вѣроятности для частнаго случая $n = 2$. Непосредственной подстановкой значеній получаемъ:

$$w_4 = w_2 \cdot w_5$$

и

$$w_4 = w_1 \cdot w_7.$$

Эти равенства содержатъ теорему II, b) о сложной вѣроятности двухъ другъ отъ друга зависящихъ событій.

Если между числами α, β, γ, δ существуетъ соотношеніе

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma},$$

то, положивъ общее значеніе этихъ дробей равнымъ ν, слѣдовательно, $\beta = \nu\alpha$ и $\delta = \nu\gamma$, подстановкой этихъ значеній въ выраженія w_1, w_2, w_5, w_6, w_7, w_8, сейчасъ же находимъ

$$\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} = w_1 = w_5 = w_6,$$

$$\frac{1}{\nu + 1} = w_2 = w_7 = w_8;$$

а это значитъ, что вѣроятность осуществленія событія B одинакова, — безразлично, будетъ ли извѣстно, что событіе A осуществилось или извѣстно, что оно не осуществлялось. Слѣдовательно, при данномъ условіи вѣроятность событія B не зависитъ отъ того, осуществилось ли или не осуществилось A, а вѣроятность событія A не зависитъ отъ того, осуществилось ли или нѣтъ событіе B, и въ этомъ случаѣ получаемъ

$$w_4 = w_1 \cdot w_2,$$

т.-е. теорема о сложной вѣроятности, выведенная во II, а), справедливая для событій другъ отъ друга независимыхъ.

IV. **Примѣры.** Теоремы о полной и о сложной вѣроятности служатъ для рѣшенія болѣе сложныхъ задачъ; примѣненіе этихъ теоремъ весьма часто требуетъ большой осмотрительности.

1. Неоднократно разсмотрѣнную задачу д'Аламбера о монетахъ: „Какъ велика вѣроятность добиться появленія рѣшки, хотя бы одинъ разъ, при двукратномъ бросаніи одной монеты?", мы можемъ теперь рѣшить и слѣдующимъ образомъ: цѣль будетъ достигнута, если при первомъ бросаніи появится рѣшка $\left(\text{вѣроятность } \frac{1}{2}\right)$, или если при первомъ бросаніи орелъ, а при второмъ рѣшка $\left(\text{сложная вѣроятность } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\right)$. По теоремѣ о полной вѣроятности, искомая вѣроятность будетъ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2. Пусть урна A содержитъ a шаровъ и между ними α бѣлыхъ; вторая B—b шаровъ и между ними β бѣлыхъ. Какъ велика вѣроятность вынуть наугадъ изъ той или изъ другой урны бѣлый шаръ?

Рѣшеніе: Вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ A есть $\frac{\alpha}{a}$, — вынуть бѣлый шаръ изъ B есть $\frac{\beta}{b}$; искомая вѣроятность не можетъ равняться, скажемъ, суммѣ $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}$, которая при опредѣленныхъ значеніяхъ a, b, α, β могла бы оказаться и больше 1. Напротивъ, слѣдуетъ имѣть въ виду, что вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ A есть сложное событіе; вѣроятность выбрать урну A равна $\frac{1}{2}$ и вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ A равна $\frac{\alpha}{a}$, слѣдовательно, сложная вѣроятность есть $\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a}$; подобнымъ же образомъ для вѣроятности выбрать урну B и изъ нея вынуть бѣлый шаръ получимъ произведеніе $\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{b}$. Тогда, на основаніи теоремы о полной вѣроятности, для искомой въ этой задачѣ вѣроятности w получимъ сумму $\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{b}$. Если вообразить всѣ $(a+b)$ шаровъ соединенными въ одной урнѣ C, то вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ C будетъ $w' = \frac{\alpha + \beta}{a + b}$. Вообще говоря, т.-е. при любыхъ значеніяхъ a, α, b, β, вѣроятности w и w' не совпадаютъ. Причина этого различія заключается въ томъ, что пока шары распредѣлены въ двухъ урнахъ A и B, одинаково вѣроятно, независимо отъ значеній a и b, вынуть шаръ изъ урны A или изъ урны B. При соединеніи шаровъ въ одну урну вѣроятность вынуть одинъ изъ A шаровъ равна $\frac{a}{a+b}$; вѣроятность того, что вынутый A-шаръ (т.-е. бывшій ранѣе въ A) окажется бѣлымъ будетъ $\frac{\alpha}{a}$, слѣдовательно, сложная вѣроятность вынуть A-шаръ бѣлой краски равна $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{\alpha}{a}$. Также получится произведеніе $\frac{b}{a+b} \cdot \frac{\beta}{b}$ для вѣроятности вынуть B-шаръ бѣлаго цвѣта и, наконецъ, для w', вѣроятности вынуть бѣлый A-шаръ или B-шаръ, на основаніи теоремы С, I, получимъ сумму $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{\alpha}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{\beta}{b} = \frac{\alpha + \beta}{a + b}$. Легко видѣть, что для частнаго случая, когда $a = b$ и $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$, обѣ вѣроятности w и w' равны другъ другу.

3. Изъ задачъ на вычисленіе вѣроятностей мы упомянемъ, ради историческаго интереса, лишь объ одной разобранной не разъ въ литературѣ, а именно о задачѣ „безобиднаго раздѣла ставки между игроками“ (по нѣмецки „Teilungsproblem“, по французски „problème des partis“ и по англійски: „problem of points“), которой обязана своимъ происхожденіемъ теорія вѣроятностей. Одинъ не математикъ де Мере предложилъ Паскалю слѣдующую задачу: „Изъ двухъ игроковъ, искусство кокорыхъ предполагаемъ одинаковымъ, всю ставку долженъ получить первый выигравшій заранѣе условленное число (n) партій. По какой либо причинѣ они прекращаютъ игру послѣ того, какъ одинъ выигралъ ($n - \alpha$), а другой ($n - \beta$) партій. Какъ теперь раздѣлить ставку?“ Паскаль и Ферматъ рѣшили эту задачу различными способами, по крайней мѣрѣ для частныхъ значеній α, β, и, такимъ образомъ, явились основателями вычисленія вѣроятностей. Позднѣе той же задачей занимались Гюйгенсъ и Яковъ Бернулли; de-Moivre нѣсколько обобщилъ ее, а Montfort (1708) впервые рѣшилъ ее въ общемъ видѣ. Лагранжъ и Лапласъ воспользовались этой задачей, какъ примѣромъ для рѣшенія задачъ на вѣроятности при помощи

уравненій въ конечныхъ разностяхъ [1]). Рѣшеніе задачи для небольшихъ значеній α и β не представляетъ затрудненій [2]); разборъ общаго случая завелъ бы насъ слишкомъ далеко; для ознакомленія съ послѣднимъ отсылаемъ къ цитированнымъ въ A подробнымъ руководствамъ по вычисленію вѣроятностей.

D. Теорема Якова Бернулли (законъ большихъ чиселъ).

Пусть вѣроятность опредѣленнаго результата при выполненіи какого либо акта есть w, а вѣроятность отсутствія желаемаго результата этого акта $v = 1 - w$. Такъ, напримѣръ, если актъ состоитъ въ бросаніи кости, то вѣроятность появленія единицы $w = \frac{1}{6}$, и вѣроятность того, что единица не появится $v = \frac{5}{6}$. Если, напримѣръ, дѣйствіе повторяется пять разъ, то вѣроятность появленія желаемаго результата при первомъ же разѣ, противоположнаго — при второмъ, при третьемъ и четвертомъ — опять желаемаго и наконецъ при пятомъ — противоположнаго, выразится такъ:

$$w \cdot v \cdot w \cdot w \cdot v = w^3 \cdot v^2.$$

Если порядокъ чередованія желательныхъ или нежелательныхъ результатовъ не играетъ роли и если требуется только, чтобы изъ 5 опытовъ два дали желательный результатъ и три нежелательный, то возможно столько различныхъ послѣдовательностей, сколько можно составить перестановокъ изъ 5 элементовъ, распадающихся на двѣ группы въ 2 и въ 3 одинаковыхъ элемента,

---

1) На этихъ способахъ мы здѣсь не можемъ останавливаться, такъ какъ мы ограничиваемся элементарными отдѣлами вычисленія вѣроятностей, выполнимыми съ помощью комбинаторики.

2) Если, напр., $\alpha = 1$, $\beta = 2$, и первому игроку, слѣдовательно, недостаетъ одной, второму еще двухъ партій до требуемаго числа, то послѣдній могъ бы получить при продолженіи игры лишь тогда всю ставку, если онъ выиграетъ слѣдующую партію $\left(\text{вѣроятность } \frac{1}{2}\right)$, а затѣмъ и другую $\left(\text{вѣроятность } \frac{1}{2}\right)$. Для него вѣроятность получить ставку при продолженіи игры была бы равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, для перваго же поэтому $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Слѣдовательно, при прекращеніи игры ставка должна быть раздѣлена такъ, чтобы первый получилъ въ три раза больше, чѣмъ второй.

т.-е. $\frac{5!}{3!\,2!}$; для каждой отдѣльной послѣдовательности вѣроятность есть w^3v^2, слѣдовательно, по теоремѣ о полной вѣроятности (C, I) вѣроятность того, что при 5 опытахъ, независимо отъ порядка, три будутъ давать желаемый результатъ, а два нежелательный, выразится $\frac{5!}{3!\,2!}\cdot w^3v^2$, и вообще, вѣроятность того, что при n опытахъ, въ μ случаяхъ получится желаемый результатъ и въ ν случаяхъ нежелательный $(\mu+\nu=n)$ будетъ:

$$w_\mu=\frac{n!}{\mu!\,\nu!}\,w^\mu v^\nu=\binom{n}{\mu}\,w^\mu v^{n-\mu}.$$

Значенія, которыя мы получимъ, сохраняя n постояннымъ и полагая μ послѣдовательно равнымъ 0, 1, 2,$\cdots$ n, а именно:

$$w_0=v^n,\quad w_1=\binom{n}{1}w\,v^{n-1},\quad w_2=\binom{n}{2}w^2v^{n-2},\cdots,\ w_n=w^n,$$

т.-е. вѣроятности отсутствія однократнаго, двукратнаго и т. д. n — кратнаго осуществленія желаемаго результата при n опытахъ, представляются членами разложенія бинома $(v+w)^n$. Но такъ какъ $v+w=1$, то, слѣдовательно, и $w_0+w_1+w_2+\cdots+w_n=1$, а это означаетъ только то, что одно изъ событій, вѣроятность которыхъ обозначена черезъ w_0, w_1, w_2, $\cdots$, w_n должно осуществиться.

Чтобы рѣшить вопросъ о томъ, какая изъ вѣроятностей имѣетъ наибольшее значеніе, составимъ частное

$$\frac{w_\mu}{w_{\mu-1}}=\frac{n!}{\mu!(n-\mu)!}\,w^\mu v^{n-\mu}:\frac{n!}{(\mu-1)!\,(n-\mu+1)!}\,w^{\mu-1}v^{n-\mu+1}$$
$$=\frac{(\mu-1)!\,(n-\mu+1)!}{\mu!\,(n-\mu)!}\cdot\frac{w}{v}$$
$$=\frac{n-\mu+1}{\mu}\cdot\frac{w}{v}.$$

Слѣдовательно,

$$w_\mu \gtreqless w_{\mu-1},$$

смотря по тому

$$\left(\frac{n+1}{\mu}-1\right)\cdot\frac{w}{v}\gtreqless 1$$

или

$$\frac{n+1}{\mu}-1\gtreqless\frac{v}{w}$$

или

$$\frac{n+1}{\mu} \gtreqless \frac{1}{w}$$

или

$$\frac{\mu}{n+1} \lesseqgtr w$$

или, наконецъ,

$$\mu \lesseqgtr (n+1)\,w.$$

Вѣроятности w_μ растутъ съ увеличеніемъ индекса μ, пока $\mu < (n+1)\,w$; и онѣ убываютъ съ возрастаніемъ μ, если $\mu > (n+1)\,w$. Если положить $(n+1)\,w$ равнымъ цѣлому числу μ_0, то будемъ имѣть:

$$w_{\mu_0} = w_{\mu_0 - 1},$$

и эти двѣ вѣроятности явятся наибольшими въ рядѣ

$$w_0,\ w_1,\ w_2, \ldots,\ w_n.$$

Если $(n+1)\,w$ не есть число цѣлое и μ_0 означаетъ теперь наибольшее изъ цѣлыхъ чиселъ, содержащееся въ $(n+1)\,w$, то

$$w_{\mu_0} > w_{\mu_0 - 1},$$

но

$$w_{\mu_0 + 1} < w_{\mu_0},$$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ w_{μ_0} есть наибольшая изъ вѣроятностей $w_0,\ w_1,\ w_2, \ldots\ w_n$.

Такъ какъ

$$(n+1)\,w - 1 < \mu_0 < (n+1)\,w$$

или

$$nw - (1 - w) < \mu_0 < nw + w,$$

то μ_0 можетъ отличаться отъ nw лишь на правильную дробь. Слѣдовательно, мы можемъ сдѣлать слѣдующее заключеніе: изъ всѣхъ мыслимыхъ серій, въ n опытовъ каждая, отличающихся другъ отъ друга числомъ желательныхъ и нежелательныхъ результатовъ, та серія имѣетъ наибольшую вѣроятность, въ которой число желательныхъ результатовъ или равно или мало отличается (разность можетъ быть только правильной дробью) отъ произведенія числа опытовъ на вѣроятность желаемаго результата при единичномъ актѣ.

Если, напримѣръ, бросить кость 1200 разъ, то вѣроятность того, что единица совсѣмъ не появится, будетъ,

$$w_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^{1200} = 0,\overbrace{0\ldots0}^{95 \text{ нулей.}}96\ldots;$$

вѣроятность, что единица появится только одинъ разъ:

$$w_1 = 1200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1199} 0,\overbrace{0\ldots0}^{92 \text{ нуля.}}23\ldots,$$

вѣроятность, что при всѣхъ 1200 бросаніяхъ выпадетъ 1, $w_{1200} = \left(\frac{1}{6}\right)^{1200} = 1$, дѣленной на число съ 934 знаками; вѣроятность же того, что единица появится $\mu_0 = \frac{1}{6} \cdot 1200 = 200$ разъ будетъ

$$w_{200} = \frac{1200!}{200!\,1000!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{200} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1000},$$

т.-е. приблизительно

$$= 0{,}0309\ ^{1)}.$$

Въ сравненіи съ первыми и послѣдними членами ряда $w_0, w_1, \ldots, w_{1200}$, эта наибольшая вѣроятность w_{200} чрезвычайно велика, хотя она даже и не вполнѣ еще достигаетъ $\frac{1}{32}$ [2]).

При помощи формулы

$$\frac{w_\mu}{w_{\mu-1}} = \frac{n+1-\mu}{\mu} \cdot \frac{w}{v}$$

---

[1]) При вычисленіяхъ цѣлесообразно пользоваться таблицами C. F. Degen, Tabularum ad faciliorem et breviorem probabilitatis computationem utilium Enneas, Копенгагенъ 1824, въ которыхъ составлены двѣнадцатизначные логариѳмы всѣхъ $n!$ для $n = 1$ до $n = 1200$.

[2]) Можно даже показать, что подборомъ достаточно большого значенія n, наибольшая вѣроятность w_{μ_0} можетъ быть сдѣлана произвольно мала. Пользуясь формулой, данной Stirling'омъ, по которой при большихъ значеніяхъ n можно приближенно положить $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, нетрудно привести w_{μ_0} къ виду $\frac{1}{\sqrt{2\pi n w v}}$, откуда непосредственно и вытекаетъ справедливость нашего утвержденія.

легко вычислить по w_{μ_0} послѣдовательные члены ряда

$$w_0,\ w_1, \ldots,\ w_n.$$

Такъ, въ нашемъ числовомъ примѣрѣ имѣемъ:

$$\left(n = 1200,\ \mu_0 = 200;\ \frac{w}{v} = \frac{1}{5}\right)$$

$$w_{201} = \frac{1000}{201 \cdot 5} w_{200},\ w_{202} = \frac{999}{202 \cdot 5} w_{201},\ w_{203} = \frac{998}{203 \cdot 5} w_{202} \text{ и т. д.}$$

и

$$w_{199} = \frac{200 \cdot 5}{1001} w_{200},\ w_{198} = \frac{199 \cdot 5}{1002} w_{199},\ w_{197} = \frac{198 \cdot 5}{1003} w_{198} \text{ и т. д.}$$

Обрывая всѣ десятичныя дроби на пятомъ десятичномъ знакѣ, получимъ:

$$w_{200} = 0{,}03090;$$

$w_{199} = 0{,}03087;$	$w_{201} = 0{,}03075;$
$w_{198} = 0{,}03066;$	$w_{202} = 0{,}03041;$
$w_{197} = 0{,}03026;$	$w_{203} = 0{,}02990;$
$w_{196} = 0{,}02969;$	$w_{204} = 0{,}02923;$
$w_{195} = 0{,}02895;$	$w_{205} = 0{,}02840;$
$w_{194} = 0{,}02806;$	$w_{206} = 0{,}02744;$
$w_{193} = 0{,}02702;$	$w_{207} = 0{,}02635;$
$w_{192} = 0{,}02587;$	$w_{208} = 0{,}02516;$
$w_{191} = 0{,}02462;$	$w_{209} = 0{,}02388;$
$w_{190} = 0{,}02327;$	$w_{210} = 0{,}02254;$
$w_{189} = 0{,}02187;$	$w_{211} = 0{,}02115;$
$w_{188} = 0{,}02042;$	$w_{212} = 0{,}01974;$
$w_{187} = 0{,}01895;$	$w_{213} = 0{,}01831;$
$w_{186} = 0{,}01747;$	$w_{214} = 0{,}01689;$
$w_{185} = 0{,}01601;$	$w_{215} = 0{,}01549.$

Эта таблица показываетъ, что значенія убываютъ въ обѣ стороны отъ w_{200}, хотя вначалѣ и довольно медленно, но потомъ тѣмъ быстрѣе, чѣмъ больше удаляться въ этомъ ряду отъ w_{200} [1]).

---

[1]) Это справедливо не только для приведеннаго числового примѣра; напротивъ, въ формулѣ

$$w_\mu = \frac{n+1-\mu}{\mu} \cdot \frac{w}{v} \cdot w_{\mu-1},$$

по которой слѣдуетъ вычислять w съ индексомъ выше μ_0, дробь $\frac{n+1-\mu}{\mu}$ становится меньше съ возрастаніемъ μ.

Вѣроятность того, что при 1200 опытахъ число желательныхъ результатовъ лежитъ между 195 и 205, равна суммѣ

$$w_{195}+w_{196}+\cdots+w_{200}+\cdots+w_{204}+w_{205}=0{,}330;$$

вѣроятность того, что при 1200 опытахъ число желательныхъ результатовъ лежитъ между 190 и 210, равна суммѣ

$$w_{190}+w_{191}+\cdots+w_{200}+\cdots+w_{209}+w_{210}=0{,}584;$$

вѣроятность того, что при 1200 опытахъ число желательныхъ результатовъ лежитъ между 185 и 215, равна суммѣ

$$w_{185}+w_{186}+\cdots+w_{200}+\cdots+w_{214}+w_{215}=0{,}7705.$$

Сумма полнаго ряда $w_0+w_1+w_2+\cdots+w_{1200}$, состоящаго изъ 1201 члена равна 1. Слѣдовательно, незначительная часть этого ряда, охватывающая лишь w_{200} и 30 сосѣднихъ съ нимъ членовъ, даетъ уже значительно большую часть всей суммы, и если вѣроятность появленія единицы ровно 200 разъ при 1200 бросаніяхъ одной кости незначительна $\left(\text{еще не вполнѣ}=\frac{1}{32}\right)$, то все же вѣроятность того, что число желательныхъ результатовъ лежитъ между 185 и 215, достигаетъ довольно большого значенія, 0,7705.

Вообще, вѣроятность того, что при n опытахъ число желательныхъ результатовъ лежитъ между $\mu_0-\lambda$ и $\mu_0+\lambda$ равна суммѣ

$$S_\lambda=w_{\mu_0-\lambda}+w_{\mu_0-\lambda+1}+\cdots+w_{\mu_0}+\cdots+w_{\mu_0+\lambda-1}+w_{\mu_0+\lambda},$$

въ которой слѣдуетъ положить

$$w_\rho=\binom{n}{\rho}w^\rho v^{n-\rho}$$

Де Муавру, Стирлингу и Лапласу удалось представить приближенное значеніе этой суммы при большихъ значеніяхъ n въ конечной формѣ, а именно въ видѣ опредѣленнаго интеграла. Мы здѣсь не можемъ останавливаться на выводѣ соотвѣтствующей формулы (ср. напр. цитированный въ А на стр. 296 учебникъ E. Czuber); мы только сообщимъ важныя, вытекающія изъ нея слѣдствія:

1. Если дано опредѣленное значеніе для $\frac{\lambda}{n}$ (произвольно малое), то придавая n достаточно большія значенія, мы мо-

жемъ сумму S_λ, представляющую вѣроятность того, что число желательныхъ результатовъ отличается отъ произведенія nw не болѣе чѣмъ на λ, сдѣлать сколь угодно близкой къ значенію 1.

2. Если задана опредѣленная правильная дробь ω, сколь угодно близкая къ 1, то всегда при достаточно большомъ значеніи n можно достигнуть того, что для произвольно малаго значенія $\frac{\lambda}{n}$ вѣроятность S_λ будетъ равна ω[1]).

Изложенное въ этомъ отдѣлѣ D включая и недостающее здѣсь болѣе подробное количественное опредѣленіе, представляетъ сущность содержанія теоремы Якова Бернулли, который хотя и не довелъ этого изслѣдованія въ своемъ „Ars conjectandi" до окончательнаго вывода, но все же началъ его и достаточно разработалъ. Теорему Бернулли называютъ также и „закономъ большихъ чиселъ" хотя Пуассонъ, установившій это названіе, понималъ, собственно говоря, подъ нимъ нѣчто другое, а именно обобщеніе теоремы Бернулли на тотъ случай, когда вѣроятность w при слѣдующихъ другъ за другомъ опытахъ принимаетъ различныя значенія.

На законѣ большихъ чиселъ основывается практическое значеніе каждаго опредѣленія вѣроятности. И не имѣющій яснаго представленія о точномъ смыслѣ этой теоремы связываетъ съ выраженіемъ „вѣроятность даннаго событія есть $\frac{1}{6}$" прежде всего представленіе о томъ, что при очень большомъ числѣ опытовъ событіе осуществится приблизительно въ $\frac{1}{6}$ долѣ всѣхъ случаевъ. На этой теоремѣ основывается безобидный разсчетъ ставки, которую долженъ внести игрокъ при азартной игрѣ. Если какой-либо предприниматель обязуется каждому, бросившему 1 при метаніи

---

[1]) Въ приведенномъ числовомъ примѣрѣ было принято $n = 1200$ $\lambda = 15$, $S_\lambda = 0{,}77$. Если оставить значеніе $\frac{\lambda}{n} = \frac{1}{80}$ постояннымъ, то мы можемъ, увеличивая n, сдѣлать вѣроятность S_λ произвольно близкой къ 1. Если же остаться при вѣроятности 0,77, то мы можемъ увеличеніемъ n достигнуть того, что уже при произвольно малыхъ значеніяхъ $\frac{\lambda}{n}$ $\left(\text{а слѣдовательно, и при меньшихъ } \frac{1}{80}\right)$ S_λ будетъ равно 0,77.

одной кости, уплатить a марокъ и если игра повторяется очень большое (n) число разъ, то по теоремѣ Бернулли предпринимателю придется всего на всего уплатить сумму, произвольно мало отличающуюся отъ $\frac{1}{6}na$, съ вѣроятностью тѣмъ болѣе близкой къ единицѣ, чѣмъ больше n. Если предприниматель не желаетъ ни нажить, ни потерять, то при n играхъ должны быть также внесены $\frac{1}{6}na$ марокъ, а поэтому при каждой отдѣльной игрѣ $\frac{1}{6}a$; и, вообще, если игрокъ долженъ получить a марокъ, при осуществленіи событія, вѣроятность котораго w, ему слѣдуетъ внести въ видѣ ставки $a \cdot w$ марокъ. Это произведеніе $a \cdot w$, — произведеніе ожидаемой суммы на вѣроятность событія, при осуществленіи котораго должна быть уплачена сумма a, называютъ „математическимъ ожиданіемъ" игрока. Это понятіе математическаго ожиданія имѣетъ большое значеніе не только для азартныхъ игръ, но прежде всего въ страховомъ дѣлѣ.

Съ другой стороны, теоремой Бернулли пользуются для приближеннаго опредѣленія теоретически неопредѣлимой вѣроятности нѣкоторыхъ сложныхъ явленій практической жизни изъ большого числа опытовъ или наблюденій. Если большимъ числомъ (n) людей было наблюдено въ m случаяхъ опредѣленное событіе, вѣроятность осуществленія котораго обозначена черезъ w, то на основаніи теоремы Бернулли, m лишь мало уклоняется отъ $n \cdot w$, слѣдовательно, w — лишь мало отличается отъ $\frac{m}{n}$ и вѣроятность того, что разность не превышаетъ опредѣленной границы, приближается къ 1 по мѣрѣ увеличенія n. Въ такъ называемыхъ таблицахъ смертности указано число лицъ, остающихся въ живыхъ изъ опредѣленнаго числа, напр. 100 000 одновременно родившихся, черезъ 1, 2, 3, и т. д. лѣтъ послѣ рожденія. Въ такой таблицѣ найдемъ, что изъ 100 000 одновременно родившихся мальчиковъ остается въ живыхъ 20 лѣтъ спустя — 59 287; спустя 30 лѣтъ — 54 454, спустя 40 лѣтъ — 48 775, откуда заключаемъ, что для 20-лѣтняго мужчины вѣроятность прожить, по крайней мѣрѣ, еще 10 лѣтъ равна приблизительно $\frac{54\,454}{59\,287}$, вѣроятность прожить, по крайней мѣрѣ, еще 20 лѣтъ — приблизительно $\frac{48\,775}{59\,287}$, для тридцатилѣтняго мужчины вѣроятность дожить до 40 лѣтъ приблизительно равна $\frac{48\,775}{54\,454}$ и т. д. [1]).

E. Вѣроятность a posteriori.

I. Теорема Бейеса.

Во всѣхъ разсмотрѣнныхъ до сихъ поръ задачахъ на вычисленіе вѣроятностей рѣчь шла о вѣроятности осуществленія событій, могущихъ произойти при опредѣленной совокупности условій. Такого рода вычисленіе вѣроятности называется апріорнымъ. Но естественно- и соціально-научныя изслѣдованія приводятъ часто къ задачамъ на вычисленіе вѣроятности, отличнымъ отъ этой категоріи,—къ задачамъ на отысканіе т. н. вѣроятности „a posteriori". Пусть было наблюдено осуществленіе событія E и пусть извѣстно, что оно можетъ быть вызвано одной изъ исключающихъ другъ друга совокупностей условій U_1, U_2,... U_n [2]) и что при наличности совокупности U_ν, вѣроятность осуществленія E есть w_ν ($\nu = 1, 2, \ldots n$); тогда возникаетъ вопросъ, какъ велика вѣроятность, что осуществленіе событія E вызвано именно опредѣленной совокупностью условій U_r? Эта задача впервые была разобрана англичаниномъ B a y e s въ двухъ работахъ, опубликованныхъ послѣ смерти автора его другомъ (P r i c e) въ Philosophical Transactions за 1764 и 1765 гг. Мы разберемъ:

a) тотъ случай, когда a priori, т.-е. до осуществленія событія E, гипотезы объ осуществленіи E, при дѣйствіи каждой изъ причинъ, оказываются одинаково вѣроятными $\left(\text{слѣдовательно, вѣроятность каждой равна } \frac{1}{n}\right)$.

Чтобы показать, что такое апостеріорное опредѣленіе вѣроятности ни въ коемъ случаѣ не требуетъ какихъ-либо особыхъ

---

1) Такія таблицы смертности, которыя имѣютъ громадное значеніе для страхованія жизни и которыя весьма пригодны въ качествѣ матеріала для задачъ на вычисленія вѣроятности въ школьномъ преподаваніи, можно найти, напр., въ неоднократно упоминавшемся учебникѣ E. C z u b e r, гдѣ подробно изложено и ихъ составленіе.

2) Всѣ U_1, U_2, ..., U_n, въ литературѣ вычисленія вѣроятности обычно называютъ причинами, хотя бы съ точки зрѣнія логики дѣйствительной причиной E оказывалась лишь одна изъ этихъ совокупностей условій.

допущеній[1]), выяснимъ рѣшеніе общей задачи на слѣдующемъ схематическомъ примѣрѣ:

Пусть даны n тождественныхъ урнъ U_1, $U_2, \ldots, U_n$, содержащихъ по s шаровъ. Изъ s шаровъ ν-той урны ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) пусть a_ν бѣлые, такъ что вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ нея есть $w_\nu = \frac{a_\nu}{s}$. Изъ одной урны вынули какой-либо шаръ; оказалось, что вынутый шаръ бѣлый. Какъ велика вѣроятность того, что онъ вынутъ изъ опредѣленной урны U_r?

Какъ видно, n причинъ общей задачи замѣнены n урнами. Апріорная вѣроятность каждой изъ n причинъ здѣсь одинакова $\left(\frac{1}{n}\right)$, такъ какъ выборъ каждой урны равновозможенъ. Для рѣшенія задачи мы можемъ представить себѣ всѣ шары, не измѣняя при этомъ результата, собранными въ одну урну, (на основаніи C, IV конецъ задачи 2, стр. 307), такъ какъ всѣ урны содержатъ по одинаковому числу шаровъ, но при этомъ шары изъ ν-ой урны должны носить значокъ ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Мы знаемъ, что вынутый шаръ былъ бѣлый, слѣдовательно, всѣ возможные случаи представлены всѣми бѣлыми шарами, число которыхъ равно $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Благопріятными для причины U_r окажутся a_r бѣлыхъ шаровъ изъ урны U_r. Слѣдовательно, искомая вѣроятность того, что вынутый бѣлый шаръ принадлежитъ къ урнѣ U_r есть

$$W_r = \frac{a_r}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

или дѣля числитель и знаменатель на s и полагая $\frac{a_\nu}{s} = w_\nu$ получимъ:

$$W_r = \frac{w_r}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}.$$

Эта формула, выражающая теорему Бейеса, представляетъ въ то же время и рѣшеніе общей задачи a).

Чтобы рѣшить задачу въ случаѣ b), когда до осуществленія E могутъ имѣть мѣсто n причинъ, обладающихъ различной вѣроятностью— пусть, напримѣръ, вѣроятность причины U_ν есть ω_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots n$), слѣдуетъ лишь нѣсколько измѣнить эту схематическую задачу. Представимъ съ самаго начала, что въ одной урнѣ

[1]) Какъ, напр., то, что искомая апостеріорная вѣроятность пропорціональна апріорной.

находится s_1 шаровъ, помѣченныхъ нумеромъ 1, и изъ нихъ a_1 бѣлыхъ, s_2 шаровъ, помѣченныхъ нумеромъ 2, и изъ нихъ a_2 бѣлыхъ и т. д. и наконецъ s_n шаровъ, помѣченныхъ нумеромъ n, и изъ нихъ a_n бѣлыхъ. Здѣсь n различныхъ причинъ представлены при помощи n группъ шаровъ, изъ которыхъ ν-ая содержитъ s_ν шаровъ. Апріорная вѣроятность дѣйствія причины U_ν, т.-е. вынутія шара изъ группы, помѣченной значкомъ ν, есть $\omega_\nu = \frac{s_\nu}{S}$, гдѣ $S = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$; вѣроятность того, что при дѣйствіи причины U_ν наблюденное событіе осуществится, т.-е. вѣроятность, что шаръ, взятый изъ группы шаровъ, помѣченныхъ значкомъ ν, окажется бѣлымъ, есть $w_\nu = \frac{a_\nu}{s_\nu}$. Пусть шаръ вынутъ, и удостовѣрено, что онъ бѣлый. Какъ велика вѣроятность, что онъ принадлежитъ къ группѣ отмѣченной нумеромъ r?

Такъ какъ извѣстенъ цвѣтъ вынутаго шара, то число возможныхъ случаевъ слѣдуетъ положить равнымъ числу бѣлыхъ шаровъ въ урнѣ, т.-е. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$; число статочностей благопріятствующихъ причинѣ U_r, равно a_r, поэтому искомая вѣроятность:

$$W_r = \frac{a_r}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} =$$

$$= \frac{\frac{a_r}{s_r} \cdot \frac{s_r}{S}}{\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{s_1}{S} + \frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{s_2}{S} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \cdot \frac{s_n}{S}} =$$

$$= \frac{w_r \omega_r}{w_1 \omega_1 + w_2 \omega_2 + \cdots + w_n \omega_n}.$$

Эта формула и выражаетъ теорему Бейеса въ случаѣ b).

II. Опредѣленіе вѣроятности будущихъ событій на основаніи наблюденій.

Часто наши знанія слишкомъ несовершенны, чтобы можно было a priori опредѣлить вѣроятность ожидаемаго событія. Если, напримѣръ, намъ только извѣстно, что въ одной изъ урнъ имѣются бѣлые и черные шары, но неизвѣстно, въ какой пропорціи они перемѣшаны, то у насъ нѣтъ достаточныхъ основаній опредѣлить вѣроятность появленія бѣлаго шара. Если же имѣются результаты прежнихъ опытовъ съ выниманіемъ шаровъ изъ урны, то ими можно воспользоваться для вычисленія вѣроятности опредѣленнаго результата при будущихъ опытахъ.

Пусть производилось наблюденіе надъ событіемъ E, которое можетъ быть вызвано одной изъ другъ-друга исключающихъ совокупностей условій $U_1, U_2, \ldots U_n$.

Какъ и въ I пусть w_ν означаетъ вѣроятность того, что событіе E происходитъ въ силу наличности U_ν и ω_ν — апріорная вѣроятность дѣйствія причины U_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Опредѣлимъ вѣроятность W_F какого-либо будущаго событія, которое также можетъ произойти лишь въ силу или U_1, или U_2 и т. д., или U_n. Обозначимъ вѣроятность появленія F при дѣйствіи U_ν черезъ w'_ν.

Вѣроятность наличности U_ν, вычисленная по теоремѣ Бейеса изъ наблюденій надъ E, будетъ

$$W_\nu = \frac{w_\nu \cdot \omega_\nu}{w_1\omega_1 + w_2\omega_2 + \cdots + w_n\omega_n},$$

слѣдовательно, вѣроятность сложнаго событія, состоящаго, съ одной стороны, изъ дѣйствія причины U_ν, а, съ другой стороны, изъ осуществленія событія F въ силу причины U_ν, равна произведенію $W_\nu \cdot w'_\nu$, поэтому полная вѣроятность того, что F произойдетъ, благодаря U_1 или U_2 и т. д., или U_n,

$$W_F = W_1 w_1' + W_2 w_2' + \cdots + W_n w_n' =$$
$$= \frac{w_1\omega_1 w_1' + w_2\omega_2 w_2' + \cdots + w_n\omega_n w_n'}{w_1\omega_1 + w_2\omega_2 + \cdots + w_n\omega_n}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n$, правая часть принимаетъ болѣе простой видъ

$$\frac{w_1 \cdot w_1' + w_2 w_2' + \cdots + w_n w_n'}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

Примѣръ: Пусть въ урнѣ находится 5 шаровъ; извѣстно, что часть изъ нихъ бѣлые и часть черные, но неизвѣстно, сколько каждой окраски. 4 раза вынимали по одному шару, при чемъ каждый разъ клали шаръ обратно. Три раза вынули бѣлый и одинъ разъ черный. Какъ велика вѣроятность, что если еще разъ вынуть шаръ, то онъ окажется бѣлымъ?

Рѣшеніе: По отношенію къ шарамъ, находящимся въ урнѣ, возможны лишь слѣдующія четыре предположенія:

U_1: 4 бѣлыхъ, 1 черный шаръ;
U_2: 3 бѣлыхъ, 2 черныхъ шара;
U_3: 2 бѣлыхъ, 3 черныхъ шара;
U_4: 1 бѣлыхъ и 4 черныхъ шара.

Такъ какъ намъ абсолютно ничего неизвѣстно, въ какой пропорціи смѣшаны шары, то при нашей освѣдомленности одинаково возможны всѣ 4 гипотезы U_1, U_2, U_3, U_4, слѣдовательно, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{4}$ [1]).

Вѣроятность, въ какомъ-либо опредѣленномъ порядкѣ вынуть 3 бѣлыхъ и одинъ черный будетъ

Въ случаѣ U_1: $w_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{64}{625}$,

„ „ U_2: $w_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{625}$,

„ „ U_3: $w_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{625}$,

„ „ U_4: $w_4 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{625}$,

слѣдовательно, вѣроятность наличности U_1, U_2, U_3, U_4, вычисленныя по теоремѣ Бейеса, будутъ соотвѣтственно равны

$$W_1 = \frac{64}{146} = \frac{32}{73}, \qquad W_2 = \frac{54}{146} = \frac{27}{73}, \qquad W_3 = \frac{24}{146} = \frac{12}{73}, \qquad W_4 = \frac{4}{146} = \frac{2}{73}$$

и, наконецъ, вѣроятность получить бѣлый шаръ въ слѣдующій разъ

$$W_F = \frac{32}{73} \cdot \frac{4}{5} + \frac{27}{73} \cdot \frac{3}{5} + \frac{12}{73} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{73} \cdot \frac{1}{5} = \frac{235}{365} = \frac{47}{73}.$$

F. Примѣчаніе относительно геометрическихъ вѣроятностей.

Во всѣхъ разобраныхъ нами задачахъ на вычисленіе вѣроятностей какъ число возможныхъ, такъ и число благопріятныхъ статочностей было всегда числомъ конечнымъ. Нѣкоторыя же изслѣдованія приводятъ къ задачамъ, при которыхъ возможныя и благопріятныя статочности выражаются всѣми значеніями одной или нѣсколькихъ непрерывныхъ перемѣнныхъ, лежащими въ

---

[1]) Если мы могли воспользоваться какими-нибудь свѣдѣніями о томъ, въ какой пропорціи смѣшаны шары, то наше сужденіе о вѣроятности имѣло бы бо̀льшее значеніе.

извѣстныхъ границахъ (слѣдовательно, ихъ безконечно много). Такъ какъ первыя задачи этого рода касались геометрическихъ вопросовъ, а другія могли быть геометрически истолкованы, то такія задачи и называютъ задачами на „геометрическія вѣроятности“. Для нихъ слѣдуетъ прежде всего измѣнить опредѣленіе вѣроятности. Czuber[1]) даетъ слѣдующее, всегда пригодное опредѣленіе вѣроятности: „Математическая вѣроятность событія есть отношеніе содержанія многообразія статочностей, ему благопріятствующихъ, къ содержанію многообразію всѣхъ статочностей, предположенныхъ равновозможными“. Для вычисленія геометрической вѣроятности недостаточно уже одной только комбинаторики; чтобы найти содержаніе многообразія въ общемъ скорѣе требуется интегральное счисленіе.

---

[1]) Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie (Nr 24) въ 7 томѣ Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Лейпцигъ 1899.

ГЛАВА VI.

Ирраціональныя числа [1]).

§ 1. Введеніе.

Опредѣленіе и сравненіе по величинѣ ирраціональныхъ чиселъ.

Въ области раціональныхъ чиселъ, какъ мы уже сказали въ началѣ предыдущей главы, всегда выполнимы четыре основныхъ дѣйствія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе (лишь за исключеніемъ дѣленія на нуль); но, вообще говоря, уже не выполнимы извлеченіе корня изъ произвольнаго положительнаго числа и логариѳмированіе произвольнаго положительнаго числа при произвольномъ положительномъ основаніи (ср. гл. II § 5 C и D, стр. 102 и 106). Для всѣхъ приложеній ариѳметики этотъ недочетъ не важенъ; дѣйствительно, если изъ даннаго положительнаго числа и не извлекается корень n-ой степени, то все-таки всегда возможно найти n-я степени раціональныхъ чиселъ, сколь угодно мало отличающіяся отъ даннаго числа (ср. гл. II § 5 C, стр. 105); точно такъ же возможно измѣнить число и основаніе системы логариѳмовъ прибавленіемъ и вычитаніемъ произвольно малыхъ чиселъ такимъ образомъ, чтобы при новомъ основаніи логариѳмъ новаго числа дѣйствительно существовалъ (гл. V, § 5 B, стр. 268); но такъ какъ при всѣхъ примѣненіяхъ ариѳметики, какъ это неоднократно подчеркивалось, никогда не требуется абсолютной точности, а всегда оказывается достаточнымъ, чтобы допущенная ошибка не пере-

---

1) Въ основаніе этой главы положена программная работа автора: Irrationale Zahlen und Verhältnisse inkommensurabler Grössen, Luisenstädt. Oberrealscsule zu Berlin, 1900.

ходила опредѣленной границы, то указанныя измѣненія вполнѣ допустимы при практическихъ вычисленіяхъ. Въ дѣйствительности, физика, астрономія, техника, коммерческая ариѳметика и т. д., оперируютъ всегда лишь съ раціональными числами [1]).

Напротивъ, изъ теоретическаго требованія чистой математики имѣть возможность выполнять всѣ безъ исключенія дѣйствія, возникаетъ вопросъ, нельзя ли ввести такое новое понятіе числа и дѣйствія надъ нимъ опредѣлить такъ, чтобы и уравненія въ родѣ $x^2 = 3$ или $10^x = 2$ были разрѣшимы съ полной строгостью. Потребность въ расширеніи числовой области ощущается еще и съ другой точки зрѣнія. Если на прямой линіи, неограниченно простирающейся въ ту и другую сторону, выбрать нѣкоторую точку O и нѣкоторый опредѣленный отрѣзокъ $\mathfrak{E}$, то каждому раціональному числу r соотвѣтствуетъ единственная опредѣленная точка прямой, а именно та, которую получимъ, если отъ O отложить отрѣзокъ $r\mathfrak{E}$, который всегда возможно построить; а именно, его откладываютъ отъ точки O, въ произвольно выбранномъ направленіи, если r положительно, и въ противоположномъ, если r отрицательно. Между двумя произвольными, подобнымъ образомъ найденными, и сколь угодно близкими другъ къ другу „раціональными" точками прямой, лежитъ неисчислимо много другихъ; такъ какъ если r_1 и r_2 означаютъ два различныхъ между собой положительныхъ раціональныхъ числа и если напр. $r_2 > r_1$, то раціональное число $\frac{r_1 + r_2}{2}$ больше, чѣмъ r_1, но меньше, чѣмъ r_2, и поэтому точка, соотвѣтствующая значенію $\frac{r_1 + r_2}{2}$ лежитъ между точками, соотвѣтствующими r_1 и r_2. Также можно убѣдиться, что между точками (r_1) и $\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)$, въ свою очередь, навѣрное, лежитъ по крайней мѣрѣ одна точка, соотвѣтствующая нѣкоторому раціональному числу и т. д. Слѣдовательно, несмотря на то, что, напр., между точками (1) и (2), находится безконечно много

---

[1]) Требованіе xr чтобы и теоретическая ариѳметика, алгебра и анализъ ограничивались лишь раціональными числами (даже положительными цѣлыми числами), выставляетъ L. Kronecker. Въ сочиненіи «Über den Zahlbegriff» (J. f. Math., Bd. 101, стр. 337) онъ показываетъ, въ чемъ состоитъ существованіе корней любого алгебраическаго уравненія при исключительномъ примѣненіи раціональныхъ чиселъ.

такихъ раціональныхъ точекъ, мы все-таки ни въ какомъ случаѣ указаннымъ способомъ не переберемъ всѣхъ точекъ, лежащихъ на отрѣзкѣ (1) и (2). Такъ, напримѣръ, точкѣ, которая получится, если отложить отъ точки O діагональ $\mathfrak{D}$ квадрата со стороной $\mathfrak{E}$, ни въ какомъ случаѣ не можетъ соотвѣтствовать какой-либо раціональной точки. Если бы $\mathfrak{D}=r\mathfrak{E}$, то по теоремѣ Пиѳагора квадратъ, построенный на діагонали имѣлъ бы площадь вдвое больше площади квадрата, построеннаго на $\mathfrak{E}$, т.-е. $r^2=2$. Раціональнаго же числа, квадратъ котораго равнялся бы 2 не существуетъ (гл. II, § 5 C, стр. 102). Поэтому возникаетъ вопросъ: нельзя ли тѣмъ точкамъ прямой, которыя не опредѣляются никакими раціональными числами, привести въ соотвѣтствіе чиселъ нѣкотораго новаго рода, еще подлежащихъ опредѣленію.

Для отвѣта на поставленный вопросъ намъ кажется наиболѣе цѣлесообразнымъ исходить изъ алгориѳма, которымъ мы пользовались при рѣшеніи, въ ранѣе указанномъ смыслѣ, задачъ на извлеченіе квадратнаго корня и на логариѳмированіе. Если A означаетъ произвольное положительное раціональное число и n есть произвольное положительно цѣлое число, то можно всегда опредѣлить (см. гл. III, § 3 F, стр. 118) цѣлое число a_n такъ, чтобы

$$\left(\frac{a_n}{10^n}\right)^2 < A < \left(\frac{a_n+1}{10^n}\right)^2.$$

Если n придавать послѣдовательныя значенія 1, 2, 3 ⋯ , то будутъ получаться десятичныя дроби $\frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_3}{10^3}, \ldots$, которыя, если не требуется абсолютной точности, могутъ замѣнить не существующій $\sqrt{A}$. Такъ, напримѣръ, при $A=3$ и

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

пріемами, указанными въ гл. I, § 10 G, стр. 52—54, получимъ неравенства

$$\begin{array}{llll}
1{,}7^2 & =2{,}89 & <3< 1{,}8^2 & =3{,}24, \\
1{,}73^2 & =2{,}9929 & <3< 1{,}74^2 & =3{,}0276, \\
1{,}732^2 & =2{,}999824 & <3< 1{,}733^2 & =3{,}003289, \\
1{,}7320^2 & =2{,}99982400 & <3< 1{,}7321^2 & =3{,}00017041, \\
1{,}73205^2 & =2{,}9999972025 & <3< 1{,}73206^2 & =3{,}0000318436, \ldots,
\end{array}$$

дающія рѣшеніе уравненіе $x^2=3$, по скольку оно возможно въ области раціональныхъ чиселъ.

Подобнымъ же образомъ пріемы, указанные въ гл. V, § 5 C, I, стр. 268 и 269 привели насъ къ неравенствамъ:

$$10^{\frac{4}{16}} < 2 < 10^{\frac{5}{16}},$$

$$10^{\frac{9}{32}} < 2 < 10^{\frac{10}{32}},$$

$$10^{\frac{19}{64}} < 2 < 10^{\frac{20}{64}},$$

$$10^{\frac{38}{128}} < 2 < 10^{\frac{39}{128}},$$

$$10^{\frac{77}{256}} < 2 < 10^{\frac{78}{256}} \text{ и т. д.}$$

Показатели при 10 въ слѣдующихъ другъ за другомъ неравенствахъ замѣняютъ не существующій въ области раціональныхъ чиселъ логариомъ 2-хъ при основаніи 10.

Найденные при помощи обоихъ алгориомовъ двойные ряды:

$$\begin{pmatrix} 1{,}7; & 1{,}73; & 1{,}732; & 1{,}7320; & 1{,}73205; & \ldots \\ 1{,}8; & 1{,}74; & 1{,}733; & 1{,}7321; & 1{,}73206; & \ldots \end{pmatrix}$$

и соотвѣтственно

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{16}; & \frac{9}{32}; & \frac{19}{64}; & \frac{38}{128}; & \frac{77}{256}; \ldots \\ \frac{5}{16}; & \frac{10}{32}; & \frac{20}{64}; & \frac{39}{128}; & \frac{78}{256}; \ldots \end{pmatrix}$$

имѣютъ слѣдующія свойства:

Въ первой строкѣ двойного ряда, каждый членъ больше предыдущаго или равенъ ему, а во второй строкѣ каждый членъ меньше, чѣмъ предыдущій или равенъ ему [1]). Любой членъ второй строки больше любого члена первой, и разность между двумя соотвѣтствующими членами обѣихъ строкъ по мѣрѣ удаленія отъ начала дѣлается все меньше и можетъ быть наконецъ сдѣлана произвольно малой.

Разсмотримъ теперь вообще двойные ряды,

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, & \ldots \\ A_1, & A_2, & \ldots, & A_n, & \ldots \end{pmatrix},$$

состоящіе изъ неограниченно большого числа раціональныхъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots;\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots,$$

[1]) Такіе ряды называются «монотонными».

удовлетворяющихъ при всѣхъ значеніяхъ n неравенствамъ

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n;$$

кромѣ того, если задать произвольно-малое положительное число δ, всегда можно найти такое цѣлое положительное число N, чтобы при $n \geqq N$

$$A_n - a_n < \delta.$$

Такого рода двойной рядъ коротко обозначимъ символомъ $(a_n;\ A_n)$. Можетъ случиться, что для опредѣленнаго двойного ряда $(a_n;\ A_n)$ найдется такое раціональное число a, что при каждомъ произвольномъ значеніи n

$$a_n \leqq a \leqq A_n.$$

Если напримѣръ:

$$a_n = 0,\overbrace{33\ \ldots\ 33}^{(n \text{ дес. знаковъ}).} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^n}$$

и

$$A_n = 0,\overbrace{33\ \ldots\ 34}^{(n \text{ дес. знаковъ}).} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10^n},$$

то для всѣхъ значеній n имѣемъ:

$$a_n < a_{n+1} < \frac{1}{3} < A_{n+1} < A_n,$$

при чемъ

$$A_n - a_n = \frac{1}{10^n}$$

при достаточно большихъ значеніяхъ n можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ; слѣдовательно, $a = \frac{1}{3}$. Два различныхъ раціональныхъ числа a, a' никогда не могутъ находиться въ такомъ отношеніи къ одному и тому же двойному ряду, такъ какъ изъ

$$a_n \leqq a \leqq A_n \text{ и } a_n \leqq a' \leqq A_n$$

при произвольномъ значеніи n слѣдовало бы

$$|a' - a| \leqq A_n - a_n.$$

Такъ какъ правая часть при достаточно большихъ значеніяхъ n можетъ быть сдѣлана произвольно малой, то лѣвая часть не можетъ имѣть значенія, отличнаго отъ нуля.

Всякій разъ, когда существуетъ такое раціональное число a, что при всѣхъ значеніяхъ n

$$a_n \leqq a \leqq A_n,$$

мы это число a будемъ разсматривать, какъ значеніе двойного ряда $(a_n;\ A_n)$.

Обратно, для каждаго раціональнаго числа a можно построить такого рода двойные ряды; напримѣръ, двойной рядъ:

$$(a;\ a) \text{ или } \left(a - \frac{1}{n};\ a + \frac{1}{n}\right) \text{ и т. д.}$$

Но имѣются и такія двойные ряды $(a_n;\ A_n)$, которымъ не соотвѣтствуетъ ни одного такого раціональнаго числа, чтобы при любомъ n

$$a_n \leqq a \leqq A_n,$$

напримѣръ, приведенный ранѣе двойной рядъ, даваемый алгориѳмомъ опредѣленія чиселъ, замѣняющихъ $\sqrt{3}$. Если бы для этого ряда имѣлось такого рода раціональное число a, то изъ:

$$a_n \leqq a \leqq A_n$$

слѣдовало бы

$$a_n^2 \leqq a^2 \leqq A_n^2.$$

Но такъ какъ съ другой стороны и

$$a_n^2 < 3 < A_n^2,$$

то для всѣхъ значеній n должно было бы имѣть мѣсто

$$|a^2 - 3| < A_n^2 - a_n^2.$$

Правая часть неравенства при возрастаніи n становится меньше любой величины, слѣдовательно, постоянное значеніе разности $|a^2 - 3|$ могло бы равняться только нулю, т.-е. имѣлось бы раціональное число, квадратъ котораго равнялся бы 3, что невозможно, какъ уже указано въ гл. II, § 5 C, стр 102.

Мы покажемъ далѣе, что всѣ двойные ряды $(a_n;\ A_n)$, для которыхъ

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n,$$

и $A_n - a_n$ при достаточно большихъ значеніяхъ n можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ, даже въ томъ случаѣ, когда не существуетъ раціональнаго числа, удовлетворяющаго условію

$$a_n \leqq a \leqq A_n \text{ (при всѣхъ значеніяхъ } n),$$

соотвѣтственнымъ опредѣленіемъ равенства и понятій больше и меньше могутъ быть приведены въ опредѣленное, постоянное соотношеніе другъ съ другомъ и съ раціональными числами, и что съ этими рядами при соотвѣтствующемъ толкованіи дѣйствій можно оперировать, какъ съ раціональными числами. Поэтому такіе ряды мы тоже называемъ числами и именно **„ирраціональными числами“**, такъ какъ ихъ значеніями не являются никакія раціональныя числа. Разсмотрѣніе такихъ рядовъ, какъ чиселъ, есть конечно произвольный актъ нашего интеллекта, который дальше въ § 8 будетъ подробно обоснованъ приведенными тамъ доказательствами того, что опредѣленныя такимъ образомъ ирраціональныя числа, подобно прежде всего натуральнымъ, а затѣмъ и дробнымъ, и отрицательнымъ числамъ, даютъ совершенное отображеніе опредѣленныхъ соотношеній между вещами внѣшняго міра [1]). Окажется возможнымъ, напримѣръ, установить такое соотвѣтствіе между произвольными отрѣзками $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}, \cdots$ и ирраціональными числами α, β, $\gamma, \ldots$, что если $\mathfrak{A} \gtreqless \mathfrak{B}$ въ геометрическомъ смыслѣ, то и $\alpha \gtreqless \beta$ въ смыслѣ, который намъ еще предстоитъ опредѣлить, и если $\mathfrak{C}$ представляетъ геометрическую сумму отрѣзковъ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то и $\gamma = \alpha + \beta$ и т. д.

Начнемъ теперь съ включенія двойныхъ рядовъ въ рядъ раціональныхъ чиселъ. Пусть прежде всего двойной рядъ $(a_n; A_n)$ есть двойной рядъ, обладающій раціональнымъ значеніемъ a. Достаточное и необходимое условіе того, чтобы какое-либо раціональное число r было меньше, чѣмъ это раціональное a, состоитъ

[1]) G. Cantor (Math. Ann. Bd. 21. стр. 562) различаетъ два рода реальности числа, о которыхъ можетъ итти рѣчь. Въ одномъ случаѣ, говоритъ онъ, мы можемъ числа разсматривать дѣйствительными постольку, поскольку они, согласно опредѣленію, занимаютъ опредѣленное мѣсто въ нашемъ интеллектѣ, поскольку ихъ можно различать отъ остальныхъ составныхъ частей нашего мышленія и поскольку они находятся въ опредѣленныхъ соотношеніяхъ съ послѣдними. Реальность такого рода Cantor называетъ имманентной. Кромѣ того, числамъ можно приписывать реальность постольку, поскольку ихъ можно считать выраженіемъ или отображеніемъ событій и отношеній внѣшняго міра, противостоящихъ нашему интеллекту. Этотъ второй видъ реальности Cantor называетъ транзіентной. Вышеприведенное разъясненіе убѣждаетъ насъ въ томъ, что ирраціональнымъ числамъ, опредѣленнымъ такимъ образомъ, принадлежитъ не только имманентная, но и транзіентная реальность. Сравни также H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Лейпцигъ 1867, § 2, стр. 7.

въ томъ, что r меньше всѣхъ a_n, начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія индекса n; достаточное и необходимое условіе, чтобы $r > a$ состоитъ въ томъ, что r должно быть больше всѣхъ A_n, начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія индекса, и наконецъ, достаточное и необходимое условіе того, что $r = a$, заключается въ томъ, чтобы при всѣхъ значеніяхъ n одновременно было $r \geqq a_n$ и $r \leqq A_n$. Достаточность этихъ условій сама собой понятна; необходимость ихъ устанавливается слѣдующимъ образомъ. Выборомъ достаточно большихъ значеній n можно разность $a - a_n$ сдѣлать меньше любого положительнаго числа, а слѣдовательно, при $r < a$, и меньше, чѣмъ $a - r$. Но изъ $a - a_n < a - r$ слѣдуетъ, что $r < a_n$. Точно также и разность $A_n - a$, выборомъ достаточно большого значенія n, можетъ быть сдѣлана произвольно малой, слѣдовательно, при $r > a$, также меньше, чѣмъ $r - a$, откуда и слѣдуетъ что $r > A_n$.

Пусть $(a_n; A_n)$ означаетъ двойной рядъ, не имѣющій раціональнаго значенія, и слѣдовательно, представляетъ ирраціональное число, которое обозначимъ черезъ α[1]); опредѣлимъ теперь соотношеніе по величинѣ между α и какимъ-либо раціональнымъ числомъ r посредствомъ тѣхъ же отношеній между r и a_n, A_n, которыя, какъ только что доказано, оказываются необходимыми и достаточными для подобнаго соотношенія по величинѣ между r и двойнымъ рядомъ $(a_n; A_n)$ съ раціональнымъ значеніемъ, т.-е. мы назовемъ $r < \alpha$ тогда и только тогда, если r будетъ меньше всѣхъ a_n начиная съ какого-либо опредѣленнаго значенія индекса; $r > \alpha$ тогда и только тогда, когда r больше всѣхъ A_n начиная съ какого-либо значенія индекса. Отсюда сейчасъ же слѣдуетъ, что ирраціональное число α больше, чѣмъ всѣ члены a_n первой строки опредѣляющаго это число двойного ряда, и меньше, чѣмъ всѣ числа A_n второй строки этого ряда.

Два ирраціональныхъ числа $(a_n; A_n) = \alpha$ и $(b_n; B_n) = \beta$ должны считаться равными другъ другу, если каждое раціональное число, меньшее (большее) чѣмъ α, такъ же меньше (больше) чѣмъ β и каждое раціональное число, меньшее (большее) чѣмъ β, также меньше (больше) чѣмъ α, или, что то же самое, если нѣтъ ни одного раціональнаго числа, которое было бы меньше одного и больше другого ирраціональнаго числа.

---

[1]) Ирраціональныя числа въ этой главѣ мы будемъ обозначать вообще греческими буквами, раціональныя числа — латинскими.

Изъ этого опредѣленія сейчасъ же вытекаетъ то предложеніе, что, если $\beta = \alpha$ и $\alpha = \gamma$, то и $\beta = \gamma$; такъ какъ изъ $\beta = \alpha$ слѣдуетъ, что каждое раціональное число r, меньшее β, должно быть также меньше и α, и изъ $\alpha = \gamma$ слѣдуетъ далѣе, что оно также меньше γ. Такъ же ясно, что каждое раціональное число, меньшее γ, должно быть меньше и β, откуда слѣдуетъ, что $\beta = \gamma$.

Если имѣется раціональное число r, которое больше чѣмъ α и въ то же время меньше чѣмъ β, то мы говоримъ, что α меньше β или β больше α. Въ этомъ случаѣ не можетъ быть такого другого раціональнаго числа r', чтобы $r' < \alpha$ и $r' > \beta$; напротивъ, тогда каждое раціональное число r', меньшее α, будетъ также меньше β. Въ самомъ дѣлѣ, изъ $r' < \alpha$ слѣдуетъ $r' < a_n$, начиная съ опредѣленнаго значенія n, а изъ $r > \alpha$, вытекаетъ, что $r > A_n$, начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія индекса. А такъ какъ каждое A_n больше, чѣмъ любое изъ a_n, то должно быть $r > r'$, а такъ какъ $r < \beta$, то и $r' < \beta$. Такъ же доказывается, что каждое раціональное число, большее β, также больше и α. Слѣдовательно, этимъ вполнѣ устанавливается опредѣленіе равенства и неравенства ирраціональныхъ чиселъ. Изъ этого опредѣленія легко вывести также, что если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то необходимо должно быть $\alpha > \gamma$. Въ самомъ дѣлѣ, эти предпосылки обусловливаютъ существованіе такихъ раціональныхъ чиселъ r и r', что $\alpha > r > \beta$ и $\beta > r' > \gamma$, откуда непосредственно слѣдуетъ, что $r > r'$ а затѣмъ и что $\alpha > \gamma$.

Благодаря введеннымъ условіямъ, ирраціональныя числа располагаются теперь въ опредѣленномъ порядкѣ по отношенію другъ къ другу и къ раціональнымъ числамъ. Обѣ категоріи чиселъ, взятыя вмѣстѣ, образуютъ совокупность **дѣйствительныхъ** чиселъ. Каждое дѣйствительное число можно разсматривать, какъ значеніе какого-либо двойного ряда.

Изъ установленныхъ опредѣленій равенства и неравенства двухъ ирраціональныхъ чиселъ, мы можемъ вывести критеріи, позволяющіе рѣшать вопросъ о равенствѣ или неравенствѣ исключительно при помощи тѣхъ раціональныхъ чиселъ, которыя уже встрѣчаются въ двойныхъ рядахъ, опредѣляющихъ наши ирраціональныя числа. Если $\alpha = (a_n;\ A_n)$ и $\beta = (b_{n'};\ B_{n'})$ и если каждое изъ a_n меньше какого-либо $B_{n'}$, то прежде всего мы можемъ заключить, что α не можетъ быть больше β. Такъ, напримѣръ, если бы $\alpha > \beta$, то должно было бы существовать такое раціональное число r, что $r < \alpha$ и $r > \beta$; слѣдовательно, съ одной стороны r должно было бы быть меньше всѣхъ a_n, начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія индекса, и съ другой стороны, больше, чѣмъ всѣ $B_{n'}$, начиная также съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія индекса. Этотъ выводъ противорѣчитъ сдѣланному предположенію; слѣдовательно, въ случаѣ $a_n < B_{n'}$ (при всѣхъ значеніяхъ n и n') можетъ имѣть мѣсто только $\alpha < \beta$ или $\alpha = \beta$. Точно также получимъ изъ $b_{n'} < A_n$ (при всѣхъ значеніяхъ n и n') что или $\beta < \alpha$ или $\beta = \alpha$. Если теперь при всѣхъ значеніяхъ n, n' одновременно $a_n < B_{n'}$ и $b_{n'} < A_n$, то необходимо, чтобы $\alpha = \beta$. Обратно, изъ $\alpha = \beta$ легко заключить, что при всѣхъ значеніяхъ n, n' необходимо, чтобы было $a_n < B_{n'}$ и $b_{n'} < A_n$; такъ какъ каждое a_n меньше α, а слѣдовательно, согласно опредѣленію, данному для равенства двухъ ирраціональныхъ чиселъ, и каждое $a_n < \beta$; но β меньше чѣмъ какое-либо $B_{n'}$, слѣдовательно, $a_n < B_{n'}$; также оправдывается и $b_{n'} < A_n$ [1]).

Достаточное и необходимое условіе того, чтобы было $\alpha > \beta$, состоитъ въ томъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ n, n' также было и $a_n > B_{n'}$; такъ какъ, если $\alpha > \beta$, то имѣется раціональное число r такого рода, что $\alpha > r > \beta$, слѣдовательно, при достаточно большихъ значеніяхъ n, n' будемъ имѣть съ одной стороны, $a_n > r$ а, съ другой стороны, $r > B_{n'}$, откуда слѣдуетъ $a_n > B_{n'}$. Обратно, если намъ извѣстно, что $a_n > B_{n'}$ при достаточно большихъ значеніяхъ n, n', то изъ неравенствъ $\alpha > a_n$, $a_n > B_{n'}$, $B_n' > \beta$, слѣдуетъ, что должно быть $\alpha > \beta$.

Одно и тоже ирраціональное число можетъ являться значеніемъ для нѣсколькихъ двойныхъ рядовъ, члены которыхъ различны другъ отъ друга. Каждое ирраціональное число можетъ быть представлено и однозначно-опредѣленнымъ двойнымъ рядомъ, напримѣръ такимъ, члены котораго являлись бы систематическими дробями съ произвольно выбраннымъ основаніемъ g, каждый членъ имѣлъ бы однимъ десятичнымъ знакомъ больше, чѣмъ предыдущій и разность между соотвѣтствующими членами обѣихъ строкъ была бы равна единицѣ послѣдняго десятичнаго знака. Если ирраціональное число α опредѣлено двойнымъ ря-

---

[1]) Если оба двойныхъ ряда $(a_n ; A_n)$ и $(b_n ; B_n)$ имѣютъ раціональныя значенія a и b, то, начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія индекса n, всегда можетъ оказаться $a_n = a$, а съ извѣстнаго значенія индекса n' $B_n' = b$. Въ такомъ случаѣ изъ $a = b$ при соотвѣтствующихъ значеніяхъ индексовъ слѣдовало бы, что $a_n = B_n'$. Помимо этого случая, данный критерій справедливъ и для двойныхъ рядовъ съ раціональными значеніями.

домъ $(a_n;\ A_n)$, то мы можемъ, выбравъ произвольное положительное цѣлое число ν, взять индексъ n столь большимъ, чтобы $A_n - a_n < \frac{1}{g^\nu}$. Опредѣлимъ теперь такое положительное цѣлое число b_ν чтобы $\frac{b_\nu}{g^\nu} \leqq a_n < \frac{b_\nu + 1}{g^\nu}$, и, слѣдовательно, чтобы $A_n < \frac{b_\nu + 2}{g^\nu}$. Тогда получимъ: $\frac{b_\nu}{g^\nu} < \alpha < \frac{b_\nu + 2}{g^\nu}$. Теперь остается сравнить α съ $\frac{b_\nu + 1}{g^\nu}$; смотря потому, будетъ ли $\alpha \lessgtr \frac{b_\nu + 1}{g^\nu}$, имѣетъ мѣсто либо $\frac{b_\nu}{g^\nu} < \alpha < \frac{b_\nu + 1}{g^\nu}$, либо $\frac{b_\nu + 1}{g^\nu} < \alpha < \frac{b_\nu + 2}{g^\nu}$. Такимъ образомъ мы число α заключили между двумя дробями, знаменатель которыхъ есть g^ν, а единственнымъ образомъ опредѣлимые числители отличаются на 1. Если мы теперь обозначимъ меньшій изъ обоихъ числителей черезъ c_ν (слѣдовательно или $c_\nu = b_\nu$, или $c_\nu = b_\nu + 1$), то $\frac{c_\nu}{g^\nu} < \alpha < \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}$. Предполагая это вычисленіе выполненнымъ для всѣхъ положительныхъ цѣлыхъ значеній ν и для $\nu = 0$, получаемъ двойной рядъ $\left(\frac{c_\nu}{g^\nu};\ \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}\right)$, который благодаря неравенствамъ $\frac{c_\nu}{g^\nu} < \alpha < \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}$, справедливымъ при всѣхъ значеніяхъ ν, на самомъ дѣлѣ является равнымъ данному ирраціональному числу α. Легко видѣть что два двойныхъ ряда

$$\left(\frac{c_\nu}{g^\nu};\ \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}\right) \text{ и } \left(\frac{d_\nu}{g^\nu};\ \frac{d_\nu + 1}{g^\nu}\right),$$

члены которыхъ суть систематическія дроби съ однимъ и тѣмъ же основаніемъ g, могутъ только тогда представлять одно и то же ирраціональное число, если $c_\nu = d_\nu$, для всѣхъ значеній ν.

Мы, слѣдовательно, могли бы представить себѣ каждое ирраціональное число, приведеннымъ къ виду

$$\left(\frac{c_\nu}{g^\nu};\ \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}\right),$$

и согласно этому при дальнѣйшемъ разсмотрѣніи ирраціональныхъ чиселъ ограничиться двойными рядами такого рода. Но такъ какъ объясненіе дѣйствій для этихъ спеціальныхъ рядовъ конструируется сложнѣе, чѣмъ для рядовъ общаго вида, то мы предпочитаемъ сохранить послѣдніе. Но въ такомъ случаѣ мы обязаны при каждомъ дѣйствіи доказать, что результатъ его не измѣнится, если одинъ изъ встрѣчающихся двойныхъ рядовъ, замѣнить другимъ, съ тѣмъ же значеніемъ.

§ 2. Сложеніе.

Пусть $(a_n;\ A_n)=\alpha$ и $(b_n;\ B_n)=\beta$ два ирраціональныхъ числа. Покажемъ прежде всего, что двойной рядъ $(a_n+b_n;\ A_n+B_n)$, который образуется сложеніемъ двухъ соотвѣтствующихъ членовъ [1]), данныхъ двойныхъ рядовъ, обладаетъ свойствами [2]), необходимыми для опредѣленія нѣкотораго числа.

Изъ

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n$$

и

$$b_n \leqq b_{n+1} < B_{n+1} \leqq B_n$$

слѣдуетъ

$$a_n+b_n \leqq a_{n+1}+b_{n+1} < A_{n+1}+B_{n+1} \leqq A_n+B_n.$$

Разность

$$A_n+B_n-(a_n+b_n)=(A_n-a_n)+(B_n-b_n)$$

становится меньше любого даннаго значенія при возрастаніи n, такъ какъ при достаточно большихъ значеніяхъ n, какъ A_n-a_n, такъ и B_n-b_n могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми. Двойной рядъ $(a_n+b_n;\ A_n+B_n)$ опредѣляетъ, слѣдовательно, на самомъ дѣлѣ нѣкоторое число, и это число мы назовемъ **суммой** чиселъ α и β. Чтобы оправдать это названіе мы должны доказать, что

I. эта вновь опредѣленная сумма совпадаетъ съ суммой, опредѣленной въ области раціональныхъ чиселъ, если $(a_n;\ A_n)$ и $(b_n;\ B_n)$ раціональны.

II. ея значеніе не мѣняется, если одно изъ чиселъ α и β замѣнить какимъ-либо числомъ ему равнымъ;

III. коммутативный и ассоціативный законы [3]) справедливы и для новаго понятія суммы.

I. Если

$$(a_n;\ A_n)=r \text{ и } (b_n;\ B_n)=r'$$

---

[1]) Можно было бы притти къ двойному ряду того же значенія, если бы каждое a складывать съ каждымъ b и каждое A съ каждымъ B.

[2]) См. стр. 326 и 328.

[3]) См. гл. I § 3 B, стр. 11.

представляютъ изъ себя раціональныя числа, если, слѣдовательно для всѣхъ положительныхъ цѣлыхъ значеній n:

$$a_n \leqq r \leqq A_n,$$
$$b_n \leqq r' \leqq B_n,$$

то имѣютъ мѣсто для всѣхъ n и неравенства

$$a_n + b_n \leqq r + r' \leqq A_n + B_n;$$

т.-е. двойной рядъ $(a_n + b_n;\ A_n + B_n)$ равенъ суммѣ раціональныхъ чиселъ r и r' въ опредѣленномъ ранѣе смыслѣ.

II. Достаточное и необходимое условіе [1]) равенства двухъ ирраціональныхъ чиселъ

$$\beta = (b_n;\ B_n) \text{ и } \gamma = (c_{n''},\ C_{n''})$$

заключается въ неравенствахъ

$$b_{n'} < C_{n''},$$
$$c_{n''} < B_{n'}.$$

при всѣхъ положительныхъ цѣлыхъ значеніяхъ n' и n''), изъ которыхъ сейчасъ же слѣдуетъ

$$a_n + b_{n'} < A_n + C_{n''},$$
$$a_n + c_{n''} < A_n + B_{n'},$$

и слѣдовательно,

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma.$$

Примѣчаніе. Изъ предположенія $\beta > \gamma$ легко, пользуясь критеріемъ, указаннымъ на стр. 332, вывести неравенство:

$$\alpha + \beta > \alpha + \gamma,$$

такъ что изъ

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$$

необходимо слѣдуетъ

$$\beta = \gamma.$$

III. Такъ какъ

$$a_n + b_n = b_n + a_n \text{ и } A_n + B_n = B_n + A_n,$$

то и

$$(a_n + b_n;\ A_n + B_n) = (b_n + a_n;\ B_n + A_n),$$

---

[1]) См. стр. 332 и 333.

т. е.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Также получаемъ

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \gamma + \beta.$$

§ 3. Вычитаніе.

Къ вычитанію приводитъ задача, къ двумъ даннымъ числамъ $(a_n;\ A_n) = \alpha$ и $(b_n;\ B_n) = \beta$ подыскать такое третье число δ, чтобы

$$\beta + \delta = \alpha.$$

При помощи критерія равенства двухъ ирраціональныхъ чиселъ [1]), легко убѣдиться въ томъ, что

$$(b_n;\ B_n) + (a_n - B_n;\ A_n - b_n) = (a_n;\ A_n),$$

слѣдовательно,

$$\delta = (a_n - B_n;\ A_n - b_n).$$

То, что послѣдній двойной рядъ представляетъ опредѣленное число, доказывается такъ же, какъ и въ § 2 для $(a_n + b_n;\ A_n + B_n)$; что равенство $\beta + \delta = \alpha$ можетъ имѣть лишь **одно** рѣшеніе, слѣдуетъ изъ примѣчанія § 2, II.

Число $(a_n - B_n;\ A_n - b_n)$ называемъ разностью чиселъ $(a_n;\ A_n)$ и $(b_n;\ B_n)$ и пишемъ

$$(a_n;\ A_n) - (b_n;\ B_n) = (a_n - B_n;\ A_n - b_n).$$

Если

$$(a_n;\ A_n) = r \text{ и } (b_n;\ B_n) = r'$$

суть числа раціональныя, то изъ

$$\left.\begin{array}{l} a_n \leqq r \leqq A_n \\ B^n \geqq r' \geqq b_n \end{array}\right\} \text{ (при всѣхъ значеніяхъ } n),$$

слѣдуетъ, что

$$a_n - B_n \leqq r - r' \leqq A_n - b_n;$$

двойной рядъ $(a_n - B_n;\ A_n - b_n)$ представляетъ, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ разность раціональныхъ чиселъ r и r', взятую въ ранѣе опредѣленномъ смыслѣ.

Если

$$\alpha = \beta,$$

[1]) См. стр. 332.

то для всѣхъ значеній n

$$a_n < B_n,\ b_n < A_n,$$

слѣдовательно,

$$a_n - B_n < 0 < A_n - b_n,$$

т.-е.

$$\alpha - \beta = (a_n - B_n;\ A_n - b_n)$$

имѣетъ значеніе нуль.

Такъ какъ разность положительнаго числа $A_n - b_n$ и отрицательнаго числа $a_n - B_n$ можетъ быть сдѣлана при достаточно большихъ значеніяхъ n произвольно малой, то то же самое имѣетъ мѣсто и для $A_n - b_n$ и $|a_n - B_n|$.

Если

$$\alpha > \beta,$$

то при достаточно большихъ значеніяхъ n

$$a_n > B_n,$$

откуда непосредственно же слѣдуетъ, что $\alpha - \beta > 0$.

Точно также изъ

$$\alpha < \beta,$$

получается, что

$$\alpha - \beta < 0.$$

Если каждое ирраціональное число, бо́льшее нуля, назовемъ положительнымъ, каждое меньшее нуля — отрицательнымъ, то, можно будетъ сказать, что разность $\alpha - \beta$ положительна или отрицательна, смотря потому, будетъ ли α бо́льше или меньше β.

Каждое отрицательное число $(d_n;\ D_n)$ можетъ быть написано и въ такомъ видѣ

$$-(-D_n;\ -d_n),$$

гдѣ

$$(-D_n;\ -d_n) > 0.$$

Равенства

$$\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$$

и т. д. слѣдуютъ непосредственно изъ равенствъ, имѣющихъ мѣсто для раціональныхъ чиселъ:

$$a_n - (B_n + C_n) = a_n - B_n - C_n,$$
$$A_n - (b_n + c_n) = A_n - b_n - c_n \text{ и т. д.}$$

Мы уже знаемъ (стр. 328), что для всякаго значенія ν

$$a_\nu < \alpha < A_\nu.$$

Разность

$$\alpha - a_\nu = (a_n - a_\nu;\ A_n - a_\nu)$$

при достаточно большомъ ν можетъ быть сдѣлана меньше любого напередъ заданнаго сколь угодно малаго положительнаго числа, такъ какъ при достаточно большихъ значеніяхъ n, это имѣетъ мѣсто для $A_n - a_\nu$. Также при достаточно большихъ значеніяхъ ν, разность $A_\nu - \alpha$ становится меньше каждаго произвольно малаго заданнаго числа. Поэтому мы вправѣ α назвать предѣломъ, какъ ряда a_1, a_2, $a_3, \cdots$ такъ и ряда A_1, A_2, A_3, $A_4, \cdots$ и эти числа a_1, a_2, $a_3, \cdots$, A_1, A_2, $A_3 \cdots$, разматривать какъ приближенныя значенія α[1]).

§ 4. Умноженіе.

Пусть

$$\alpha = (a_n;\ A_n),\ \beta = (b_n;\ B_n)$$

суть положительныя ирраціональныя числа, и оба меньше, чѣмъ нѣкоторое раціональное число r. Ограничиваясь съ самаго начала для n только достаточно большими значеніями, мы можемъ достигнуть того, чтобы въ двойныхъ рядахъ встрѣчались лишь положительные члены.

Мы начнемъ съ доказательства, что двойной рядъ $(a_n b_n;\ A_n B_n)$ опредѣляетъ нѣкоторое число. Изъ

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n,$$
$$b_n \leqq b_{n+1} < B_{n+1} \leqq B_n$$

слѣдуетъ:

$$a_n b_n \leqq a_{n+1} b_{n+1} < A_{n+1} B_{n+1} \leqq A_n B_n.$$

Далѣе имѣемъ

$$A_n B_n - a_n b_n = (A_n - a_n) B_n + (B_n - b_n) a_n.$$

Такъ какъ $a_n <\ $, а при достаточно большихъ значеніяхъ n и $B_n < r$, то далѣе слѣдуетъ:

$$A_n B_n - a_n b_n < r\left[(A_n - a_n) + (B_n - b_n)\right].$$

---

1) О приближенныхъ значеніяхъ ирраціональнаго числа мы, конечно, не могли говорить до тѣхъ поръ, пока не дали опредѣленія самому ирраціональному числу.

Увеличивая n, можно сдѣлать произвольно малой правую часть неравенства, а. слѣдовательно, и лѣвую.

Число $(a_n b_n;\ A_n B_n)$, существованіе котораго только что доказано, опредѣляемъ, какъ **произведеніе** двухъ чиселъ $(a_n;\ A_n)$ и $(b_n;\ B_n)$.

Умножая, напримѣръ, на него самого, двойной рядъ

$$(1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\cdots;\ 1{,}8;\ 1{,}74;\ 1{,}733;\cdots),$$

къ которому насъ привелъ алгориѳмъ вычисленія такихъ чиселъ квадратъ которыхъ близокъ къ тремъ (см. стр. 326), получимъ

$$(1{,}7^2;\ 1{,}73^2;\ 1{,}732^2;\cdots;\ 1{,}8^2;\ 1{,}74^2;\ 1{,}733^2;\cdots).$$

Такъ какъ въ этомъ послѣднемъ двойномъ ряду каждый членъ первой группы менѣе трехъ, каждый членъ второй группы болѣе трехъ, то значеніе этого ряда есть раціональное число 3. Такимъ образомъ, ирраціональное число, опредѣленное двойнымъ рядомъ $(1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\cdots;\ 1{,}8;\ 1{,}74;\ 1{,}733;\cdots)$, со всею строгостью представляетъ квадратный корень изъ трехъ, не существующій въ области раціональныхъ чиселъ. Послѣ замѣчанія, сдѣланнаго въ концѣ предыдущаго §, мы можемъ теперь числа $1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732\cdots$ а также и $1{,}8;\ 1{,}74;\ 1{,}733;\cdots$ разсматривать, какъ приближенныя значенія $\sqrt{3}$ и утверждать также, что, напр.,

$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733.$$

Если оба ряда $(a_n,\ B_n;\ b_n,\ B_n)$ раціональны, то $(a_n b_n;\ A_n B_n)$ представляетъ произведеніе въ ранѣе опредѣленномъ смыслѣ; доказательство этого таково же, какъ и въ § 2, стр. 334.

Формулы

$$\alpha\beta = \beta\alpha;\ \alpha\beta\gamma = \alpha\gamma\beta;\ (\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

слѣдуютъ непосредственно изъ соотвѣтствующихъ формулъ для раціональныхъ чиселъ:

Если

$$\zeta = (z_n;\ Z_n) = 0 \text{ и } \alpha = (a_n;\ A_n)$$

есть нѣкоторое конечное положителаное число, то, при всѣхъ значеніяхъ n, для которыхъ $a_n > 0$, имѣетъ мѣсто,

$$a_n z_n < 0$$

и для всѣхъ n

$$A_n Z_n > 0;$$

слѣдовательно,

$$\alpha\zeta = 0.$$

Если же

$$\alpha = (a_n;\ A_n),\ \beta = (b_n;\ B_n)$$

соотвѣтственно больше, чѣмъ положительныя, отличныя отъ нуля числа r и r', то изъ

$$\left.\begin{array}{l} r < a_n \\ r' < b_n \end{array}\right\}\ \text{(при достаточно большихъ значеніяхъ } n\text{)},$$

слѣдуетъ, что

$$rr' < a_n b_n;$$

слѣдовательно, $\alpha\beta$ есть положительное число, отличное отъ нуля.

Пусть кромѣ того $\alpha = (a_n;\ A_n)$ снова будетъ произвольнымъ положительнымъ числомъ и $\varepsilon = (e_n;\ E_n) = 1$, слѣдовательно, $e_n < 1 < E_n$.

Тогда имѣемъ

$$\alpha\varepsilon = (a_n e_n;\ A_n E_n) = (a_n;\ A_n) = \alpha,$$

такъ какъ $a_n e_n < A_n$ и $a_n < A_n E_n$. (см. критерій равенства двухъ ирраціональныхъ чиселъ стр. 332).

Если α, β, γ числа положительныя и $\beta > \gamma$, то $\alpha\beta > \alpha\gamma$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ того, что $\beta > \gamma$ слѣдуетъ (ср. § 3), что число δ, удовлетворяющее равенству $\beta = \gamma + \delta$, есть число положительное. Такъ какъ теперь $\alpha\beta = \alpha\gamma + \alpha\delta$ и $\alpha\delta > 0$, то $\alpha\beta > \alpha\gamma$. Если въ частномъ случаѣ $\gamma = 1$, то при $\alpha > 0$, $\beta > 1$ слѣдуетъ, что $\alpha\beta > \alpha$; если $\beta = 1$, то при $\alpha > 0$, $\gamma < 1$ слѣдуетъ, что $\alpha\gamma < \alpha$. До сихъ поръ мы ограничивались умноженіемъ положительныхъ чиселъ.

Если одинъ изъ сомножителей или оба окажутся отрицательными, то мы абсолютное значеніе произведенія положимъ равнымъ произведенію абсолютныхъ значеній сомножителей, а знакъ опредѣлимъ согласно правиламъ, установленнымъ для умноженія относительныхъ чиселъ.

§ 5. Дѣленіе.

Пусть $\alpha = (a_n;\ A_n)$ и $\beta = (b_n;\ B_n)$ положительныя числа, изъ которыхъ α меньше нѣкотораго положительнаго, раціональнаго числа r и β больше положительнаго, отличнаго отъ нуля числа r'. Требуется найти число ξ, удовлетворяющее равенству

$$\beta\xi = \alpha.$$

Что нѣтъ болѣе одного такого числа, слѣдуетъ изъ того, что если $\xi' \gtrless \xi$, то и $\beta\xi' \gtrless \beta\xi$ (см. § 4). Мы утверждаемъ что это равенство удовлетворяется двойнымъ рядомъ $\left(\frac{a_n}{B_n};\ \frac{A_n}{b_n}\right)$.

Прежде всего слѣдуетъ показать, что этотъ двойной рядъ представляетъ нѣкоторое число.

Такъ какъ

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n$$

и

$$B_n \geqq B_{n+1} > b_{n+1} \geqq b_n,$$

то [1]):

$$\frac{a_n}{B_n} \leqq \frac{a_{n+1}}{B_{n+1}} < \frac{A_{n+1}}{b_{n+1}} \leqq \frac{A_n}{b_n}.$$

Разность

$$\frac{A_n}{b_n} - \frac{a_n}{B_n} = \frac{A_nB_n - a_nb_n}{b_nB_n} = \frac{(A_n - a_n)B_n + (B_n - b_n)a_n}{b_nB_n}$$

становится съ возрастаніемъ n меньше всякой данной величины, такъ какъ числитель можетъ быть сдѣланъ произвольно малымъ, знаменатель же при достаточно большихъ значеніяхъ n больше чѣмъ r'_2.

Далѣе, произведеніе

$$(b_n;\ B_n)\cdot\left(\frac{a_n}{B_n};\ \frac{A_n}{b_n}\right) = \left(a_n\cdot\frac{b_n}{B_n};\ A_n\cdot\frac{B_n}{b_n}\right) = (a_n;\ A_n),$$

такъ такъ для всѣхъ n

$$a_n\cdot\frac{b_n}{B_n} < A_n$$

и

$$a_n < A_n\cdot\frac{B_n}{b_n}.$$

Число $\left(\frac{a_n}{B_n};\ \frac{A_n}{b_n}\right)$, представляющее, слѣдовательно, на самомъ дѣлѣ рѣшеніе уравненія $\beta\xi = \alpha$, называемъ **частнымъ** $\alpha:\beta$ или $\frac{\alpha}{\beta}$.

1) Какъ и въ § 4 мы съ самаго начала предполагаемъ n ограниченнымъ такими большими значеніями, что $a_n > 0$, $b_n > 0$. A_n и B_n при всѣхъ значеніяхъ n положительны.

То, что вновь введенное понятіе частнаго, въ случаѣ раціональности чиселъ α и β, совпадаетъ съ понятіемъ, установленнымъ для раціональныхъ чиселъ, выводится такъ же, какъ въ §§ 2, 3, 4.

Изъ неравенствъ, преведенныхъ въ концѣ § 4, непосредственно слѣдуетъ, что $\frac{\alpha}{\beta} \gtreqless 1$ смотря потому, будетъ ли $\alpha \gtreqless \beta$.

Мы покажемъ лишь на примѣрѣ формулы

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma},$$

что соотношенія, имѣющія мѣсто для раціональныхъ частныхъ, остаются справедливыми и для частныхъ ирраціональныхъ чиселъ (при предположеніи, что $\alpha>\beta$).

По установленнымъ правиламъ находимъ:

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}=\left(\frac{a_n-B_n}{C_n};\ \frac{A_n-b_n}{c_n}\right)$$

и

$$\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\left(\frac{a_n}{C_n}-\frac{B_n}{c_n};\ \frac{A_n}{c_n}-\frac{b_n}{C_n}\right).$$

Но такъ какъ

$$\frac{a_n}{C_n}-\frac{B_n}{C_n}<\frac{A_n}{c_n}-\frac{b_n}{C_n}$$

и

$$\frac{a_n}{C_n}-\frac{B_n}{c_n}<\frac{A_n}{c_n}-\frac{b_n}{c_n},$$

то правыя, а, слѣдовательно, и лѣвыя части послѣднихъ двухъ равенствъ равны между собой.

Если дѣлимое и дѣлитель не будутъ оба положительными, то дѣлятъ абсолютное значеніе перваго на абсолютное значеніе второго, а знакъ частнаго опредѣляютъ по правилу знаковъ для дѣленія относительныхъ чиселъ (гл. IV, § 6).

§ 6. Вычисленіе раціональныхъ функцій ирраціональныхъ чиселъ.

Если по нѣсколькимъ ирраціональнымъ числамъ $\alpha=(a_n;\ A_n)$, $\beta=(b_n;\ B_n)$ и т. д. требуется вычислить повторнымъ примѣненіемъ четырехъ основныхъ дѣйствій новое число $\xi=(x_n;\ X_n)$, напримѣръ, $\xi = \frac{\alpha + \beta}{\gamma(\delta - \varepsilon)}$, то на основаніи правилъ, данныхъ въ §§ 2 — 5, слѣдуетъ соединить первое число со вторымъ, полученный результатъ съ третьимъ числомъ и т. д. Такъ, въ выше приведенномъ примѣрѣ получимъ:

$$\alpha + \beta = (a_n + b_n;\ A_n + B_n),$$
$$\gamma(\delta - \varepsilon) = [c_n(d_n - E_n);\ C_n(D_n - e_n)],$$
$$\xi = \left[\frac{a_n + b_n}{C_n(D_n - e_n)};\ \frac{A_n + B_n}{c_n(d_n - E_n)}\right].$$

При каждомъ вычисленіи, которое приходится выполнять, изъ членовъ a_n, A_n рядовъ, опредѣляющихъ ирраціональное число α, конечно, всегда извѣстно или опредѣлимо какимъ-либо алгориѳмомъ (какъ, напр., извлеченія корня) лишь ограниченное число. Но всегда возможно найти такія a_n, A_n, что они будутъ отличаться отъ α менѣе, чѣмъ на произвольно малое напередъ заданное положительное число. Если теперь въ заданной для вычисленія раціональной функціи замѣнить данныя ирраціональныя числа ихъ низшими приближенными значеніями, когда эти числа являются слагаемыми, множителями, уменьшаемыми и дѣлимыми, и ихъ высшими приближенными значеніями, когда они входятъ какъ вычитаемыя ими дѣлители (число, являющееся вычитаемымъ въ дѣлителѣ или дѣлителемъ въ вычитаемомъ — низшимъ приближеннымъ значеніемъ), то получимъ нѣкоторое раціональное число x_n, въ вышеприведенномъ примѣрѣ $x_n = \frac{a_n + b_n}{C_n(D_n - e_n)}$, меньше искомаго числа ξ. Если аналогичнымъ образомъ опредѣлить также раціональное число X_n, въ вышеприведенномъ примѣрѣ $X_n = \frac{A_n + B_n}{c_n(d_n - E_n)}$, большее чѣмъ ξ, то этимъ самымъ искомое число мы заключимъ между двумя раціональными границами, разность между которыми надлежащимъ выборомъ приближенныхъ значеній, можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой.

Съ какой точностью слѣдуетъ брать приближенныя значенія, чтобы достигнуть заданной точности результата, разобрано уже въ гл. III, § 8 В.

§ 7. Возведеніе въ степень, извлеченіе корня и логариѳмированіе.

A. Двойные ряды, члены которыхъ числа ирраціональныя.

Чтобы стало возможнымъ опредѣлить степень и для ирраціональнаго значенія показателя, докажемъ слѣдующее

Предложеніе: Каждому двойному ряду $(a_n;\ A_n)$, состоящему изъ неограниченнаго числа ирраціональныхъ членовъ, для котораго

$$a_n < a_{n+1} < A_{n+1} < A_n$$

при всѣхъ значеніяхъ n, и разность

$$A_n - a_n$$

при достаточно большихъ значеніяхъ n произвольно мала, всегда соотвѣтствуетъ такое единственное опредѣленное (раціональное или ирраціональное) число ρ, что

$$a_n < \rho < A_n$$

при всѣхъ значеніяхъ n.

Это число ρ мы и разсматриваемъ (согласно § 1, стр. 327, 328), какъ значеніе двойного ряда $(a_n;\ A_n)$.

Доказательство: Неравенства

$$a_n < a_{n+1} < a_{n+2};\ A_n > A_{n+1} > A_{n+2}$$

показываютъ по § 1, стр. 331, что существуютъ раціональныя числа r_n, r_{n+1}, R_n, R_{n+1}, удовлетворяющія соотношеніямъ

$$a_n < r_n < a_{n+1} < r_{n+1} < a_{n+2};\ A_n > R_n > A_{n+1} > R_{n+1} > A_{n+2},$$

изъ которыхъ, при всѣхъ значеніяхъ n, слѣдуетъ:

$$r_n < r_{n+1},\ \text{а также и}\ R_n < R_{n+1}$$

и такъ какъ $a_{n+1} < A_{n+1}$, то и

$$r_n < R_n.$$

Такъ какъ

$$a_n < r_n < R_n < A_n$$

и разность $A_n - a_n$, по предположенію, выборомъ достаточно большихъ значеній n можетъ быть сдѣлана произвольно малой, то то же самое имѣетъ мѣсто и для $R_n - r_n$. Этимъ доказано, что двойной рядъ $(r_n;\ R_n)$ обладаетъ свойствами, необходимыми для опредѣленія нѣкотораго числа ρ. Изъ

$$a_n < r_n \leqq \rho \leqq R_n < A_n$$

непосредственно вытекаетъ справедливость предложенія, которое требовалось доказать.

Такимъ образомъ, въ то время, какъ двойные ряды, состоящіе изъ раціональныхъ чиселъ, выводятъ насъ, вообще говоря, изъ раціональной области, разсмотрѣнные теперь двойные ряды съ ирраціональными членами не приводятъ насъ опять къ новымъ числамъ.

Примѣчаніе 1. Числа r_n, R_n введенныя при доказательствѣ не были опредѣлены однозначно; если же, тѣмъ не менѣе вмѣсто нихъ взять другія r_n', R_n', удовлетворяющія тѣмъ же неравенствамъ, то легко усмотрѣть, что

$$(r_n';\ R_n') = (r_n;\ R_n) = \rho.$$

Примѣчаніе 2. Если въ двойномъ рядѣ $(a_n;\ A_n)$, a_n или A_n, начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія индекса n, сохраняютъ одно и то же значеніе, то въ первомъ случаѣ ρ есть большее число первой группы, а въ другомъ случаѣ — меньшее число второй группы двойного ряда.

Примѣчаніе 3. Дѣйствія надъ двойными рядами ирраціональныхъ чиселъ, выполняются такъ же, какъ и надъ рядами раціональныхъ чиселъ. Если a_n, A_n, a_n', A_n' означаютъ ирраціональныя числа, а r_n, R_n, r_n', R_n' — раціональныя числа, и если

$$(a_n;\ A_n) = (r_n;\ R_n) = \rho; \quad (a_n';\ A_n') = (r_n';\ R_n') = \rho',$$

то имѣемъ напримѣръ:

$$\rho + \rho' = (a_n + a_n';\ A_n + A_n'),$$
$$\rho\rho' = (a_n a_n';\ A_n A_n').$$

Доказательства привести не трудно.

Далѣе, тогда и только тогда

$$(a_n;\ A_n) = (a_n';\ A_n'),$$

если при всѣхъ значеніяхъ n

$$a_n < A_n', \quad a_n' < A_n.$$

B. Степени съ цѣлыми показателями.

Изъ опредѣленія произведенія двухъ ирраціональныхъ чиселъ (§ 4) непосредственно вытекаетъ, что если $\alpha = (a_n;\ A_n)$ означаетъ ирраціональное, а m положительное цѣлое число, то

$$\alpha^m = (a_n{}^m;\ A_n{}^m)$$

и

$$\alpha^{-m} = (A_n{}^{-m};\ a_n{}^{-m}).$$

Доказательства правилъ дѣйствій со степенями (см. гл. I, § 7 B) не представляютъ никакихъ трудностей. Легко выводится и справедливость формулъ бинома и полинома (гл. V, § 2, C) въ томъ случаѣ, когда биномъ или полиномъ представляютъ изъ себя сумму ирраціональныхъ чиселъ.

При $m > l$ и $\alpha > 0$ имѣетъ мѣсто одновременно съ $\alpha \gtreqless 1$ также и $\alpha^m \gtreqless \alpha^l$. (См. неравенство въ концѣ § 4).

C. Корни съ цѣлыми показателями, или степени съ раціональными показателями.

Въ существованіи положительнаго числа α, m-тая степень котораго равна положительному раціональному или ирраціональному числу z, легко убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Если образовать рядъ m-ыхъ степеней натуральныхъ чиселъ:

$$0,\ 1^m,\ 2^m,\ 3^m, \cdots,$$

то z или встрѣчается въ этомъ ряду, или въ немъ есть два послѣдовательныхъ члена, между которыми заключается z. Въ первомъ случаѣ $\sqrt[m]{z}$ есть число цѣлое; во второмъ случаѣ же допустимъ, что указанные два члена суть

$$a_0{}^m \text{ и } A_0{}^m,\ \text{слѣдовательно,}\ a_0{}^m < z < A_0{}^m,\ A_0 - a_0 = 1.$$

Вычислимъ дальше:

$$a_0{}^m,\ \left(a_0 + \frac{1}{10}\right)^m,\ \left(a_0 + \frac{2}{10}\right)^m, \cdots,\ \left(a_0 + \frac{9}{10}\right)^m,\ A_0{}^m.$$

z либо есть членъ этого ряда и тогда $\sqrt[m]{z}$ равенъ цѣлому числу десятыхъ долей, либо лежитъ между двумя его послѣдовательными членами, которые обозначимъ посредствомъ $a_1{}^m$ и $A_1{}^m \left(A_1 - a_1 = \frac{1}{10}\right)$.

Въ послѣднемъ случаѣ составимъ новый рядъ

$$a_1^m,\ \left(a_1+\frac{1}{100}\right)^m,\ \left(a_1+\frac{2}{100}\right)^m,\cdots,\ \left(a_1+\frac{9}{100}\right)^m,\ A_1^m$$

и повторимъ то же разсужденіе. Продолжая поступать подобнымъ образомъ, найдемъ далѣе для значенія $\sqrt[m]{z}$ или конечное десятичное число, или два безконечныхъ ряда раціональныхъ чиселъ $a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots;\ A_0,\ A_1,\ A_2,\cdots$, удовлетворяющіе слѣдующимъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n \\ A_n - a_n = \frac{1}{10^n} \\ a_n^m < z < A_n^m \end{aligned}\right\} \text{(при всѣхъ значеніяхъ } n).$$

Число, представленное двойнымъ рядомъ $(a_n;\ A_n)$, и есть искомое, такъ какъ въ силу послѣдняго неравенства его m-ая степень равна z. Только что приведенный пріемъ даетъ это число въ спеціальной формѣ, разобранной въ концѣ § 1. (За основаніе систематическихъ дробей, мы могли бы, конечно, вмѣсто 10 принять и какое либо другое положительное цѣлое число, за исключеніемъ 1).

Если m число нечетное, то $\alpha=(a_n;\ A_n)$ есть единственное дѣйствительное число, m-ая степень котораго имѣетъ значеніе z, какъ это слѣдуетъ изъ послѣдняго примѣчанія въ B; если, напротивъ, m четное, то и $x=-(a_n;\ A_n)$ удовлетворяетъ равенству $x^m=z$. Если же z число отрицательное и m нечетное, то опредѣлимъ α такъ, чтобы $\alpha^m=-z$; тогда будемъ имѣть $(-\alpha)^m=z$; если же, наконецъ, z отрицательное и m четное, то нѣтъ ни одного дѣйствительнаго числа, m-ая степень котораго равнялась бы z. (Ср. гл. 4, § 7 B, стр. 191 и 192).

Если теперь z, z', означаютъ положительныя числа и $(a_n,\ A_n)$, $(a_n',\ A_n')$ положительныя значенія $\sqrt[m]{z}$ и $\sqrt[m]{z'}$, то согласно опредѣленію произведенія получимъ:

$$\sqrt[m]{z}\cdot\sqrt[m]{z'}=(a_na_n';\ A_nA_n').$$

Съ другой стороны, изъ неравенствъ

$$\begin{array}{rc} & a_n^m < z < A_n^m, \\ & a_n'^m < z' < A_n'^m, \\ \hline \text{вытекаетъ, что} & (a_na_n')^m < zz' < (A_nA_n')^m: \end{array}$$

т.-е. положительное значеніе $\sqrt[m]{zz'}$ равно $(a_n a_n'; A_n A_n')$; этимъ со всей строгостью доказывается справедливость равенства

$$\sqrt[m]{z} \cdot \sqrt[m]{z'} = \sqrt[m]{zz'}.$$

Такъ же просто получаются остальныя формулы, относящіяся къ абсолютнымъ значеніямъ корней изъ положительныхъ чиселъ (гл. I, § 8 B).

Пусть, для конечнаго опредѣленнаго (раціональнаго или ирраціональнаго) числа z, бóльшаго единицы, и положительнаго цѣлаго значенія q имѣемъ

$$\sqrt[q]{z} = 1 + \delta_q.$$

δ_q есть положительное число, зависящее отъ q и убывающее съ возрастаніемъ q. Если бы δ_q оставалась для всѣхъ значеній q больше нѣкотораго опредѣленнаго положительнаго числа ε, то для всѣхъ значеній q было бы

$$\sqrt[q]{z} > 1 + \varepsilon$$

или

$$z > (1 + \varepsilon)^q > 1 + q\varepsilon$$

(гл. V, § 2 C, стр. 218).

Правая часть этого неравенства неограниченно возрастаетъ при достаточно большихъ значеніяхъ q, а, слѣдовательно, не можетъ оставаться меньше z; поэтому δ_q при достаточно большихъ значеніяхъ q, должно становиться менѣе любого даннаго числа.

Если

$$0 < z < 1, \text{ то } \frac{1}{z} > 1.$$

Полагая

$$\sqrt[q]{\frac{1}{z}} = 1 + \delta'_q,$$

будемъ имѣть, что δ_q' при всѣхъ значеніяхъ q положительно и при достаточно большихъ значеніяхъ q будетъ произвольно мало. Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ:

$$\sqrt[q]{z} = \frac{1}{1 + \delta_q'} = 1 - \frac{\delta_q'}{1 + \delta_q'};$$

т.-е., $\sqrt[q]{z}$ при всѣхъ значеніяхъ q меньше 1, но при достаточно большихъ значеніяхъ q подходитъ къ 1 сколь угодно близко.

Равенство

$$z^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{z})^p$$

(ср. гл. II, § 5 B, стр. 97 и т. д.) опредѣляетъ теперь и степени съ раціональными показателями для любого положительнаго основанія z.

Если q четно, а p нечетно, то $(\sqrt[q]{z})^p$ имѣетъ два различныхъ дѣйствительныхъ значенія; мы въ этой главѣ подъ $z^{\frac{p}{q}}$ будемъ всегда разумѣть лишь положительное значеніе.

Если $\frac{r}{s} > \frac{p}{q}$, гдѣ p, q, r, s означаютъ положительныя цѣлыя числа, то одновременно съ $z \gtreqless 1$ будетъ и $z^{\frac{r}{s}} \gtreqless z^{\frac{p}{q}}$ (ср. послѣднее замѣчаніе въ B).

D. Степени съ ирраціональными показателями.

Если z означаетъ произвольное, раціональное или ирраціональное, число, бóльшее 1, и если $\mu = (m_n;\ M_n)$ есть нѣкоторое ирраціональное число, то подъ степенью мы z^μ понимаемъ значеніе двойного ряда $(z^{m_n};\ z^{M_n})$. Чтобы убѣдиться въ допустимости этого опредѣленія, докажемъ мы прежде всего, что двойной рядъ (состоящій изъ ирраціональныхъ членовъ) обладаетъ свойствами, необходимыми для опредѣленія нѣкотораго числа. (§ 7, A, стр. 344).

Такъ какъ

$$m_n < m_{n+1} < M_{n+1} < M_n,$$

то изъ послѣдняго примѣчанія въ C, слѣдуетъ, что

$$z^{m_n} < z^{m_{n+1}} < z^{M_{n+1}} < z^{M_n}.$$

Разность $M_n - m_n$ подборомъ достаточно большихъ значеній n можетъ быть сдѣлана менѣе $\frac{1}{q}$, гдѣ q произвольно большое положительное цѣлое число. Поэтому, по § 7, C, положительная разность $z^{M_n - m_n} - 1$, а вслѣдствіе равенства

$$z^{M_n} - z^{m_n} = z^{m_n}(z^{M_n - m_n} - 1),$$

также и разность $z^{M_n} - z^{m_n}$ будутъ произвольно малы при достаточно большомъ n.

Слѣдовательно двойной рядъ $(z^{m_n}; z^{M_n})$ опредѣляетъ на самомъ дѣлѣ по § 7 A, стр. 344, нѣкоторое число, которое можетъ быть представлено и при помощи двойного ряда раціональныхъ чиселъ. Это число всегда положительно, такъ какъ для всѣхъ значеній n,

$$z^{m_n} > 0.$$

При $z = 1$ получимъ $z^{\mu} = 1$.

Если

$$(m_n;\ M_n) = (m_n';\ M_n'),$$

то также и

$$(z^{m_n};\ z^{M_n}) = (z^{m'_n};\ z^{M'_n}).$$

но такъ какъ на основаніи сдѣланнаго предположенія прежде всего

$$m_n < M_n',\quad m_n' < M_n,$$

то также и

$$z^{m_n} < z^{M'_n},\quad z^{m'_n} < z^{M_n},$$

откуда на основаніи послѣдняго примѣчанія въ § 7 A, стр. 346, вытекаетъ справедливость нашего утвержденія.

Если двойной рядъ (m_n, M_n) равенъ нѣкоторому раціональному числу m, то изъ

$$\text{заключаемъ, что}\quad \left.\begin{aligned} m_n &\leqq m \leqq M_n, \\ z^{m_n} &\leqq z^m \leqq z^{M_n}, \end{aligned}\right\}\quad \text{(при всѣхъ значеніяхъ } n\text{)},$$

слѣдовательно,

$$(z^{m_n};\ z^{M_n}) = z^m.$$

Если

$$0 < z < 1 \ \text{ и } \ \mu = (m_n;\ M_n),$$

то мы устанавливаемъ опредѣленіе

$$z^{\mu} = (z^{M_n};\ z^{m_n}).$$

По предъидущему (см. особенно § 7 A, прим. 3) легко показать, что правила дѣйствій со степенями справедливы и для степеней съ ирраціональными показателями.

Что касается примѣненія ихъ къ опредѣленію логариѳма, то придется добавить лишь слѣдующую

теорему. И въ томъ случаѣ, когда μ и λ оказываются числами ирраціональными, при $\mu > \lambda$ и $z \gtreqless 1$ всегда

$$z^{\mu} \gtreqless z^{\lambda}.$$

Доказательство: Пусть, во первыхъ,

$$z > 1 \text{ и } \mu = (m_n;\ M_n);\ \lambda = (l_n;\ L_n).$$

Если $\mu > \lambda$, то существуетъ (§ 1, стр. 331) нѣкоторое раціональное число r и цѣлыя числа N и N' такого рода, что

$$r < m_n, \text{ при } n \geqq N,$$
$$r > L_n, \text{ при } n \geqq N'.$$

Слѣдовательно, для всѣхъ значеній n, большихъ N и N', имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} z^r < z^{m_n}, \\ z^r > z^{L_n} \end{array}\right\} \text{(послѣдняя теорема § 7 C).}$$

Но такъ какъ

$$z^{m_n} < z^{\mu}$$

и

$$z^{L_n} > z^{\lambda} \quad \text{(при всѣхъ значеніяхъ } n\text{),}$$

то

$$z^{\mu} > z^{\lambda}.$$

Для случая $0 < z < 1$ доказательство вполнѣ аналогично. Теорема остается справедливой, если одно изъ чиселъ μ и λ раціональное, а другое ирраціональное.

Смыслъ степени съ отрицательнымъ основаніемъ и ирраціональнымъ показателемъ, мы можемъ выяснить лишь въ слѣдующей главѣ.

E. Логариѳмы.

Мы назвали μ логариѳмомъ числа a при основаніи z, если имѣетъ мѣсто равенство:

$$z^{\mu} = a.$$

Такъ какъ, съ одной стороны, до сихъ поръ мы опредѣляли степень съ произвольнымъ дѣйствительнымъ показателемъ лишь при положительномъ основаніи и, съ другой стороны, значеніе такой степени, опредѣленное въ D всегда положительно, то мы ограничимся лишь положительными, раціональными или ирраціональными, значеніями, какъ для z, такъ и для a; мы исключимъ еще также и значеніе $z = 1$, такъ какъ для всякаго μ, согласно D, $1^\mu = 1$.

Такія предположенія даютъ возможность всегда найти одно дѣйствительное число μ, удовлетворяющее равенству $z^\mu = a$. Съ самаго начала ясно, что не существуетъ болѣе одного такого числа, такъ какъ съ возрастаніемъ μ, степень z^μ, въ случаѣ $z > 1$, постоянно растетъ и въ случаѣ $z < 1$ — постоянно убываетъ.

Предполагая сначала $z > 1$ и $a > 1$, образуемъ степени:

$$z^0,\ z^1,\ z^2,\ z^3, \dots$$

и смотримъ, не будетъ ли одинъ изъ членовъ этого ряда равенъ одной изъ степеней a^{g^0}, a^{g^1}, a^{g^2}, $a^{g^3}, \dots\ a^{g^n}, \dots$ гдѣ g означаетъ произвольно выбранное положительное цѣлое число ($\leqq 2$). Если напримѣръ

$$z^k = a^{g^n} = z^{\mu \cdot g^n},$$

то для μ находимъ раціональное значеніе $\frac{k}{g^n}$.

Если ни для какого значенія n степень a^{g^n} не равна степени z съ цѣлымъ показателемъ, то слѣдуетъ установить между какими степенями z лежитъ степень a^{g^n} при **всякомъ** значеніи n. Если для любого n

$$z^{m_n} < a^{g^n} < z^{M_n},\ M_n - m_n = 1,$$

или

$$z^{m_n} < z^{\mu \cdot g^n} < z^{M_n},$$

то:

$$\frac{m_n}{g^n} < \mu < \frac{M_n}{g^n},\quad \frac{M_n}{g^n} - \frac{m_n}{g^n} = \frac{1}{g^n},$$

т.-е. искомое число μ равно значенію двойного ряда

$$\left(\frac{m_n}{g^n};\ \frac{M_n}{g^n}\right).$$

Чтобы быть увѣреннымъ, что этотъ рядъ дѣйствительно опредѣляетъ нѣкоторое число намъ слѣдуетъ еще показать, что

$$\frac{m_{n+1}}{g^{n+1}} \geqq \frac{m_n}{g^n}$$

и

$$\frac{M_{n+1}}{g^{n+1}} \leqq \frac{M_n}{g^n}.$$

Изъ неравенствъ

$$z^{m_n} < a^{g^n} < z^{m_n+1}$$

и

$$z^{m_{n+1}} < (a^{g^n})^g < z^{m_{n+1}+1}$$

заключаемъ, что

$$z^{m_{n+1}+1} < z^{m_n g}, \text{ слѣдовательно, } m_{n+1} \geqq m_n g$$

и

$$z^{m_{n+1}} < z^{(m_n+1)g}, \text{ слѣдовательно, } M_{n+1} \leqq M_n g,$$

откуда непосредственно вытекаютъ тѣ соотношенія, которыя требуется доказать.

Въ случаѣ $0 < a < 1$, опредѣлимъ число μ', удовлетворяющее равенству $z^{\mu'} = \frac{1}{a}$. Тогда $\mu = -\mu'$ удовлетворяетъ равенству $z^\mu = a$. Также, если $0 < z < 1$ и $\left(\frac{1}{z}\right)^{\mu'} = a$, то $\mu = -\mu'$ удовлетворяетъ равенству $z^\mu = a$. Формулы логариѳмированія (ср. гл. I, § 8 С, стр. 35) получаются непосредственно изъ правилъ дѣйствій со степенями.

Такъ какъ при достаточно большихъ значеніяхъ n раціональныя числа $\frac{m_n}{g^n}$ и $\frac{M_n}{g^n}$ произвольно близко подходятъ къ ирраціональному числу $\mu = \left(\frac{m_n}{g^n}; \frac{M_n}{g^n}\right)$ (ср. § 3, стр. 336), то мы можемъ ихъ разсматривать теперь, какъ приближенныя значенія логариѳма. Это тѣ же числа, которыя мы раньше въ области раціональныхъ чиселъ (гл. V, § 5 С) нашли какъ рѣшеніе уравненій (въ частности при $g = 2$ и $g = 10$), получающихся изъ $z^\mu = a$, если z и a измѣнить на надлежащимъ образомъ выбранныя произвольно малыя значенія, и которыя при практическихъ вычисленіяхъ принято разсматривать именно, какъ логариѳмы числа a при основаніи z.

§ 8. Отношенія величинъ, какъ дѣйствительныя числа.

Докажемъ теперь, высказанное въ § 1 (стр. 329) утвержденіе, что дѣйствительныя числа, разсмотрѣнныя въ этой главѣ, даютъ полное отображеніе опредѣленныхъ отношеній между величинами какого-либо рода[1]), напр., между линіями, поверхностями, тѣлами, углами и т. д.

1) Въ этомъ параграфѣ мы будемъ всегда обозначать ихъ большими нѣмецкими буквами.

Если возможно къ двумъ величинамъ одного и того же рода $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ подъискать такую третью $\mathfrak{M}$, чтобы

$$\mathfrak{A} = a\mathfrak{M},\ \mathfrak{E} = e\mathfrak{M},$$

гдѣ a и e обозначаютъ положительныя цѣлыя числа, то $\mathfrak{M}$ называется общей мѣрой $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{E}$, а самыя величины называются „соизмѣримыми". Если найдется еще величина $\mathfrak{M}'$ того же рода, и притомъ такая, что

$$\mathfrak{A} = a'\mathfrak{M}',\ \mathfrak{E} = e'\mathfrak{M}',$$

гдѣ a', e' также положительныя цѣлыя числа, то

$$ae' = a'e \text{ или } \frac{a}{e} = \frac{a'}{e'}.$$

Общее значеніе дробей $\frac{a}{e}$, $\frac{a'}{e'}$ называется отношеніемъ величины $\mathfrak{A}$ къ величинѣ $\mathfrak{E}$; мы обозначаемъ его $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E})$. Если a, e, какъ мы это теперь и предположимъ, не имѣютъ общаго дѣлителя, то (по гл. II, § 2, стр. 88)

$$a' = ka,\quad e' = ke \quad (k \text{ есть число цѣлое}),$$

слѣдовательно,

$$\mathfrak{M} = k\mathfrak{M}',$$

т.-е. $\mathfrak{M}$ есть кратное каждой другой общей мѣры и называется поэтому наибольшей общей мѣрой $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{E}$.

Въ главѣ V, § 4 B, мы при помощи извѣстной цѣпи равенствъ (стр. 239) разлагали частное $\frac{a}{e}$ въ обыкновенную, или правильную, непрерывную дробь $k_0 + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_{i-1}} + \frac{1}{k_i}$.

Такъ какъ теперь,

если $a = a'$, то и $a\mathfrak{M} = a'\mathfrak{M}$,

если $a = a' + a''$, то и $a\mathfrak{M} = a'\mathfrak{M} = a'\mathfrak{M} + a''\mathfrak{M}$,

и если $a = a'a''$, то и $a\mathfrak{M} = a'(a''\mathfrak{M})$,

то равенствамъ стр. 239, соотвѣтствуютъ слѣдующія соотношенія величинъ:

$$\begin{aligned} a\mathfrak{M} &= k_0(e\mathfrak{M}) + e_1\mathfrak{M}, \\ e\mathfrak{M} &= k_1(e_1\mathfrak{M}) + e_2\mathfrak{M}, \\ e_1\mathfrak{M} &= k_2(e_2\mathfrak{M}) + e_3\mathfrak{M}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$e_{i-2}\mathfrak{M} = k_{i-1}(e_{i-1}\mathfrak{M}) + e_i\mathfrak{M},$$
$$e_{i-1}\mathfrak{M} = k_i(e_i\mathfrak{M}),$$

или, если вмѣсто $a\mathfrak{M}$ снова написать $\mathfrak{A}$, а вмѣсто $e\mathfrak{M}$ снова $\mathfrak{E}$ и въ то-же время положить:

$$e_1\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_1, \ldots, \; e_{i-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_{i-1}, \; e_i\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_i = \mathfrak{M},$$

то:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= k_0\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1, \\ \mathfrak{E} &= k_1\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2, \\ \mathfrak{E}_1 &= k_2\mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{E}_{i-2} &= k_{i-1}\mathfrak{E}_{i-1} + \mathfrak{E}_i, \\ \mathfrak{E}_{i-1} &= k_i\mathfrak{E}_i = k_i\mathfrak{M}, \end{aligned} \tag{I}$$

гдѣ въ силу неравенствъ

$$e > e_1 > e_2 > \cdots > e_i,$$

также

$$\mathfrak{E} > \mathfrak{E}_1 > \mathfrak{E}_2 > \cdots > \mathfrak{E}_i.$$

Равенства (I) показываютъ, что для двухъ соизмѣримыхъ величинъ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ можно найти наибольшую общую мѣру такимъ же способомъ, какъ и для двухъ цѣлыхъ чиселъ. Обратно, если примѣнить этотъ пріемъ къ двумъ величинамъ одинаковаго рода $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ и если, послѣ конечнаго числа операцій, найдется нѣкоторая величина $\mathfrak{E}_i$, которая въ предыдущей $\mathfrak{E}_{i-1}$ содержится цѣлое число разъ, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{E}$ соизмѣримы, $\mathfrak{E}_i$ наибольшая общая мѣра величинъ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{E}$, и непрерывная дробь $k_0 \dot{+} \frac{1}{k_1} \dot{+} \frac{1}{k_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{k_i}$, частныя которой получились при этомъ процессѣ, является значеніемъ отношенія $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E})$.

Какъ уже было сказано въ § 1 этой главы (стр. 394), существуютъ также пары величинъ такого рода, которыя завѣдомо несоизмѣримы, напримѣръ, діагональ и сторона квадрата. Если подобному процессу подвергнуть двѣ величины такого рода, что, очевидно, всегда возможно, то, по ранѣе сказанному, цѣпь равенствъ никогда не можетъ закончиться.

Соотвѣтственно этому получаемъ простирающуюся безъ конца непрерывную дробь, вмѣсто конечной непрерывной дроби, представляющей въ случаѣ соизмѣримыхъ величинъ значеніе ихъ отношенія. Какой смыслъ, какое значеніе имѣетъ такая безконечная дробь? Хотя въ главѣ V, § 4, мы имѣли дѣло лишь съ конечными непрерывными дробями, тѣмъ не менѣе мы ни разу не ссылались на конечность разложенія непрерывной дроби при выводѣ слѣдующихъ соотношеній между числителями Z_μ и знаменателями N_μ подходящихъ дробей U_η:

$$Z_\mu = k_\mu Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2},\quad N_\mu = k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2} \text{ (см. (II) стр. 243);}$$

$$U_\mu - U_{\mu-1} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{N_\mu \cdot N_{\mu-1}} \text{ (см. (IV) стр. 245);}$$

$$U_\mu - U_{\mu-2} = \frac{(-1)^\mu k_\mu}{N_\mu \cdot N_{\mu-2}} \text{ (см. стр. 247).}$$

Слѣдовательно, этими формулами мы можемъ пользоваться и въ томъ случаѣ, когда процессъ разложенія въ непрерывную дробь не прерывается. Оставляя теперь совершенно открытымъ вопросъ о числѣ равенствъ въ системѣ I на стр. 355, выразимъ изъ перваго равенства $\mathfrak{E}_1$, изъ второго $\mathfrak{E}_2$, изъ третьяго $\mathfrak{E}_3$ и т. д. черезъ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{E}$; мы получимъ:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{A} - k_0\mathfrak{E} = N_0\mathfrak{A} - Z_0\mathfrak{E};$$
$$-\mathfrak{E}_2 = k_1\mathfrak{A} - (k_0k_1 + 1)\,\mathfrak{E} = N_1\mathfrak{A} - Z_1\mathfrak{E};$$
$$\mathfrak{E}_3 = (k_2N_1 + N_0)\,\mathfrak{A} - (k_2Z_1 + Z_0)\,\mathfrak{E} = N_2\mathfrak{A} - Z_2\mathfrak{E}.$$

И вообще при помощи заключенія отъ μ къ $\mu+1$ и выше цитированныхъ рекурсіонныхъ формулъ для Z_μ и N_μ:

$$(-1)^{\mu-1}\mathfrak{E}_\mu = N_{\mu-1}\mathfrak{A} - Z_{\mu-1}\mathfrak{E},$$

откуда:

$$\text{(II)}\qquad \mathfrak{A} = U_{\mu-1}\mathfrak{E} + (-1)^{\mu-1}\cdot\frac{\mathfrak{E}_\mu}{N_{\mu-1}}.$$

Если цѣпь равенствъ (I) стр. 355 обрывается на i-той строкѣ, т.-е. если $\mathfrak{E}_{i+1} = 0$, то изъ (II) для $\mu = i+1$ получимъ

$$\mathfrak{A} = U_i\mathfrak{E},$$

слѣдовательно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E})$ = раціональному значенію $U_i = \frac{a}{e}$.

Если же $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, несоизмѣримы, и поэтому разложеніе въ непрерывную дробь никогда не закончится, то хотя величины $\mathfrak{E}_\mu$ съ возрастаніемъ индекса убываютъ, но все-таки $\mathfrak{E}_\mu$ ни при одномъ конечномъ значеніи μ не будетъ равно нулю. Тогда изъ (II), полагая во-первыхъ $\mu = 2m+1$, во-вторыхъ $\mu = 2m'+2$, гдѣ m, m'

означаютъ произвольныя положительныя цѣлыя числа, получимъ:

$$\mathfrak{A} = U_{2m}\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{E}_{2m+1}}{N_{2m}}, \text{ слѣдовательно, } \mathfrak{A} > U_{2m}\mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{A} = U_{2m'+1}\mathfrak{E} - \frac{\mathfrak{E}_{2m'+2}}{N_{2m'+1}}, \text{ слѣдовательно, } \mathfrak{A} > U_{2m'+1}\mathfrak{E};$$

или, соединяя неравенства вмѣстѣ:

$$\text{(III)} \qquad U_{2m}\mathfrak{E} < \mathfrak{A} < U_{2m'+1}\mathfrak{E}.$$

Отсюда уже слѣдуетъ, что каждое приближенное значеніе U съ четнымъ индексомъ меньше какого-либо приближеннаго значенія U съ нечетнымъ индексомъ. Изъ равенства

$$U_{\mu} - U_{\mu-2} = \frac{(-1)^{\mu} \cdot k_{\mu}}{N_{\mu} \cdot N_{\mu-2}} \text{ (см. пред. стр.)}$$

заключаемъ дальше, что

$$U_{2m+2} > U_{2m}, \quad U_{2m'+1} < U_{2m'-1};$$

слѣдовательно, приближенныя значенія, индексъ которыхъ есть число четное, съ возрастаніемъ индекса увеличиваются, а тѣ, у которыхъ индексъ нечетный, съ возрастаніемъ индекса уменьшаются.

Наконецъ равенство (см. (IV) стр. 245)

$$U_{2m+1} - U_{2m} = \frac{1}{N_{2m+1} N_{2m}},$$

показываетъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ m разность $U_{2m+1} - U_{2m}$ можетъ быть сдѣлана произвольно малой, слѣдовательно, двойной рядъ,

$$U_0, U_2, U_4, \ldots; \ldots U_5, U_3, U_1$$

состоящій изъ безконечно большого числа членовъ обладаетъ всѣми свойствами, необходимыми для опредѣленія нѣкотораго числа $(U_{2m}; U_{2m+1})$ (см. § 1, стр. 328)[1]). Если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ несоизмѣримы, то это число несомнѣнно ирраціональное, такъ какъ изъ неравенствъ

$$U_{2m} < \frac{p}{q} < U_{2m+1},$$

[1]) Это можно было бы заключить и изъ равенства (II), стр. 356, не пользуясь формулами для $U_{\mu} - U_{\mu-1}$ и $U_{\mu} - U_{\mu-2}$. Ср. цитированную на стр. 323 програмную работу.

гдѣ $\frac{p}{q}$ есть раціональная дробь, слѣдовало бы:

$$U_{2m}\mathfrak{E} < \frac{p}{q}\mathfrak{E} < U_{2m+1}\mathfrak{E},$$

а такъ какъ и (см. равенство (III) на предыд. стр.)

$$U_{2m}\mathfrak{E} < \mathfrak{A} < U_{2m+1}\mathfrak{E},$$

то при всѣхъ значеніяхъ m должно было быть

$$\left|\mathfrak{A} - \frac{p}{q}\mathfrak{E}\right| < (U_{2m+1} - U_{2m})\mathfrak{E};$$

такъ какъ правая часть при достаточно большихъ значеніяхъ m становится произвольно малой, то могло бы имѣть мѣсто лишь соотношеніе

$$\left|\mathfrak{A} - \frac{p}{q}\cdot\mathfrak{E}\right| = 0 \quad \text{или} \quad \mathfrak{A} = \frac{p}{q}\cdot\mathfrak{E}$$

а это противорѣчитъ предположенію.

Подъ значеніемъ отношенія величины $\mathfrak{A}$ къ величинѣ $\mathfrak{E}$ будемъ теперь понимать число $a = (U_{2m}; U_{2m+1})$, гдѣ U представляютъ приближенныя значенія непрерывной дроби, получаемой примѣненіемъ къ величинамъ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, процесса образованія непрерывной дроби.

На совпаденіе этого опредѣленія отношенія въ случаѣ двухъ соизмѣримыхъ величинъ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ съ даннымъ на стр. 355 (какъ значеніе непрерывной дроби), указываетъ соотношеніе IX гл. V, § 4 B, стр. 247[1]).

Двойной рядъ $(U_{2m}; U_{2m+1})$ въ силу соотношенія (III) стр. 357 имѣетъ то свойство, что величины $U_{2m}\mathfrak{E}$, число которыхъ безконечно велико и которыя образуются изъ $\mathfrak{E}$ умноженіемъ на члены первый группы двойного ряда, всѣ меньше нѣкоторой, несомнѣнно существующей величины $\mathfrak{A}$, а величины $U_{2m+1}\mathfrak{E}$, которыя аналогично получаются изъ $\mathfrak{E}$ при помощи членовъ второй группы, всѣ больше чѣмъ $\mathfrak{A}$. Это именно обстоятельство и привело къ

---

1) O. Stolz (Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I Teil, VII Abschnitt, 13) представляетъ значеніе отношенія при помощи конечной или безконечной десятичной дроби (или систематической дробью при произвольномъ основаніи). Примѣненіе непрерывныхъ дробей мнѣ представляется болѣе естественнымъ, такъ какъ къ нимъ необходимо приводитъ повѣрка соизмѣримости двухъ однородныхъ величинъ.

мысли всякій разъ, когда получается двойной рядъ съ указанными свойствами, опредѣлять или создавать новое число, которое больше всѣхъ чиселъ первой группы и меньше всѣхъ чиселъ второй группы этого двойного ряда.

Конечно, изъ предыдущаго во всякомъ случаѣ не слѣдуетъ обратнаго: т.-е. чтобы, при заданіи произвольнаго ирраціональнаго числа $(a;\ A)$ и произвольной величины $\mathfrak{E}$ какой-либо области, всегда существовала такая величина $\mathfrak{A}$ той же самой области, чтобы для всѣхъ n

$$a_n \mathfrak{E} < \mathfrak{A} < A_n \mathfrak{E}.$$

Выполнимость же этого требованія представляетъ напротивъ характерическое условіе наличности особаго свойства у области величинъ, которое называютъ „непрерывностью". То обстоятельство, напримѣръ, что всѣ отрѣзки прямой образуютъ такую непрерывную систему величинъ, не очевидно само по себѣ и не доказуемо. Напротивъ, это положеніе представляетъ изъ себя, какъ это ясно поняли и высказали впервые G. Cantor[1]) и R. Dedekind[2]), аксіому, которую слѣдуетъ положить въ основаніе ариѳметическаго разсмотрѣнія линіи. Мы въ дальнѣйшемъ ограничимся системами величинъ, которыя непрерывны въ указанномъ смыслѣ[3]), и покажемъ, что какимъ-либо соотношеніямъ между величинами такой области соотвѣтствуютъ такія же соотношенія между числами и обратно.

---

[1]) Math. Ann. Bd. 5. стр. 128. «Но для того, чтобы установить указанную въ этомъ параграфѣ связь между областями числовыхъ величинъ, опредѣленныхъ въ 1-мъ §, и геометріей прямой линіи, слѣдуетъ лишь присоединить еще аксіому, заключающуюся въ томъ, что и обратно каждой числовой величинѣ соотвѣтствуетъ опредѣленная точка прямой, координата которой равна этой числовой величинѣ, и равна именно въ смыслѣ, опредѣленномъ въ этомъ параграфѣ. Это предложеніе я называю аксіомой потому, что по своей природѣ оно не можетъ быть доказано».

[2]) Stetigkeit und irrationale Zahlen, 3 Aufl. Брауншвейгъ 1905, стр. 11. «Если всѣ точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка перваго класса лежитъ влѣво отъ каждой точки второго класса, то существуетъ одна и только одна точка, которая производитъ такое дѣленіе всѣхъ точекъ на два класса, такое сѣченіе прямой на два отрѣзка». «Принятіе такого свойства линіи есть ничто иное, какъ аксіома, по которой мы и приписываемъ прямой ея непрерывность, при помощи которой мы налагаемъ на прямую свойство непрерывности».

[3]) Рѣшеніе вопроса, относится ли это предположеніе къ опредѣленной системѣ величинъ, конечно, не составляетъ предмета ариѳметики.

Такъ какъ всѣмъ этимъ мы не разъ будемъ пользоваться, то прежде всего убѣдимся въ томъ, что, если снова

$$\alpha = (\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) = (U_{2m}; \ U_{2m+1})$$

и $\frac{p}{q}$ раціональная дробь, то одновременно съ $\frac{p}{q} \lesseqgtr \alpha$, также и $\frac{p}{q}\mathfrak{E} \lesseqgtr \mathfrak{A}$. Если, напримѣръ, имѣемъ $\frac{p}{q} < \alpha$, то для достаточно большихъ значеній m слѣдуетъ, что

$$\frac{p}{q} < U_{2m},$$

и, слѣдовательно, также $\frac{p}{q}\mathfrak{E} < U_{2m}\mathfrak{E} < \mathfrak{A}$ и т. д.

Изъ $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ само собою получается $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$; такъ какъ разложенія въ непрерывную дробь, служащія для опредѣленія обоихъ отношеній, тождественны.

Если $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, то всегда существуютъ такія раціональныя числа $\frac{p}{q}$ (и ихъ безконечно много) что

$$\mathfrak{A} > \frac{p}{q}\mathfrak{E} > \mathfrak{B};$$

для этого слѣдуетъ лишь [1]) выбрать такое цѣлое число q, чтобы одновременно

$$q(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) > \mathfrak{E} \text{ и } q\mathfrak{B} > \mathfrak{E}\ ^{2)},$$

и затѣмъ такъ опредѣлить такое положительное цѣлое число p, чтобы

$$(p-1)\mathfrak{E} \leqq q\mathfrak{B} < p\mathfrak{E}.$$

Уже изъ послѣдняго неравенства слѣдуетъ:

$$\frac{p}{q}\mathfrak{E} > \mathfrak{B};$$

изъ

$$q(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) > \mathfrak{E}$$

получается

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{B} + \frac{1}{q}\mathfrak{E},$$

---

1) По Stolz'у, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I Teil, 5. Abschnitt, стр. 71.

2) Возможность опредѣлить q согласно этимъ неравенствамъ напередъ предполагаетъ справедливость для нашей системы системы величинъ аксіомы Архимеда, гласящей, что, если изъ двухъ величинъ $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}$ данной системы $\mathfrak{A}$ есть меньшая, то всегда существуетъ такое кратное $\mathfrak{A}$, которое больше, чѣмъ $\mathfrak{E}$.

и, такъ какъ

$$\mathfrak{B} \geqq \frac{p-1}{q}\mathfrak{E},$$

то также и

$$\mathfrak{A} > \frac{p}{q}\mathfrak{E}.$$

Соотношенія же величинъ

$$\mathfrak{A} > \frac{p}{q}\mathfrak{E}, \quad \frac{p}{q}\mathfrak{E} > \mathfrak{B}$$

эквивалентны, какъ это было показано ранѣе, числовымъ неравенствамъ

$$(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E}) > \frac{p}{q}, \quad \frac{p}{q} > (\mathfrak{B},\ \mathfrak{E}).$$

Такимъ образомъ, слѣдствіемъ нашего предположенія, что $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, является $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E}) > (\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})$. Также получимъ, что, если $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, то и $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E}) < (\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})$. Поэтому теперь мы можемъ сдѣлать дальнѣйшее заключеніе, что и обратно изъ

$$\text{(IV)} \qquad (\mathfrak{A},\ \mathfrak{E}) \gtreqless (\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})$$

слѣдуетъ соотвѣтствующее соотношеніе

$$\mathfrak{A} \gtreqless \mathfrak{B}.$$

Слѣдовательно, равнымъ величинамъ соотвѣтствуютъ равныя числа (именно отношенія этихъ величинъ къ какой-либо величинѣ той же системы, выбранной за единицу), неравнымъ величинамъ соотвѣтствуютъ, въ томъ же смыслѣ, неравныя числа и обратно.

Пусть теперь

$$\left.\begin{array}{ll}
 & (\mathfrak{A},\ \mathfrak{E}) = (U_{2m};\ U_{2m+1}) = \alpha, \\
\text{слѣдовательно,} & \\
 & U_{2m}\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A} \leqq U_{2m+1}\mathfrak{E} \\
\text{(V) и} & \\
 & (\mathfrak{B},\ \mathfrak{E}) = (U'_{2m};\ U'_{2m+1}) = \beta, \\
\text{слѣдовательно,} & \\
 & U'_{2m}\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{B} \leqq U'_{2m+1}\mathfrak{E}\ {}^{1)}
\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{для всѣхъ зна-}\\ \text{ченій } m,\end{array}$$

---

[1]) Знакъ равенства присоединенъ для того, чтобы не былъ исключенъ случай соизмѣримости величинъ.

тогда при помощи сложенія получимъ:

$$(U_{2m}+U'_{2m})\mathfrak{E}\leqq\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\leqq(U_{2m+1}+U'_{2m+1})\mathfrak{E},$$

а, слѣдовательно, и

$$U_{2m}+U'_{2m}\leqq(\mathfrak{A}+\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})\leqq U_{2m+1}+U'_{2m+1};$$

а это значитъ,

$$\text{(VI)}\qquad \begin{aligned}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})&=(U_{2m}+U'_{2m};\ U_{2m+1}+U'_{2m+1})\\ &=(U_{2m};\ U_{2m+1})+(U'_{2m};\ U'_{2m+1})\\ &=(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E})+(\mathfrak{B},\ \mathfrak{E}).\end{aligned}$$

Слѣдовательно, если дано равенство между величинами одного и того же рода:

$$\text{(VII)}\qquad \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\cdots=\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'+\cdots,$$

и если $\mathfrak{E}$ означаетъ какую-либо величину той-же системы, принятую за единицу, то прежде всего имѣемъ по (IV)

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\cdots,\ \mathfrak{E})=(\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'+\cdots,\ \mathfrak{E}),$$

а затѣмъ на основаніи (VI):

$$(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E})+(\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})+\cdots=(\mathfrak{A}',\ \mathfrak{E})+(\mathfrak{B}',\ \mathfrak{E})+\cdots$$

или, подставляя для сокращенія вмѣсто чиселъ соотвѣтствующія греческія буквы:

$$\text{(VIII)}\qquad \alpha+\beta+\cdots=\alpha'+\beta'+\cdots$$

Если же обратно, дано въ числахъ равенство, подобное (VIII), то въ силу нашего предположенія, что система величинъ ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ...) должна быть всегда непрерывной, можно, выбравъ произвольное $\mathfrak{E}$, найти величины $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, ... этой системы такъ, чтобы

$$(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E})=\alpha;\ (\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})=\beta,\ldots;\ (\mathfrak{A}',\ \mathfrak{E})=\alpha',\ (\mathfrak{B}',\ \mathfrak{E})=\beta',\ldots,$$

и, слѣдовательно,

$$(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E})+(\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})+\cdots=(\mathfrak{A}',\ \mathfrak{E})+(\mathfrak{B}',\ \mathfrak{E})+\cdots,$$

откуда по (VI) снова слѣдуетъ:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\cdots,\ \mathfrak{E})=(\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'+\cdots,\ \mathfrak{E})$$

и по (IV):

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\cdots=\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'+\cdots,$$

такъ что равенства VII и VIII вполнѣ эквиваленты.

Изъ (V) далѣе получаемъ

$$\mathfrak{E} \geqq \frac{\mathfrak{B}}{U'_{2m+1}}, \quad \mathfrak{E} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{U'_{2m}},$$

$$\frac{U_{2m}}{U'_{2m+1}} \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A} \leqq \frac{U_{2m+1}}{U'_{2m}} \mathfrak{B}$$

и отсюда:

$$\frac{U_{2m}}{U'_{2m+1}} \leqq (\mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}) \leqq \frac{U_{2m+1}}{U'_{2m}};$$

а это значитъ, что

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}) &= \left(\frac{U_{2m}}{U'_{2m+1}}; \ \frac{U_{2m+1}}{U'_{2m}}\right) \\ &= (U_{2m}; \ U_{2m+1}) : (U'_{2m}; \ U'_{2m+1})\,^{1)} \\ &= (\mathfrak{A}, \ \mathfrak{E}) : (\mathfrak{B}, \ \mathfrak{E}).\end{aligned}$$

С л ѣ д о в а т е л ь н о о т н о ш е н і е к а к и х ъ-л и б о д в у х ъ о д н о р о д н ы х ъ в е л и ч и н ъ р а в н о ч а с т н о м у ч и с е л ъ, в ы р а ж а ю щ и х ъ о т н о ш е н і е э т и х ъ в е л и ч и н ъ к ъ в е л и ч и н ѣ т о й ж е с и с т е м ы, п р и н я т о й з а е д и н и ц у.

Пользуясь этимъ предложеніемъ легко показать теперь, что

$$(n\mathfrak{A}, \ n\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}).$$
$$(\mathfrak{B}, \ \mathfrak{A}) = 1 : (\mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}) \text{ и т. д.}$$

и что вообще о б а о т н о ш е н і я п о д ч и н я ю т с я т ѣ м ъ ж е з а к о н а м ъ, к а к ъ ч и с л и т е л ь и з н а м е н а т е л ь д р о б и; послѣднимъ только и оправдывается общепринятый способъ записи отношеній $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ или $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$. Изъ равенства двухъ отношеній между величинами (называемаго „пропорціей“)

$$(\mathrm{IX}) \qquad (\mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}) = (\mathfrak{C}, \ \mathfrak{D})$$

вытекаетъ непосредственно равенство слѣдующихъ двухъ числовыхъ частныхъ

$$(\mathfrak{A}, \ \mathfrak{E}) : (\mathfrak{B}, \ \mathfrak{E}) = (\mathfrak{C}, \ \mathfrak{E}) : (\mathfrak{D}, \ \mathfrak{E})$$

или

$$(\mathrm{X}) \qquad \alpha : \beta = \gamma : \delta$$

и также обратно, при произвольномъ выборѣ $\mathfrak{E}$ изъ равенства (X) слѣдуетъ равенство IX.

Благодаря эквивалентности этихъ двухъ равенствъ, устанавливаются предложенія о равенствахъ между отношеніями какихъ-либо величинъ, (перестановка среднихъ, крайнихъ членовъ про-

1) См. опредѣленіе частнаго двухъ раціональныхъ чиселъ. § 5 стр. 341.

порціи, и т. д.), какъ ихъ впервые изложилъ Евклидъ въ пятой книгѣ своихъ элементовъ [1]); теперь эти предложенія непосредственно вытекаютъ изъ такихъ же предложеній для соотвѣтствующихъ равенствъ между числовыми частными; доказательства послѣднихъ не представляетъ никакихъ трудностей, если обоснованы всѣ дѣйствія надъ дѣйствительными числами.

§ 9. Историческое замѣчаніе объ ирраціональныхъ числахъ [2]).

Лишь въ новѣйшее время появляются ясное представленіе о сущности ирраціональныхъ чиселъ и чисто ариѳметическое обо-

[1]) Евклидъ даетъ тамъ подробное изложеніе ученія объ отношеніяхъ, не давая при этомъ дѣйствительнаго, для математики пригоднаго, опредѣленія понятія: «отношеніе». Но онъ опредѣляетъ: два отношенія $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E})$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}')$ (гдѣ $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}'$ хотя и однородны между собой, но могутъ быть и неоднородны съ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$) должны называться равными, если для всѣхъ положительныхъ цѣлыхъ чиселъ p, q изъ $q\mathfrak{A} \gtreqless p\mathfrak{E}$ слѣдуетъ также $q\mathfrak{B} \gtreqless p\mathfrak{E}'$; $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E})$ должно называться больше, чѣмъ $(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}')$, если можно найти, по крайней мѣрѣ, одну пару цѣлыхъ чиселъ, для которыхъ одновременно $q\mathfrak{A} > p\mathfrak{E}$ и $q\mathfrak{B} < p\mathfrak{E}'$. Исключительно на основаніи этого опредѣленія Евклидъ просто и со всей строгостью доказываетъ въ шестой книгѣ элементовъ теорему, что площади двухъ треугольниковъ съ равными высотами относятся между собой, какъ основанія, откуда сейчасъ же вытекаетъ теорема о пропорціональности отрѣзковъ, полученныхъ на двухъ лучахъ при пересѣченіи двумя параллельными; на этой теоремѣ можетъ быть построено все ученіе о подобіи безъ всякихъ противорѣчій. Евклидово опредѣленіе равенства и неравенства двухъ отношеній мы можемъ легко вывести изъ нашего опредѣленія отношенія, какъ дѣйствительнаго числа, и нашего опредѣленія равенства и неравенства двухъ дѣйствительныхъ чиселъ. Два числа $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) = \alpha$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}') = \beta$ мы въ § 1 стр. 330 и 331 назвали равными другъ другу тогда и только тогда, когда изъ $\alpha \gtreqless \frac{p}{q}$ всегда слѣдуетъ, что и $\beta \gtreqless \frac{p}{q}$, гдѣ $\frac{p}{q}$ означаетъ какую-либо раціональную дробь. Но $\alpha \gtreqless \frac{p}{q}$ равнозначно съ $\mathfrak{A} \gtreqless \frac{p}{q}\mathfrak{E}$ или $q\mathfrak{A} \gtreqless p\mathfrak{E}$, а $\beta \gtreqless \frac{p}{q}$ равнозначно съ $\mathfrak{B} \gtreqless \frac{p}{q}\mathfrak{E}'$, или $q\mathfrak{B} \gtreqless p\mathfrak{E}'$. Изъ опредѣленія, даннаго нами въ § 1 стр. 331, получается также, что слѣдуетъ считать $\alpha > \beta$, если можетъ быть указано хотя бы одно такое раціональное число $\frac{p}{q}$, что одновременно $\alpha > \frac{p}{q}$ и $\beta < \frac{p}{q}$, т.-е. Евклидово условіе неравенства $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) > (\mathfrak{B}, \mathfrak{E}')$.

[2]) По исторіи ирраціональныхъ чиселъ см. статью Pringsheim въ Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Bd. I, Teil I Nr. 3 и еще болѣе подробную статью Molk'а во французскомъ изданіи Энциклопедіи.

снованіе ихъ теоріи. Правда, различіе между соизмѣримыми и несоизмѣримыми отношеніями было извѣстно уже древнимъ грекамъ — открытіе несоизмѣримости діагонали и стороны квадрата приписываютъ Пиѳагору, — пониманіе же несоизмѣримыхъ отношеній, какъ чиселъ, было совершенно чуждо грекамъ. Евклидъ также не знаетъ никакихъ ирраціональныхъ чиселъ; замѣной ихъ при обоснованіи ученія о подобіи служитъ ему его теорія отношеній (элементы, книга V) [1]).

Правда, въ средніе вѣка часто выполняли дѣйствія надъ корнями (numeri surdi), и знали также, что корни изъ раціональныхъ чиселъ, вообще говоря, не являются опять-таки числами раціональными. Вообще же на нихъ смотрѣли съ точки зрѣнія приближенной математики, которой и теперь еще вполнѣ достаточно для практическихъ вычисленій (ср. § 1, стр. 323). Впервые отчетливо выразилъ различіе между раціональными и ирраціональными числами, повидимому, Michael Stifel, который въ своей Arithmetica integra (Nürenberg 1544) говоритъ, что между двумя послѣдовательными цѣлыми числами заключается съ одной стороны безчисленно много раціональныхъ чиселъ, съ другой стороны безчисленно много ирраціональныхъ чиселъ, и ни одно изъ этихъ чиселъ не можетъ перейти изъ одной категоріи въ другую. Лѣтъ на 100 позднѣе Декартъ (Géométrie 1637) обозначалъ буквами отношенія произвольныхъ отрѣзковъ и оперировалъ съ ними, какъ съ числами, а Ньютонъ въ своей Arithmetica universalis (1707) на первомъ планѣ поставилъ именно опредѣленіе: „Per numerum abstractam quantitatis cuiusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus", которымъ онъ, впрочемъ, болѣе нигдѣ уже не пользуется. Долгое время придерживались такого геометрическаго обоснованія понятія числа и его нагляднаго представленія. Въ самомъ дѣлѣ, вѣдь возможно, разсматривая одну изъ двухъ однородныхъ величинъ (напр. отрѣзковъ) какъ единицу, другую привести, пріемомъ изложеннымъ въ § 8, въ соотвѣтствіе съ конечной или безконечной непрерывной дробью, смотря потому будутъ ли обѣ величины соизмѣримы или несоизмѣримы. Конечная непрерывная дробь есть число ра-

---

[1]) O. Stolz (Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1885, I. Teil, VI. Abschnitt, а также O. Stolz и A. Gmeiner, Theoretische Arithmetik, Leipzig 1902, II. Abteilung, VI Abschnitt) излагаетъ Евклидово ученіе объ отношеніи въ новѣйшемъ освѣщеніи и обозначеніяхъ, и основываетъ на этомъ теорію ирраціональныхъ чиселъ.

ціональное; безконечно простирающаяся дробь, которая пока еще не имѣетъ смысла, могла бы быть опредѣлена, какъ новое, ирраціональное число, а право оперировать надъ такимъ символомъ, какъ надъ числомъ, основывалось бы на томъ, что этому символу, какъ и конечной непрерывной дроби соотвѣтствуетъ опредѣленная величина (отрѣзокъ). Тогда такія два числа слѣдовало бы считать равными или неравными въ зависимости отъ того, будутъ ли соотвѣтствующія величины (отрѣзки) равны или не равны и т. д. Чтобы теперь быть увѣреннымъ въ томъ, что полученный при помощи какихъ-либо дѣйствій надъ такими символами, новый символъ всегда есть также число, необходимо было бы знать, что не только каждому отрѣзку соотвѣтствуетъ такого рода символъ, а также и наоборотъ всякому, такъ образованному символу опять — опредѣленный отрѣзокъ, т.-е. пришлось бы воспользоваться аксіомой Кантора и Дедекинда (см. стр. 359), слѣдовательно, для обоснованія теоріи ирраціональныхъ чиселъ былъ бы необходимъ элементъ, чуждый ариѳметикѣ. Съ цѣлью устроить этотъ недостатокъ, нѣсколько выдающихся математиковъ, почти одновременно, дали чисто ариѳметическую теорію ирраціональныхъ чиселъ.

Dedekind[1]) исходитъ изъ того соображенія, что совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ, безконечно многими способами можно раздѣлить на два класса такъ, что произвольное число перваго класса меньше любого числа второго класса. Каждое такое раздѣленіе раціональныхъ чиселъ онъ называетъ „сѣченіемъ“. Если имѣется въ первомъ классѣ наибольшее раціональное число или во второмъ классѣ—наименьшее, то такое раціональное число и производитъ сѣченіе. Если же ни въ первомъ классѣ нѣтъ наибольшаго, ни во второмъ классѣ наименьшаго числа (напр., если къ первому классу принадлежатъ всѣ раціональныя числа, квадраты которыхъ меньше 2, а ко второму всѣ раціональныя числа, квадраты которыхъ бо́льше 2), то Dedekind „создаетъ“ новое число — „ирраціональное“, которое разсматривается, какъ вполнѣ опредѣляемое сѣченіемъ. На основаніи этого опредѣленія должны быть теперь установлены сравненіе по величинѣ ирра-

[1]) Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872. 3 Aufl. 1905. Ср. также Pasch, Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1882 и Math. Ann. Томъ 40 (1892), стр. 149; Ricci, Della teoria dei numeri reali secondo il concetto di Dedekind. Giornale di Matematiche di Battaglini, T. 35 (4 т. II серіи). Неаполь, 1897, стр. 22—74.

ціональныхъ чиселъ другъ съ другомъ и съ числами раціональными, а также и дѣйствія надъ ирраціональными числами. Теорія Dedekind'а имѣетъ именно то преимущество, что каждому опредѣленному ирраціональному числу соотвѣтствуетъ лишь единственное сѣченіе; но она, по крайней мѣрѣ для первоначальнаго преподаванія, является нѣсколько абстрактной, и даже ея примѣненіе въ анализѣ часто оказывается не особенно удобнымъ, такъ какъ ирраціональныя числа, вообще говоря, обычно не являются въ формѣ сѣченій.

Weierstrass [1]) исходитъ изъ ряда раціональныхъ чиселъ, состоящаго изъ безконечно-большого числа членовъ, при чемъ дана возможность указать, какія раціональныя числа здѣсь вообще встрѣчаются и какъ часто встрѣчается каждое изъ нихъ (представимъ себѣ, напримѣръ, безконечную десятичную дробь, въ которой любой десятичный знакъ можетъ быть найденъ опредѣленнымъ алгориѳмомъ). Въ соотвѣтствіе съ такимъ рядомъ онъ приводитъ нѣкоторую новую числовую величину, для которой устанавливаетъ понятіе о равенствѣ и неравенствѣ и опредѣляетъ дѣйствія. Можно показать со всей строгостью, что разность между вновь введенной числовой величиной и суммой достаточно большого числа членовъ даннаго ряда можетъ быть сдѣлана произвольно малой, на основаніи чего и имѣемъ право разсматривать введенное число, какъ предѣльное значеніе ряда.

Болѣе удобнымъ въ цѣляхъ вычисленія является такъ называемое Канторово [2]) опредѣленіе ирраціональныхъ чиселъ, опирающееся на идеи Вейерштрасса и представляющее особенно удачное для анализа развитіе его теоріи. Существуютъ ряды $a_1, a_2, a_3, \cdots$ in inf., состоящіе изъ безконечно большого числа раціональныхъ чиселъ, члены которыхъ съ возрастаніемъ индекса

---

[1]) Weierstrass излагалъ свою теорію въ своихъ Vorlesungen über «Analytische *Funktionen» въ Берлинскомъ университетѣ, но самъ не издалъ ихъ* въ печатномъ видѣ. Свѣдѣнія о нихъ можно найти у Kossak, Programmabhandlung des Friedrich-Werderschen Gymnasiums zu Berlin 1872, у Pincherle, Giornale di Matematiche 18 (1880), стр. 185 и д., и у Biermann'a, Theorie der analytischen Funktionen, Leipzig 1887 (стр. 19 и д.).

[2]) G. Cantor, Math. Ann. Bd. 5 (1872), стр. 123; Math. Ann. Bd. 21 (1883) стр. 545 и д. — Heine, Die Elemente der Funktionenlehre, Journal f. Mathematik, Bd. 74 (1872), стр. 172. — Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1885, I Teil, VII. Abschnitt. — Stolz und Gmeiner Theoretische Arithmetik, Leipzig 1902, II. Abteilung, VII. Abschnitt.

сколь угодно близко подходятъ къ опредѣленному раціональному числу. Если, напримѣръ,

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{1}{2^\nu}, \text{ то } \lim_{n=\infty} a_n = 1.$$

Въ этомъ рядѣ, если выбрать произвольно малое положительное значеніе δ, можно найти всегда такое число N, что для всѣхъ положительныхъ цѣлыхъ значеній ν и при $n \geqq N$, разность $a_{n+\nu} - a_n$ по абсолютному значенію будетъ $< \delta$. Если члены безконечнаго ряда $a_1, a_2, a_3, \cdots$ удовлетворяютъ послѣднему условію, но при этомъ не существуетъ предѣльнаго раціональнаго значенія (напримѣръ для

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{c_\nu}{10^\nu},$$

въ случаѣ если c_ν получаютъ лишь значенія 0, 1, 2, $\cdots$ 9, не образуя при этомъ періода), то Cantor приводитъ въ соотвѣтствіе съ этимъ рядомъ нѣкоторое число b, которое, благодаря этому, становится опредѣленной величиной, для которой должны быть установлены, какъ четыре основныя дѣйствія, такъ и понятія равенства и неравенства.

Уже Ch. Méray [1]) незадолго до Cantor'а опубликовалъ [2]) теорію почти тождественную съ теоріей Cantor'а.

Въ интересахъ начинающихъ намъ казалось наиболѣе цѣлесообразнымъ для установленія понятія ирраціональныхъ чиселъ исходить изъ алгориѳма, при помощи котораго въ области раціональныхъ чиселъ мы вычисляли тѣ значенія, которыя для практическихъ цѣлей могутъ замѣнить не существующія рѣшенія нѣкоторыхъ уравненій какъ-то $x^2 = a$ и $g^x = a$ (a, g произвольныя положительныя раціональныя числа). Поэтому въ основу нашего изложенія мы положили опредѣленіе ирраціональныхъ чиселъ, какъ двухъ сходящихся другъ съ другомъ монотонныхъ

---

[1]) Revue des sociétés savantes: sciences mathématiques (2) 4, 1869, стр. 284. и Nouveau précis d'Analyse infinitésimale. Paris 1872, Art. 1—9.

[2]) Своеобразной и противоположной всѣмъ этимъ ариѳметическимъ теоріямъ точки зрѣнія придерживается G. Frege въ своемъ сочиненіи «Grundgesetze der Arithmetik» Bd. Jena 1903, стр. 69—162.

рядовъ, которое съ одной стороны непосредственно примѣнимо къ вычисленіямъ съ ирраціональными числами, такъ какъ даетъ возможность искомое ирраціональное число непосредственно заключить между низшей и высшей границей (см. § 6) и съ другой стороны допускаетъ простое и естественное опредѣленіе отношенія величинъ, какъ дѣйствительнаго числа (см. § 8) [1]).

---

[1]) Этотъ ходъ мыслей, который слѣдуетъ разсматривать, какъ видоизмѣненіе теоріи Cantor'а, встрѣчается также, по крайней мѣрѣ, въ видѣ намека у Bachmann'а, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen, Leipzig 1892. Bachmann здѣсь, также какъ и Cantor, обосновываетъ опредѣленія больше, меньше, равно, на понятіи разности двухъ ирраціональныхъ чиселъ, въ то время какъ мы опредѣленіе этихъ соотношеній дали въ § 1-мъ до изложенія дѣйствій, чтобы сейчасъ же, съ самаго начала, вновь опредѣленныя числа, можно было ввести въ рядъ раціональныхъ чиселъ. Ср. также Capelli, Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali col metodo delle classi contigue. Giornale di Matemaiche di Battaglini, томъ 35, 4. Томъ второй серіи Napoli 1897.

ГЛАВА VII.

Комплексныя числа.

§ 1. Историческое введенiе.

Послѣ введенiя ирраціональныхъ чиселъ мы имѣемъ возможность изъ любого положительнаго числа извлечь корень любой степени (см. гл. VI, § 7 С), а также найти логариѳмъ всякаго положительнаго числа при любомъ положительномъ основанiи (гл. VI, § 7 E). Но все-таки задача опредѣлить число x такъ, чтобы $x^{2n} = -a$, гдѣ $2n$ есть нѣкоторое четное число, а $-a$ какое-либо отрицательное число, остается еще не разрѣшенной, такъ какъ $(2n)$-ая степень каждаго дѣйствительнаго, положительнаго или отрицательнаго, раціональнаго или ирраціональнаго числа положительна. Въ самомъ дѣлѣ, равенство $x^2 = -100$, мы не можемъ сдѣлать разрѣшимымъ, даже замѣняя данныя числа 2 и -100 другими произвольно къ нимъ близкими числами (ср. гл. II, § 5 С и гл. III, § 3 F). Мы также не можемъ пока опредѣлить и логариѳма отрицательнаго числа при положительномъ основанiи. Соотвѣтственно этому въ теченiе всѣхъ древнихъ и среднихъ вѣковъ придерживались того воззрѣнiя, что квадратныя корни изъ отрицательныхъ чиселъ не существуютъ; о логариѳмахъ же тогда и вообще не было еще рѣчи. Еще Cardano въ его „Practica Arithmeticae generalis“ въ 1539 году считаетъ квадратный корень изъ отрицательнаго числа „невозможнымъ“. Тотъ же самый Cardano нѣсколько лѣтъ спустя (Ars magna, cap. 37, 1543) оказался первымъ, отважившимся производить вычисленiя надъ квадратными корнями изъ отрицательныхъ чиселъ, и именно такъ, какъ и надъ прочими числами. Онъ показываетъ, что являющаяся неразрѣшимой задача о разложенiи числа 10 на два слагаемыхъ, произведенiе которыхъ равнялось бы 40, формально разрѣшается при помощи выраженiй

$5 \pm \sqrt{-15}$ въ томъ смыслѣ, что если примѣнить къ этимъ выраженіямъ обычныя правила дѣйствій и при этомъ произведеніе $\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15}$ положить равнымъ -15, то сумма ихъ и на самомъ дѣлѣ будетъ равна 10, а произведеніе 40. Здѣсь Cardano свободно оперируетъ надъ символомъ $\sqrt{-15}$, который по существу есть не что иное, какъ условное выраженіе нѣкоторой задачи (а именно: найти число, квадратъ котораго имѣетъ значеніе -15), какъ надъ символомъ дѣйствительнаго существующаго числа. На такомъ пониманіи математика оставалась приблизительно около двухъ съ половиной столѣтій. Въ теченіе XVII и XVIII столѣтій все шире и шире пользовались корнями квадратными изъ отрицательныхъ чиселъ. Чѣмъ болѣе подвигались впередъ ариѳметика, алгебра и анализъ, тѣмъ болѣе корни квадратные изъ отрицательныхъ чиселъ, такъ сказать, навязывались математикамъ, которымъ совсѣмъ уже не было возможности обходиться безъ нихъ. Слово „imaginär“ (воображаемый) Декартъ ввелъ въ своей „Géométrie“ въ 1637 году для такихъ корней уравненія, которымъ не соотвѣтствуетъ конкретной величины [1]). Въ XVIII столѣтіи Cotes, Moivres и прежде всего L. Euler который и ввелъ [2]) обозначеніе i для $\sqrt{-1}$, оказали особыя заслуги въ дѣлѣ формальнаго развитія ученія о мнимыхъ числахъ. Но и самые выдающіеся мыслители того времени еще не достигли яснаго представленія о сущности мнимыхъ чиселъ и о ихъ правѣ на существованіе. Наличность мнимыхъ множителей Лейбницъ (въ одномъ изъ сочиненій 1702 года о разложеніи данной дроби на элементарныя) называетъ „изящнымъ и чудеснымъ убѣжищемъ божественнаго духа; это выродокъ міра идей, почти двойственное существо, находящееся между быть и не быть“ (Cantor, III, стр. 273), а Эйлеръ въ своей алгебрѣ говоритъ (гл. 143—144), „квадратные корни изъ отрицательныхъ чиселъ, въ виду того, что они не больше и не меньше нуля и не являются самимъ нулемъ, не могутъ быть причислены къ возможнымъ числамъ“.

---

[1]) «Caeterum radices tam verae (положительные) quam falsae (отрицательные) non semper sunt reales, sed aliquando tantum imaginariae: hoc est, semper quidem in qualibet aequatione tot radices quot dixi imaginari licet; verum nulla interdum est quntitas, quae illis, quas imaginamur, respondet». (Латинское изданіе «Геометріи» 1659, томъ I, стр. 76; ср. Cantor II, стр. 795).

[2]) «Formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posteriorem designabo, ita ut sit $i \cdot i = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$». Cantor IV, стр. 315.

Отсюда намъ ясно, что хотя и было невозможно отрицать большую пользу, приносимую мнимыми числами, все-таки къ ихъ примѣненію относились недовѣрчиво и старались провѣрить результаты, полученные при помощи послѣднихъ, раньше, чѣмъ пользоваться ими. Полную ясность въ сущность мнимыхъ чиселъ внесло лишь XIX столѣтіе. Мы уже раньше [1]) указали на то, въ какихъ двухъ смыслахъ можно говорить о реальности понятій какихъ-либо чиселъ. Прежде всего удалось показать, что мнимымъ числамъ (по терминологіи G. Cantor'a) принадлежитъ „транзіентная" реальность, или что ихъ слѣдуетъ отнести къ „актуальнымъ" (по H. Hankel'ю) числамъ, т.-е., иными словами, удалось показать, что эти числа могутъ быть разсматриваемы, какъ отображеніе опредѣленныхъ соотношеній между дѣйствительными величинами. Если и встрѣчались опредѣленныя попытки геометрически изобразить мнимыя числа уже у John Wallis [2]) и у Heinrich Kühn [3]), то все-таки первое настоящее и полное представленіе мнимыхъ чиселъ при помощи направленныхъ отрѣзковъ (векторовъ) далъ въ своей работѣ „Om Directionens analytiske Betegning", представленной одной изъ датскихъ академій въ 1797 году, норвежско-датскій землемѣръ Caspar Wessel [4]). Онъ въ этой работѣ опредѣляетъ сложеніе и умноженіе такихъ отрѣзковъ въ формѣ, принятой теперь, и, такимъ образомъ, выясняетъ реальную основу дѣйствій надъ мнимыми числами. Къ сожалѣнію, прекрасная работа Wessel'я не встрѣтила никакого вниманія со стороны его современниковъ; долгое время ее игнорировали и только около ста лѣтъ спустя послѣ ея появленія о ней снова вспомнили [5]). До того времени считали „Essai sur une manière de représenter

---

[1]) Глава VI, § 1, стр. 329, прим. 1.

[2]) Wallis. Algebra. Opera math. т. II. гл. 66—67, 1693. Ср. H. Hankel. Theorie der komplexen Zahlensysteme. Лейпцигъ 1867. стр. 81 и 82.

[3]) H. Kühn (преподаватель математики гимназіи въ Данцигѣ), «Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis», напечатаны въ отчетахъ Петербургской академіи за 1750 и 1751. Ср. Cantor III, стр. 726—728.

[4]) Родился въ Jonsrud, въ Норвегіи, въ 1745 году. Wessel жилъ съ 1763 года въ Копенгагенѣ, гдѣ онъ по окончаніи ученія занялъ мѣсто землемѣра.

[5]) Она была издана въ 1897 г. на французскомъ языкѣ подъ заглавіемъ: «Essai sur la représentation analytique de la direction». Ср. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, томъ 28 (1897) стр. 45 и 497.

les quantités imaginaires“ (Парижъ 1806, ср. также Annales de Gergonne, томъ IV, стр. 61 и 133, томъ V, стр. 197) Argand'a за первое печатное сочиненіе, въ которомъ вопросъ о геометрическомъ представленіи мнимыхъ чиселъ былъ разрѣшенъ вполнѣ удовлетворительно. Наибольшее же вліяніе на распространеніе ясныхъ представленій о сущности мнимыхъ чиселъ оказалъ Karl Friedrich Gauss. Какъ мы теперь знаемъ, Гауссъ, хотя и сравнительно рано изобрѣлъ геометрическое представленіе мнимыхъ чиселъ и уже пользовался имъ въ письмѣ къ Bessel'ю отъ 18 декабря 1811 года (издано 1880) при изложеніи основныхъ принциповъ теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, однако математическому міру онъ со всей полнотой и ясностью выяснилъ транзіентную реальность такъ называемыхъ мнимыхъ величинъ лишь въ 1831 году въ своемъ сообщеніи о выходѣ въ свѣтъ второго сочиненія по теоріи биквадратичныхъ вычетовъ (Gauss' Werke, томъ II, стр. 165—178) и этимъ весьма содѣйствовалъ общему признанію ихъ равноправія съ дѣйствительными числами. Гауссъ большую часть вины въ царившей по этому вопросу неясности приписываетъ не вполнѣ удачному названію новыхъ чиселъ. Послѣ того, какъ были установлены величины, соотвѣтствующія квадратнымъ корнямъ изъ отрицательныхъ чиселъ, естественно отпало основаніе для введеннаго Декартомъ термина, и на самомъ дѣлѣ оказывается болѣе примѣнимымъ предложенное Гауссомъ названіе [1]) „комплексныя числа“ для выраженій, образованныхъ изъ дѣйствительныхъ чиселъ и $\sqrt{-1}$.

Затѣмъ перешли къ изслѣдованію „имманентной“ реальности комплексныхъ чиселъ, подводя ихъ подъ еще болѣе общее понятіе числа, а именно, подъ понятіе комплекснаго числа съ произвольнымъ числомъ единицъ. При этомъ обнаружилось важное и интересное обстоятельство, что изъ всѣхъ мыслимыхъ системъ комплексныхъ чиселъ только система обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ оказалась единственной, для которой остаются въ силѣ [2]) всѣ законы дѣйствій, установленные для дѣйствительныхъ чиселъ. Изъ числа изслѣдователей, проложившихъ пути въ области комплексныхъ чиселъ общаго вида, слѣдуетъ прежде

[1]) Gauss' Werke. томъ II. стр. 102.

[2]) Что Gauss также уже пришелъ къ этому заключенію, слѣдуетъ изъ послѣдняго предложенія приведеннаго въ выше указанномъ сообщеніи.

всего указать (Sir William Rowan Hamilton) Гамильтона, занимавшагося относящимися къ этому вопросу изслѣдованіями съ 1833 года и изобрѣтшаго въ 1843 году свои „кватерніоны", теорію которыхъ онъ подробно изложилъ въ „Lectures on Quaternions" (Дублинъ 1853) и въ „Elements of Quaternions", 1866. (Нѣмецкій переводъ P. Glan, 1882—1884), а также Германа Грассмана, который свои еще болѣе общія изслѣдованія изложилъ въ трудѣ „Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik" и въ переработкѣ этого труда, изданной 1862 г.

Большія услуги распространенію яснаго представленія о сущности комплексныхъ чиселъ и завершенію теоріи, оказали въ особенности H. Hankel своей „Theorie der komplexen Zahlensysteme", Лейпцигъ 1867 г., и K. Weierstrass своими лекціями [1]), читанными въ Берлинскомъ университетѣ съ начала шестидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія. Изъ новѣйшихъ изслѣдованій мы укажемъ на статью E. Study „Theorie der gemeinen und höheren komplexen Grössen", томъ I, стр. 147—183 въ Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Въ § 2 мы изложимъ въ существенныхъ чертахъ по Weierstrass'у (и именно, главнымъ образомъ, на основаніи лекцій, читанныхъ въ зимнемъ семестрѣ 1882—1883 гг.) теорію комплексныхъ чиселъ, составленныхъ изъ двухъ единицъ, и покажемъ, на основаніи какихъ требованій возникаетъ необходимость ввести простыя комплексныя числа.

Затѣмъ въ § 3 укажемъ систему величинъ, для которой можно установить соединенія, вполнѣ соотвѣтствующія дѣйствіямъ надъ обыкновенными комплексными числами и, наконецъ, въ § 4 покажемъ, что въ области этихъ комплексныхъ чиселъ наши семь дѣйствій всегда выполнимы и что тѣмъ самымъ ариѳметику, по скольку она касается этихъ семи дѣйствій, можно считать удовлетворительно завершенной.

---

[1]) Нѣкоторыя указанія относительно введенія Вейерштрассомъ комплексныхъ чиселъ находятся у Kossak'a въ Programm der Friedrich-Werderschen Gymnasiums zu Berlin vom Jahre 1872, auf Grund der Weierstraschen Vorlesungen vom Wintersemester 1865/66 и Pincherle въ Giornale di Matematiche (G. Battaglini) томъ 18 (1880), стр. 203—210, лекціи 1877/78. Самъ Вейерштрассъ опубликовалъ одно сочиненіе, въ которомъ обработанъ специальный вопросъ этой области, а именно: «Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Grössen», Гёттингенъ 1884, Gesammelte Werke, томъ II, стр. 311.

§ 2. Теорія комплексныхъ величинъ, образованныхъ изъ двухъ единицъ.

А. Опредѣленіе. Равенство. Сложеніе и вычитаніе. Переходъ къ другимъ единицамъ.

Мы пришли къ представленію натуральнаго числа (гл. I, § 1) исходя изъ множествъ, всѣ элементы которыхъ можно считать равноцѣнными по отношенію къ цѣлямъ, стоящимъ на первомъ планѣ нашего интереса,—къ представленію дробнаго (гл. II, § 1) изслѣдованіемъ множествъ между значеніями элементовъ которыхъ существуютъ опредѣленныя соотношенія, и къ представленію относительныхъ чиселъ (гл. IV, § 1), разсматривая множества, въ которыхъ встрѣчаются противоположные другъ другу элементы. Всѣ эти множества мы могли охарактеризовать однимъ названіемъ и однимъ числомъ. Теперь обратимся къ изученію множествъ, несомнѣнно содержащихъ два элемента, между которыми не существуетъ ни одного изъ упомянутыхъ соотношеній, т.-е. эти элементы нельзя разсматривать, ни какъ однородные, и ни одинъ изъ нихъ не можетъ быть эквивалентенъ раціональному или ирраціональному кратному другого, или кратному противоположнаго ему.

Какъ и раньше, отвлечемся снова отъ всѣхъ особыхъ свойствъ этихъ элементовъ, и пусть намъ только извѣстна сейчасъ указанная независимость одного отъ другого, и результатъ такого абстрагированія двухъ элементовъ назовемъ соотвѣтственно единицами e_1 и e_2.

Въ разсматриваемомъ множествѣ также можетъ встрѣчаться сколько угодно элементовъ равнозначныхъ съ e_1 и e_2, а также и всѣ элементы, которыя можно обозначить черезъ

$$\frac{e_1}{n_1}, \quad \frac{-e_1}{n_1}, \quad \frac{-e_2}{n_2}, \quad \frac{-e_2}{n_2}$$

(n_1 и n_2 произвольныя цѣлыя числа).

Далѣе напередъ предположимъ, что если $\gamma = (c_n;\ C_n)$ означаетъ какое-либо ирраціональное число (см. гл. VI, § 1), то существуетъ также такія величины a и b, что для всѣхъ значеній n

$$c_n e_n < a < C_n e_1 \text{ и } c_n e_2 < b < C_n e_2;$$

слѣдовательно, согласно § 8 главы VI подъ γe_1 и соотвѣтственно подъ γe_2 должны разумѣть эти величины a и b. Примѣняя методы, изложенные въ предыдущихъ главахъ, мы можемъ всѣ члены множества, стоящіе въ извѣстныхъ отношеніяхъ къ e_1, соединить въ одинъ единственный a_1e_1, а также соединить всѣ члены, стоящіе въ опредѣленномъ отношеніи къ e_2, въ одинъ членъ a_2e_2, и, слѣдовательно, можемъ наше множество охарактеризовать символомъ $(\alpha_1e_1, \alpha_2e_2)$, гдѣ α_1, α_2 означаютъ теперь какія-либо положительныя или отрицательныя, раціональныя или ирраціональныя числа[1]). Символъ $(\alpha_1e_1, \alpha_2e_2)$ мы теперь будемъ понимать такъ же, какъ нѣкоторое число, и въ отличіе отъ введенныхъ до сихъ поръ дѣйствительныхъ чиселъ — назовемъ комплекснымъ числомъ, такъ какъ дѣло здѣсь идетъ не о чемъ иномъ, какъ о комплексѣ двухъ дѣйствительныхъ чиселъ α_1, α_2, т.-е. о ихъ соединеніи въ одно понятіе. Дѣйствительныя числа содержатся среди комплексныхъ; они соотвѣтствуютъ тому случаю, когда множество содержитъ только элементы одного рода, слѣдовательно, имъ соотвѣтствуетъ символъ $(\alpha_1e_1, 0)$ или проще α_1e_1 [2]). Право разсматривать какъ число подобную совокупность двухъ чиселъ покоится на возможности такого опредѣленія, что мы и покажемъ, равенства и дѣйствій надъ этими числами, что всѣ законы дѣйствій, доказанныя для дѣйствительныхъ чиселъ, остаются справедливыми, и установленныя операціи при $\alpha_2 = 0$ переходятъ въ операціи надъ дѣйствительными числами.

Такъ какъ по нашему предположенію ни для одной пары дѣйствительныхъ чиселъ α_1, α_2, кромѣ

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

α_1e_1 и α_2e_2 не могутъ имѣть равныхъ значеній, то мы можемъ два комплексныхъ числа

$$a = (\alpha_1e_1,\ \alpha_2e_2) \text{ и } b = (\beta_1e_1,\ \beta_2e_2)$$

---

[1]) Если при опредѣленныхъ изслѣдованіяхъ α_1 и α_2 могутъ имѣть лишь цѣлыя значенія, то не слѣдуетъ, конечно, предполагать существованіе долей чиселъ e_1 и e_2.

[2]) Названіе «дѣйствительное число» не отвѣчаетъ, слѣдовательно, сути дѣла. Мы должны были бы собственно сказать, «числа, образованныя» при помощи одной единицы, но мы сохраняемъ названіе «дѣйствительное число», имѣющее за собой историческія основанія, такъ какъ это названіе вполнѣ завоевало себѣ права гражданства. Названіемъ «мнимыя числа» мы будемъ въ дальнѣйшемъ пользоваться для обозначенія комплексныхъ чиселъ безъ дѣйствительной части. Подъ «собственно мнимымъ числомъ» понимаютъ число вида $\alpha_2\ e_2$.

назвать **равными** другъ другу только тогда, когда $\alpha_1 = \beta_1$, и $\alpha_2 = \beta_2$. Непосредственно видно, что изъ этого опредѣленія вытекаетъ слѣдующее: если $a = b$ и $b = c$, то и a должно равняться c.

Подъ суммой чиселъ, соотвѣтствующихъ какимъ либо множествамъ мы всегда понимали число, которое соотвѣтствуетъ новому множеству, полученному изъ соединенія этихъ множествъ; согласно этому мы и **опредѣляемъ** теперь:

$$\text{(I)} \qquad (\alpha_1 e_1,\ \alpha_2 e_2) + (\beta_1 e_1,\ \beta_2 e_2) = \big((\alpha_1 + \beta_1) e_1,\ (\alpha_2 + \beta_2) e_2\big).$$

На основаніи нашего опредѣленія суммы очень легко показать, что если a, a', b, c означаютъ какія либо комплексныя числа, то изъ

$$a = a'$$

слѣдуетъ также, что и

$$a + b = a' + b,$$

и что

$$a + b = b + a,$$

такъ же, какъ и

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Точно также должно имѣть мѣсто

$$(\alpha_1 e_1,\ \alpha_2 e_2) - (\beta_1 e_1,\ \beta_2 e_2) = \big((\alpha_1 - \beta_1) e_1,\ (\alpha_2 - \beta_2) e_2\big).$$

Подъ произведеніемъ $\mu \cdot (\alpha_1 e_1,\ \alpha_2 e_2)$, такъ же какъ и подъ произведеніемъ $(\alpha_1 e_1,\ \alpha_2 e_2) \cdot \mu$, гдѣ μ означаетъ какое либо дѣйствительное число, мы будемъ понимать комплексное число $(\mu\alpha_1)e_1$, $(\mu\alpha_2)e_2$. Тогда, какъ не трудно видѣть,

$$\begin{gathered} (\mu\nu)a = \mu(\nu a), \\ (\mu + \nu)a = \mu a + \nu a, \\ \mu(a + b) = \mu a + \mu b, \end{gathered}$$

если μ, ν означаютъ какія-либо дѣйствительныя, а a и b какія-либо комплексныя числа.

Мы можемъ наши комплексныя числа писать и въ нѣсколько иной формѣ, чѣмъ до сихъ поръ, такъ какъ на основаніи (I)

$$(\alpha_1 e_1,\ \alpha_2 e_2) = (\alpha_1 e_1,\ 0) + (0,\ \alpha_2 e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2.$$

Предметомъ нашего разсмотрѣнія являются, слѣдовательно, всѣ линейныя соединенія обѣихъ единицъ e_1 и e_2 съ произвольными дѣйствительными числами α_1, α_2 въ качествѣ коэффиціентовъ. Прежде всего возникаетъ вопросъ: если $a=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$ и $b=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2$ суть какія-либо числа нашей области, то нельзя ли какое-либо третье число $c=\gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2$ представить также въ видѣ линейнаго соединенія съ дѣйствительными коеффиціентами чиселъ a и b, т.-е. возможно ли опредѣлить дѣйствительныя числа ξ и η такъ, чтобы

$$\gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2=\xi(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2)+\eta(\beta_1 e_1+\beta_2 e_2)?$$

Въ силу опредѣленія равенства двухъ комплексныхъ чиселъ для этого достаточно и необходимо, чтобы

$$\xi\alpha_1+\eta\beta_1=\gamma_1 \text{ и } \xi\alpha_2+\eta\beta_2=\gamma_2.$$

Если предположить, что $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \gtrless 0$, то оба эти равенства удовлетворятся значеніями

$$\xi=\frac{\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}, \qquad \eta=\frac{\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}.$$

Опредѣленіе ξ, η при произвольныхъ значеніяхъ γ_1 и γ_2, становится, напротивъ, невозможнымъ, если $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$. Въ этомъ случаѣ можно задаться двумя числами λ и μ такъ, чтобы

$$\lambda a+\mu b=0 \text{ [1]}).$$

Слѣдовательно, всѣ числа нашей области мы дѣйствительно можемъ линейно выразить черезъ какія-либо два изъ нихъ съ дѣйствительными коэффиціентами, за исключеніемъ такихъ, между которыми существуетъ линейное соотношеніе съ дѣйствительными коэффиціентами. Поэтому, если окажется цѣлесообразнымъ, мы можемъ выбрать за единицы вмѣсто e_1 и e_2 и два другихъ числа нашей области, линейно независимыхъ другъ отъ друга [2]).

B. Умноженіе.

Въ то время какъ опредѣленія суммы и разности двухъ комплексныхъ чиселъ естественно и свободно получились изъ опре-

---

[1]) Для λ, μ можно выбрать какую-либо систему значеній, удовлетворяющихъ двумъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\lambda\alpha_1+\mu\beta_1=0, \ \lambda\alpha_2+\mu\beta_2=0.$$

[2]) Всѣ соображенія, приведенныя въ A, легко распространяются и на числа, составленныя изъ произвольнаго числа единицъ.

дѣленія соотвѣтствующихъ операцій, которыя слѣдуетъ произвести надъ множествами, къ установленію опредѣленнаго значенія произведенія съ самаго начала нѣтъ никакой категорической необходимости. Вѣдь умноженіе для дробныхъ, относительныхъ и ирраціональныхъ чиселъ не имѣетъ уже того смысла, какъ для натуральныхъ чиселъ (сравни, гл. II, § 4, гл. IV, § 5 A и гл. VI, § 4). Слѣдовательно, можетъ итти рѣчь лишь о томъ, возможно ли установить такое дѣйствіе для полученія числа c изъ двухъ данныхъ чиселъ

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,$$

которое мы вправѣ назвать также „умноженіемъ" по той причинѣ, что оно, во-первыхъ, въ томъ частномъ случаѣ когда

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 0$$

переходитъ въ ранѣе опредѣленное умноженіе, и что, во-вторыхъ, для него остаются справедливыми всѣ законы умноженія, доказанные для ранѣе введенныхъ чиселъ.

Послѣднее требованіе выполняется (ср. гл. I, § 5 C), если имѣютъ мѣсто три равенства, носящія названія коммутативнаго, ассоціативнаго и дистрибутивнаго законовъ. Чтобы при умноженіи не выходить изъ нашей числовой области, мы устанавливаемъ далѣе, что произведеніе двухъ произвольныхъ комплексныхъ чиселъ должно быть числомъ комплекснымъ вида $\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, гдѣ γ_1 и γ_2 означаютъ дѣйствительные коэффиціенты [1]). То, что должно имѣть мѣсто для произвольныхъ комплексныхъ чиселъ, конечно должно оказаться вѣрнымъ и для самыхъ единицъ e_1 и e_2, поэтому полагаемъ:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} e_1 e_1 &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, \\ e_1 e_2 = e_2 e_1 &= \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2, \\ e_2 e_2 &= \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2, \end{aligned}$$

---

[1]) Это утвержденіе не является необходимымъ. H. G r a s s m a n n въ своемъ ученіи о протяженіи опредѣлялъ «умноженія», въ которыхъ произведеніе отличалось по своей природѣ отъ сомножителей. Ср. въ особенности наряду съ прочими работами G r a s s m a n n'а его сочиненіе «Sur les divers genres de multiplication», Journ. f. Math, т. 49, стр. 123. H. H a n k e l (Theorie der komplexen Zahlensysteme, стр. 106) называетъ систему комплексныхъ чиселъ, удовлетворяющую вышеозначенному требованію, «ограниченной» (begrenztes) системой.

гдѣ коэффиціенты правой части, прежде всего, суть какія либо дѣйствительныя числа, и

$$
\text{(III)}\qquad
\begin{aligned}
(\alpha_1 e_1)(\beta_1 e_1) &= (\alpha_1\beta_1)(e_1 e_1) = (\alpha_1\beta_1)(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2),\\
(\alpha_1 e_1)(\beta_2 e_2) &= (\alpha_1\beta_2)(e_1 e_2) = (\alpha_1\beta_2)(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2),\\
(\alpha_2 e_2)(\beta_2 e_2) &= (\alpha_2\beta_2)(e_2 e_2) = (\alpha_2\beta_2)(\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2).
\end{aligned}
$$

Теперь намъ предстоитъ задача изслѣдовать, возможно ли коэффиціэнты λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 опредѣлить такъ, чтобы для произведенія двухъ произвольныхъ комплексныхъ чиселъ

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

выполнялись всѣ установленныя ранѣе требованія. Каждой системѣ значеній коэффиціентовъ λ, μ, ν соотвѣтствуетъ опредѣленное умноженіе и различныя возможныя системы комплексныхъ чиселъ отличаются другъ отъ друга способомъ образованія произведеній. Во всякомъ случаѣ, двумъ различнымъ системамъ значеній λ, μ, ν можетъ все-таки соотвѣтствовать одна и та же система комплексныхъ чиселъ, такъ какъ при переходѣ къ другимъ единицамъ въ предѣлахъ той же системы мѣняются также и коэффиціенты умноженія[1]).

Такъ какъ долженъ остаться въ силѣ и дистрибутивный законъ, то мы должны имѣть возможность образовать произведеніе обоихъ чиселъ

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,$$

умножая каждый членъ одной суммы на каждый членъ другой.

---

[1]) Если, напр., будутъ введены, какъ новыя единицы,

$$a = 3\,e_1 + e_2,\ b = 5\,e_1 + 2\,e_2$$

то

$$
\begin{aligned}
ab &= 15\,(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = +\,11\,(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) + 2\,(\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2) = \\
&= (15\,\lambda_1 + 11\,\mu_1 + 2\,\nu_1)\,e_1 + (15\,\lambda_2 + 11\,\mu_2 + 2\,\nu_2)\,e_2,
\end{aligned}
$$

или, такъ какъ

$$e_1 = 2\,a - b,\ e_2 = -\,5\,a + 3\,b,$$

то

$$a\,b = \mu_1' a + \mu_2' b,$$

гдѣ теперь

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= 30\,\lambda_1 + 22\,\mu_1 + 4\,\nu_1 - 75\,\lambda_2 - 55\,\mu_2 - 10\,\nu_2,\\
\mu_2' &= -\,15\,\lambda_1 - 11\,\mu_1 - 2\,\nu_1 + 45\,\lambda_2 + 33\,\mu_2 + 6\,\nu_2,
\end{aligned}
$$

конечно, вообще говоря, отличны отъ μ_1, μ_2, несмотря на то, что мы имѣемъ дѣло съ той же системой комплексныхъ чиселъ.

Слѣдовательно, должно быть:

$$
\begin{aligned}
ab &= (\alpha_1\beta_1)(e_1e_1) + (\alpha_1\beta_2)(e_1e_2) + (\alpha_2\beta_1)(e_2e_1) + (\alpha_2\beta_2)(e_2e_2) = \\
&= (\alpha_1\beta_1)(\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(\mu_1e_1 + \mu_2e_2) + (\alpha_2\beta_2)(\nu_1e_1 + \nu_2e_2)
\end{aligned}
$$

слѣдовательно:

$$
\text{(IV)} \qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{ab} = (\alpha_1\beta_1\lambda_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mu_1 + \alpha_2\beta_2\nu_1)\boldsymbol{e}_1 \\
+ (\alpha_1\beta_1\lambda_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mu_2 + \alpha_2\beta_2\nu_2)\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}
$$

Изложенное выше имѣло лишь цѣлью показать, какимъ образомъ мы приходимъ къ равенству (IV). Теперь мы опредѣляемъ правую часть (IV), какъ произведеніе двухъ произвольныхъ комплексныхъ чиселъ

$$a = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2, \quad b = \beta_1e_1 + \beta_2e_2.$$

Въ (IV-омъ), заключены (II) и (III), какъ частные случаи. Опредѣленіе, конечно, лишь тогда можно считать установленнымъ, если коеффиціентамъ λ, μ, ν будутъ приданы опредѣленныя значенія.

Такъ какъ правая часть (IV) остается безъ измѣненія, если замѣнить α_1 черезъ β_1 и α_2 черезъ β_2, то независимо отъ того, какія значенія имѣютъ коеффиціенты λ, μ, ν, имѣетъ мѣсто

$$ab = ba.$$

Изъ опредѣленія равенства двухъ комплексныхъ чиселъ b, c и опредѣленія произведенія непосредственно вытекаетъ, что если b равно c, то и

$$ab = ac.$$

Если

$$a = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2, \quad b = \beta_1e_1 + \beta_2e_2, \quad c = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2,$$

то

$$
\begin{aligned}
(a+b)c &= ((\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2)\cdot(\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2) = \\
&= [(\alpha_1+\beta_1)\gamma_1\lambda_1 + ((\alpha_1+\beta_1)\gamma_2 + (\alpha_2+\beta_2)\gamma_1)\mu_1 + (\alpha_2+\beta_2)\gamma_2\nu_1]e_1 + \\
&+ [(\alpha_1+\beta_1)\gamma_1\lambda_2 + ((\alpha_1+\beta_1)\gamma_2 + (\alpha_2+\beta_2)\gamma_1)\mu_2 + (\alpha_2+\beta_2)\gamma_2\nu_2]e_2 = \\
&= [\alpha_1\gamma_1\lambda_1 + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1)\mu_1 + \alpha_2\gamma_2\nu_1]e_1 + \\
&+ [\alpha_1\gamma_1\lambda_2 + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1)\mu_2 + \alpha_2\gamma_2\nu_2]e_2 + \\
&+ [\beta_1\gamma_1\lambda_1 + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)\mu_1 + \beta_2\gamma_2\nu_1]e_1 + \\
&+ [\beta_1\gamma_1\lambda_2 + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)\mu_2 + \beta_2\gamma_2\nu_2]e_2 = \\
&= ac + bc,
\end{aligned}
$$

т.-е. и при произвольныхъ значеніяхъ $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$, остается въ силѣ и дистрибутивный законъ.

Чтобы провѣрить справедливость ассоціативнаго закона, мы составимъ, съ одной стороны:

$$(ab)c = [(\alpha_1\beta_1)(e_1e_1) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(e_1e_2) + (\alpha_2\beta_2)(e_2e_2)]\cdot(\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2) =$$
$$= (\alpha_1\beta_1\gamma_1)(e_1e_1e_1) + (\alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1)(e_1e_2e_1) + (\alpha_2\beta_2\gamma_1)(e_2e_2e_1) +$$
$$+ (\alpha_1\beta_1\gamma_2)(e_1e_1e_2) + (\alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2)(e_1e_2e_2) + (\alpha_2\beta_2\gamma_2)(e_2e_2e_2),$$

и, съ другой стороны,

$$a(bc) = (bc)a =$$
$$= [(\beta_1\gamma_1)(e_1e_1) + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)(e_1e_2) + (\beta_2\gamma_2)(e_2e_2)]\cdot(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2) =$$
$$= (\alpha_1\beta_1\gamma_1)(e_1e_1e_1) + (\alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1)(e_1e_2e_1) + (\alpha_1\beta_2\gamma_2)(e_2e_2e_1) +$$
$$+ (\alpha_2\beta_1\gamma_1)(e_1e_1e_2) + (\alpha_2\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_1)(e_1e_2e_2) + (\alpha_2\beta_2\gamma_2)(e_2e_2e_2).$$

Сравненіе обѣихъ правыхъ частей указываетъ, что несомнѣнно

$$(ab)c = a(bc),$$

если

$$(e_1e_1)e_2 = (e_1e_2)e_1$$

и

$$(e_1e_2)e_2 = (e_2e_2)e_1.$$

Эти оба равенства оказываются и необходимыми, такъ какъ они представляютъ, въ силу доказаннаго коммутативнаго закона

$$(e_1e_2)e_1 = e_1(e_1e_2) \text{ и } (e_2e_2)e_1 = e_1(e_2e_2),$$

ассоціативный законъ для единицъ, для которыхъ конечно онъ также долженъ быть справедливъ, если только онъ будетъ имѣть мѣсто для произвольныхъ комплексныхъ чиселъ. Теперь возникаетъ вопросъ, какіе выводы на основаніи этихъ обоихъ равенствъ можно сдѣлать относительно коеффиціентовъ λ, μ, ν. Мы получаемъ

$$(e_1e_1)e_2 = (\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2)e_2 = \lambda_1(e_1e_2) + \lambda_2(e_2e_2) =$$
$$= \lambda_1(\mu_1e_1 + \mu_2e_2) + \lambda_2(\nu_1e_1 + \nu_2e_2) =$$
$$= (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\nu_2)e_1 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\nu_2)e_2$$

и такимъ же образомъ

$$(e_1e_2)e_1 = (\lambda_1\mu_1 + \mu_1\mu_2)e_1 + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2{}^2)e_2,$$
$$(e_1e_2)e_2 = (\mu_1{}^2 + \mu_2\nu_1)e_1 + (\mu_1u_2 + \mu_2\nu_2)e_2,$$
$$(e_2e_2)e_1 = (\lambda_1\nu_1 + \mu_1\nu_2)e_1 + (\lambda_2\nu_1 + \mu_2\nu_2)e_2.$$

Слѣдовательно, наши оба равенства выполнимы тогда и только тогда, если одновременно:

$$
(\mathrm{V}) \qquad
\begin{aligned}
\lambda_2\nu_1 &= \mu_1\mu_2,\\
\lambda_1\mu_2+\lambda_2\nu_2 &= \mu_1\lambda_2+\mu_2{}^2,\\
\mu_1{}^2+\mu_2\nu_1 &= \lambda_1\nu_1+\mu_1\nu_2.
\end{aligned}
$$

Если написать оба послѣднихъ соотношенія въ видѣ

$$
(\mathrm{V}\ \mathrm{a}) \qquad
\lambda_2(\mu_1-\nu_2)=\mu_2(\lambda_1-\mu_2) \quad \text{и} \quad \mu_1(\mu_1-\nu_2)=\nu_1(\lambda_1-\mu_2),
$$

то видимъ, что первое равенство вытекаетъ изъ нихъ, за исключеніемъ того случая, когда одновременно $\mu_1=\nu_2$ и $\lambda_1=\mu_2$, въ которомъ и первое изъ условій (V) должно быть удержано. Между тѣмъ, какъ коммутативный и дистрибутивный законы имѣютъ мѣсто при любыхъ значеніяхъ коэффиціентовъ λ, μ, ν, для выполнимости ассоціативнаго закона требуется существованіе равенствъ V и соотвѣтственно V a. Систему значеній λ, μ, ν, удовлетворяющихъ этимъ равенствамъ, легко можно представить слѣдующимъ образомъ:

Полагаемъ

$$
(\mathrm{VI}) \qquad
\begin{aligned}
\lambda_1-\mu_2 &= k\varepsilon,\\
\mu_1-\nu_2 &= k\varepsilon',\\
\lambda_2 &= k'\varepsilon,\\
\mu_2 &= k'\varepsilon'.\\
\mu_1 &= k''\varepsilon,\\
\nu_1 &= k''\varepsilon',
\end{aligned}
$$

т.-е. опредѣляемъ наши коэффиціенты умноженія такъ, чтобы

$$
(\mathrm{VI}\ \mathrm{a}) \qquad
\begin{aligned}
\lambda_1 &= k\varepsilon+k'\varepsilon', & \lambda_2 &= k'\varepsilon,\\
\mu_1 &= k''\varepsilon, & \mu_2 &= k'\varepsilon',\\
\nu_1 &= k''\varepsilon', & \nu_2 &= k''\varepsilon-k\varepsilon';
\end{aligned}
$$

тогда равенства (V) удовлетворяются при произвольныхъ значеніяхъ k, k', k'', ε, ε'. Если, обратно, 6 чиселъ λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 имѣютъ данныя значенія, удовлетворяющія равенствамъ (V) (если мы, слѣдовательно, остаемся при опредѣленномъ процессѣ умноженія), то 5 чиселъ k, k', k'', ε, ε' еще не вполнѣ опредѣлены; напротивъ, мы можемъ одному изъ нихъ, напр. ε придать еще произвольное отличное отъ нуля значеніе. Вѣдь тогда-то и получаются изъ перваго изъ равенствъ (VI):

$$k = \frac{\lambda_1 - \mu_2}{\varepsilon},$$

изъ второго:

$$\varepsilon' = \frac{\mu_1 - \nu_2}{k} = \frac{(\mu_1 - \nu_2)\varepsilon}{\lambda_1 - \mu_2},$$

(VI b) изъ третьяго

$$k' = \frac{\lambda_2}{\varepsilon},$$

изъ пятаго

$$k'' = \frac{\mu_1}{\varepsilon},$$

въ то время, какъ четвертое и шестое, въ силу (V a), выполняются сами собой. Въ особомъ случаѣ, когда $\lambda_1 - \mu_2 = 0$, слѣдуетъ и ε' придать произвольное отличное отъ нуля значеніе [1]).

C. Дѣленіе.

Пусть даны комплексныя числа

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \quad \text{и} \quad c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$$

и требуется такъ опредѣлить комплексное число $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, чтобы

$$ab = c.$$

Если ab придадимъ значеніе (IV) на стр. 381, то для опредѣленія β_1 и β_2 получимъ равенства

$$(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\mu_1)\beta_1 + (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\nu_1)\beta_2 = \gamma_1,$$
$$(\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\mu_2)\beta_1 + (\alpha_1\mu_2 + \alpha_2\nu_2)\beta_2 = \gamma_2,$$

изъ которыхъ далѣе получаемъ:

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1(\alpha_1\mu_2 + \alpha_2\nu_2) - \gamma_2(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\nu_1)}{\delta},$$

$$\beta_2 = \frac{-\gamma_1(\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\mu_2) + \gamma_2(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\mu_1)}{\delta},$$

---

1) Если, напр.,

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1,\ \nu_1 = -1,\ \nu_2 = 0,$$

то всѣ равенства (VI) удовлетворяются значеніями

$$\varepsilon = 0,\ k = 0,\ k' = \frac{1}{\varepsilon'},\ k'' = -\frac{1}{\varepsilon'},$$

гдѣ ε' есть любое число, отличное отъ нуля.

гдѣ

$$\delta = (\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\mu_1)(\alpha_1\mu_2 + \alpha_2\nu_2) - (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\nu_1)(\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\mu_2) =$$
$$= \alpha_1^2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) + \alpha_2^2(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) + \alpha_1\alpha_2(\lambda_1\nu_2 - \lambda_2\nu_1),$$

или на основаніи равенствъ (VI a):

$$\delta = k'\alpha_1^2(k\varepsilon\varepsilon' + k'\varepsilon'\varepsilon' + k''\varepsilon\varepsilon) - k''\alpha_2^2(k'\varepsilon'\varepsilon' - k''\varepsilon\varepsilon + k\varepsilon\varepsilon') -$$
$$- k\alpha_1\alpha_2(k\varepsilon\varepsilon' + k'\varepsilon'\varepsilon' - k''\varepsilon\varepsilon),$$

(VII) $\delta = (k'\alpha_1^2 - k''\alpha_2^2 - k\alpha_1\alpha_2)\omega,$

гдѣ

$$\omega = k\varepsilon\varepsilon' + k'\varepsilon'\varepsilon' - k''\varepsilon\varepsilon.$$

Опредѣленіе β_1 и β_2 возможно. т.-е. дѣленіе $c:a$ выполнимо тогда и только тогда, если $\delta \gtrless 0$. Мы представили δ въ видѣ произведенія двухъ сомножителей, изъ которыхъ второй, ω, совершенно не зависитъ отъ дѣлителя a, а лишь отъ коэффиціентовъ умноженія. Если бы мы выбрали k, k', k'', ε, ε' такъ, что $\omega = 0$, то дѣленіе не оказалось бы выполнимымъ ни при какомъ дѣлителѣ. Поэтому на числа k, k', k'', ε, ε' мы теперь уже накладываемъ ограниченіе

(VIII) $$\omega \gtrless 0.$$

Но если и это условіе выполнено, то кромѣ нуля можетъ оказаться безчисленно много чиселъ

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

дѣленіе на которыя, при произвольномъ выборѣ k, k', k'', не выполнимо, а именно всѣ тѣ, для которыхъ

$$k'\alpha_1^2 - k''\alpha_2^2 - k\alpha_1\alpha_2 = 0.$$

Теорія квадратныхъ уравненій показываетъ, что это уравненіе не удовлетворяется дѣйствительными, отличными отъ нуля, значеніями для α_1 и α_2, если

(IX) $$k^2 + 4k'k'' < 0.$$

Если на числа k, k', k'' наложить еще условіе (IX), то въ нашей области комплексныхъ чиселъ можно выполнять дѣленіе на всякое отличное отъ нуля число.

Если въ задачѣ на дѣленіе, изъ которой мы исходили, дѣлимое c имѣетъ въ частности значеніе нуль, т.-е. если желаемъ b опредѣлить такъ, чтобы

$$ab = 0,$$

то числители выраженій β_1 и β_2 сдѣлаются равными нулю. Если теперь $\delta \gtrless 0$, т.-е. либо $k^2 + 4k'k'' < 0$, либо a все-таки принадлежитъ къ числамъ, дѣленіе на которыя допустимо, то для β_1 и β_2 получаются лишь значенія $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$. Слѣдовательно, если произведеніе двухъ комплексныхъ чиселъ имѣетъ значеніи 0 и одинъ изъ сомножителей принадлежитъ къ числамъ, дѣленіе на которыя возможно, то другой долженъ быть равенъ нулю.

Отсюда сейчасъ же можно сдѣлать дальнѣйшее заключеніе: если a принадлежитъ къ числамъ, дѣленіе на которыя допустимо, то изъ

$$ab = ac$$

необходимо слѣдуетъ

$$b = c.$$

D. Отысканіе двухъ единицъ съ возможно простыми коэффиціентами умноженія.

Изложенное до сихъ поръ въ § 2 привело насъ къ слѣдующему результату: для комплексныхъ чиселъ, составленныхъ изъ двухъ единицъ e_1 и e_2, сложеніе, вычитаніе и умноженіе могутъ быть опредѣлены такъ, что результатъ дѣйствія всегда однозначенъ, а также остаются справедливыми всѣ законы дѣйствій, установленные для дѣйствительныхъ чиселъ, если только коэффиціенты умноженія λ, μ, ν, удовлетворяютъ равенствамъ (V). Также и дѣленіе, вообще говоря, является выполнимымъ, если удовлетворено неравенство (VIII), и возможнымъ даже при всякомъ дѣлителѣ (кромѣ нуля), если k, k', k'' удовлетворяютъ еще неравенству (IX). Въ силу этого допустимы всѣ системы комплесныхъ чиселъ изъ двухъ единицъ, коэффиціенты умноженія которыхъ удовлетворяютъ указаннымъ условіямъ.

Представимъ себѣ теперь выдѣленной одну произвольную систему, т.-е. выберемъ для λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 какую-либо систему значеній, не противорѣчащую этимъ условіямъ. Уже въ B, стр. 381, мы указывали на то, что коэффиціенты умноженія измѣнятся, если e_1, e_2, замѣнить двумя иными, другъ отъ друга линейно не зависящими числами той же системы. Мы попытаемся теперь найти такія два числа, для которыхъ коэффиціенты умноженія получаютъ особо простыя значенія.

Чтобы показать, что въ каждой изъ нашихъ системъ комплексныхъ чиселъ (т.-е. при каждой допустимой системѣ значеній

λ, μ. ν) имѣется число, обладающее свойствомъ оставлять при умноженіи безъ измѣненія всякое число, вычислимъ частное $\frac{a}{a}$, положивъ въ задачѣ на дѣленіе, рѣшенной въ С, $c=a$, слѣдовательно, $\gamma_1=\alpha_1$; $\gamma_2=\alpha_2$. Тогда мы получимъ:

$$a:a=\frac{\alpha_1^2\mu_2-\alpha_1\alpha_2(\mu_1-\nu_2)-\alpha_2^2\nu_1}{\delta}e_1+\frac{-\alpha_1^2\lambda_2+\alpha_1\alpha_2(\lambda_1-\mu_2)+\alpha_2^2\mu_1}{\delta}e_2,=$$

или, принимая во вниманіе равенства (VI) и значеніе δ (VII), полученное на стр. 385:

$$a:a=\frac{\varepsilon'(\alpha_1^2k'-\alpha_1\alpha_2k-\alpha_2^2k'')}{\omega(\alpha_1^2k'-\alpha_1\alpha_2k-\alpha_2^2k'')}e_1-\frac{\varepsilon(\alpha_1^2k'-\alpha_1\alpha_2k-\alpha_2^2k'')}{\omega(\alpha_1^2k'-\alpha_1\alpha_2k-\alpha_2^2k'')}e_2=$$
$$=\frac{\varepsilon'}{\omega}e_1-\frac{\varepsilon}{\omega}e_2.$$

Если замѣнить въ ω числа k, k', k'', ε, ε' при помощи равенствъ (VI b), стр. 384, черезъ λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, то будемъ имѣть

$$\omega=\varepsilon\frac{\mu_1\mu_2-\lambda_1\nu_2}{\lambda_1-\mu_2}=\varepsilon'\frac{\mu_1\mu_2-\lambda_1\nu_2}{\mu_1-\nu_2}$$

и

$$a:a=\frac{\mu_1-\nu_2}{\mu_1\mu_2-\lambda_1\nu_2}e_1-\frac{\lambda_1-\mu_2}{\mu_1\mu_2-\lambda_1\nu_2}e_2.$$

Теперь правая часть зависитъ только отъ коэффиціентовъ умноженія λ, μ, ν; но она уже не содержитъ коэффиціентовъ числа a, α_1 и α_2. Отсюда слѣдуетъ, что если a, b, c,... означаютъ какія либо числа данной системы, то каждое изъ частныхъ

$$a:a,\ b:b,\ c:c,\cdots$$

равно одному и тому же однозначно опредѣленному числу

$$\text{(X)}\qquad e=\frac{\varepsilon'}{\omega}e_1-\frac{\varepsilon}{\omega}e_2=\frac{\mu_1-\nu_2}{\mu_1\mu_2-\lambda_1\nu_2}e_1-\frac{\lambda_1-\mu_2}{\mu_1\mu_2-\lambda_1\nu_2}e_2,$$

которое, слѣдовательно, при умноженіи оставляетъ безъ измѣненія любое число [1]).

Число e выбираемъ за одну изъ двухъ окончательно устанавливаемыхъ единицъ и называемъ его поэтому главной единицей. Замѣняя e_1 значеніемъ, получаемымъ изъ (X)

$$e_1=\frac{\omega}{\varepsilon'}e+\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}e_2,$$

---

[1]) Stolz и Gmeiner (Theoretische Arithmetik, X Abschnitt, стр. 282) напередъ предполагаютъ существованіе такого числа и выводятъ отсюда справедливость ассоціативнаго закона, въ то время какъ выше въ текстѣ нами принятъ другой путь.

мы представляемъ себѣ прежде всего всѣ числа нашей системы выраженными черезъ e и e_2 [1]), что допустимо, такъ какъ между ними не имѣетъ мѣста никакое линейное соотношеніе.

Для единицъ e, e_2 имѣютъ мѣсто слѣдующія формулы умноженія:

$$ee = e,$$

$$ee_2 = e_2e = e_2 \text{ }^{2)},$$

$$e_2e_2 = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 = \frac{\nu_1\omega}{\varepsilon'}\, e + \left(\frac{\nu_1\varepsilon}{\varepsilon'} + \nu_2\right) e_2,$$

или на основаніи равенствъ (VI a), стр. 384:

$$e_2e_2 = k''\omega e + (2k''\varepsilon - k\varepsilon')e_2.$$

Первыя двѣ формулы умноженія настолько просты, насколько это только возможно, но не третья. Поэтому попытаемся выбрать за вторую главную единицу нѣкоторое число i, квадратъ котораго есть число вида ρe или σi, гдѣ ρ и σ означаютъ дѣйствительныя числа.

Если бы мы нашли число i такимъ образомъ, что

$$ii = \sigma i,$$

то, такъ какъ

$$ei = i,$$

мы получили бы для него

$$ii = \sigma ei,$$

откуда

$$i = \sigma e;$$

слѣдовательно, i было бы линейно зависимо отъ e.

Поэтому мы постараемся число

$$i = \xi e + \eta e_2$$

опредѣлить такъ, чтобы

$$ii = \rho e.$$

---

[1]) Weierstrass сохраняетъ единицы e_1, e_2 и непосредственно показываетъ, что существуетъ число $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, квадратъ котораго равенъ произведенію дѣйствительнаго числа ρ и величины $\frac{\varepsilon'}{\omega}\, e_1 - \frac{\varepsilon}{\omega}\, e_2$. Но этотъ путь требуетъ нѣсколько болѣе сложныхъ вычисленій.

[2]) Эти равенства слѣдуютъ непосредственно изъ выше доказаннаго свойства числа e. Само собой понятно, что можно и потомъ убѣдиться въ ихъ вѣрности, выполнивъ на самомъ дѣлѣ умноженіе и пользуясь равенствомъ X.

Умноженіе даетъ:

$$ii = (\xi e + \eta e_2)^2 = \xi^2 e + 2\xi\eta e_2 + \eta^2(\alpha e + \beta e_2),$$

гдѣ для сокращенія принято

$$\alpha = k''\omega = \mu_1 \frac{\mu_1\mu_2 - \lambda_1\nu_2}{\lambda_1 - \mu_2},$$
$$\beta = 2k''\varepsilon - k\varepsilon' = \mu_1 + \nu_2,$$

или

$$ii = (\xi^2 + \alpha\eta^2)e + \eta(2\xi + \beta\eta)e_2.$$

Чтобы достигнуть нашей цѣли, выберемъ ξ и η такъ, чтобы

$$2\xi + \beta\eta = 0,$$

слѣдовательно,

$$\xi = -\frac{1}{2}\beta\eta = -\frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2)\eta.$$

Тогда

$$ii = \eta^2\left(\frac{1}{4}\beta^2 + \alpha\right)e;$$

итакъ, на самомъ дѣлѣ,

(XI) $$\boldsymbol{ii = \rho e},$$

гдѣ

$$\rho = \eta^2\left(\frac{1}{4}\beta^2 + \alpha\right)$$
$$= \frac{\eta^2}{4}\cdot\varepsilon'^2(k^2 + 4k'k''),$$

или на основаніи равенствъ (VI b):

$$\rho = \frac{\eta^2}{4}\frac{(\mu_1 - \nu_2)^2}{(\lambda_1 - \mu_2)^2}\left[(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1\right].$$

Смотря по значенію коеффиціентовъ умноженія, ρ можетъ быть положительнымъ, равнымъ нулю или отрицательнымъ.

E. Три типа системъ комплексныхъ чиселъ изъ двухъ единицъ.

Пусть

(XII) 1. $$\boldsymbol{k^2 + 4k'k'' > 0},$$

и соотвѣтственно,

$$\boldsymbol{(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1 > 0};$$

тогда для каждаго дѣйствительнаго значенія η также и

$$\rho > 0.$$

Въ этомъ случаѣ, еще находящееся въ нашемъ распоряженіи число γ_1 опредѣляемъ такъ, чтобы

$$\gamma_1^2 = \frac{4(\lambda_1 - \mu_2)^2}{(\mu_1 - \nu_2)^2[(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1]},$$

и принимаемъ за вторую основную единицу число, соотвѣтствующее одному изъ двухъ значеній, удовлетворяющихъ этому равенству:

$$i_1 = -\frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2)\gamma_1 e + \gamma_1 e_2$$

Для e и i_1 имѣютъ мѣсто слѣдующія формулы умноженія:

$$\text{(XIIa)} \qquad \begin{aligned} ee &= e, \\ ei_1 &= i_1 e = i_1, \\ i_1 i_1 &= e. \end{aligned}$$

Такъ какъ равенства (V), стр. 383, сохраняютъ силу, то всѣ законы умноженія оказываются справедливыми, и для произведенія двухъ произвольныхъ чиселъ получаемъ:

$$a = \alpha e + \alpha_1 i_1, \quad b = \beta e + \beta_1 i_1$$
$$ab = (\alpha\beta + \alpha_1\beta_1)e + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)i_1.$$

Такъ какъ ω отлично отъ нуля, то и дѣленіе вообще выполнимо. Но существуютъ числа, дѣленіе на которыя недопустимо. А именно, если мы подберемъ такое значеніе для b, чтобы

$$ab = c = \gamma e + \gamma_1 i_1,$$

то коеффиціенты β и β_1 должны будутъ удовлетворять равенствамъ:

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 &= \gamma, \\ \alpha_1\beta + \alpha\beta_1 &= \gamma_1. \end{aligned}$$

Эти коеффиціенты нельзя будетъ опредѣлить при произвольныхъ значеніяхъ γ и γ_1, если

$$\alpha^2 - \alpha_1^2 = 0,$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha_1 = \pm \alpha.$$

Поэтому дѣленіе невозможно на безконечно большое число чиселъ вида $\alpha(e \pm i_1)$. Отсюда вытекаетъ еще дальнѣйшее уклоненіе отъ ариѳметики дѣйствительныхъ чиселъ. Произведеніе

$$(e + i_1)(e - i_1) = ee - i_1 i_1 = e - e$$

имѣетъ значеніе нуль, хотя ни одинъ изъ сомножителей не обращается въ нуль.

Далѣе возникаетъ вопросъ, разрѣшима ли въ такой системѣ задача извлеченія квадратнаго корня изъ произвольнаго числа, ради которой мы и перешли къ системамъ изъ двухъ единицъ. Если должно имѣть мѣсто,

$$(\xi e+\xi_1 i_1)^2=ae+a_1 i_1$$

то ξ и ξ_1 должны удовлетворять равенствамъ:

$$\xi^2+\xi_1{}^2=a,$$
$$2\xi\xi_1=a_1,$$

изъ которыхъ непосредственно вытекаетъ:

$$\xi+\xi_1=\sqrt{a+a_1},$$
$$\xi-\xi_1=\sqrt{a-a_1}.$$

Для ξ и ξ_1 мы только тогда получимъ дѣйствительныя значенія, если

$$a+a_1>0, \text{ и также } a-a_1>0,$$

т.-е. если одновременно

$$a>0 \text{ и } a>|a_1|.$$

Изъ чиселъ вида $ae+a_1 i_1$, не удовлетворяющихъ этимъ условіямъ, нельзя извлечь квадратнаго корня, напримѣръ, нельзя извлечь корня изъ $-e$.

При переходѣ къ двумъ новымъ единицамъ g и h, опредѣляемымъ равенствами:

$$g=\frac{1}{2}(e+i_1),$$
$$h=\frac{1}{2}(e-i_1).$$

выясняется еще одно свойство сейчасъ разсмотрѣнной системы комплексныхъ чиселъ.

Для g и h формулы умноженія будутъ слѣдующія:

$$gg=\frac{1}{4}(ee+i_1 i_1+2ei_1)=g,$$
$$gh=\frac{1}{4}(ee-i_1 i_1)\qquad=0,$$
$$hh=\frac{1}{4}(ee+i_1 i_1-2ei_1)=h.$$

Если

$$a = \alpha g + \alpha' h,\ \ b = \beta g + \beta' h$$

два произвольныхъ числа этой системы, то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} a \pm b &= (\alpha \pm \beta) g + (\alpha' \pm \beta') h, \\ ab &= \alpha\beta g + \alpha'\beta' h, \\ \frac{a}{b} &= \frac{\alpha}{\beta} g + \frac{\alpha'}{\beta'} h. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, чтобы выполнить одно изъ четырехъ основныхъ дѣйствій надъ двумя комплексными числами, отнесенными къ основнымъ единицамъ g и h, слѣдуетъ выполнить соотвѣтствующія вычисленія сначала надъ одной, а затѣмъ, независимо отъ этого, надъ другой единицей. Итакъ, мы здѣсь не получаемъ ничего новаго, а имѣемъ лишь повтореніе операцій уже изученныхъ въ области величинъ, образованныхъ изъ одной единицы.

На основаніи всѣхъ приведенныхъ здѣсь соображеній мы отказываемся отъ введенія системъ комплексныхъ чиселъ, коэффиціенты умноженія которыхъ удовлетворяютъ неравенству (XII).

Перейдемъ теперь къ случаю

(XIII) $\qquad$ 2. $\qquad (\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1 = 0,$

въ которомъ множитель ρ въ равенствѣ (XI) стр. 389 будетъ нулемъ для каждаго значенія η. Если положить для любого значенія η

$$i_0 = -\frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2)\eta e + \eta e_2,$$

то формулы умноженія для e и i_0 дадутъ:

(XIIIa)
$$\begin{aligned} ee &= e, \\ ei_0 &= i_0 e = i_0, \\ i_0 i_0 &= 0. \end{aligned}$$

Послѣднее равенство уже показываетъ, что въ этой системѣ произведеніе можетъ обратиться въ нуль, хотя бы ни одинъ изъ множителей не имѣлъ значенія 0.

Если

$$\begin{aligned} a &= \alpha e + \alpha_0 i_0, \\ b &= \beta e + \beta_0 i_0, \end{aligned}$$

то

$$ab = \alpha\beta e + (\alpha\beta_0 + \alpha_0\beta) i_0.$$

Если требуется опредѣлить число b такъ, чтобы

$$ab = c = \gamma e + \gamma_0 i_0,$$

то β, β_0 должны удовлетворять равенствамъ

$$\alpha\beta = \gamma,$$
$$\alpha_0\beta + \alpha\beta_0 = \gamma_0,$$

которыя лишь тогда даютъ опредѣленныя конечныя значенія для β и β_0, если

$$\alpha \gtrless 0.$$

Слѣдовательно, въ этой системѣ нельзя производить дѣленіе ни на одно число вида $\alpha_0 i_0$.

Далѣе имѣемъ

$$(\xi e + \xi_0 i_0)^2 = \xi^2 e + 2\xi\xi_0 i_0.$$

Такъ какъ всегда $\xi^2 > 0$, то нельзя ни изъ какого числа вида $\alpha e + \alpha_0 e_0$, при $\alpha < 0$ извлечь квадратнаго корня, напр., нельзя извлечь его изъ $-e$. Слѣдовательно, и въ системѣ, охарактеризованной равенствомъ (XIII), правила дѣйствій значительно уклоняются отъ правилъ дѣйствій, имѣющихъ мѣсто въ ариѳметикѣ дѣйствительныхъ чиселъ и, кромѣ того, въ этой системѣ является даже неразрѣшимой задача, давшая поводъ къ введенію системы изъ двухъ единицъ.

Поэтому обратимся, наконецъ, къ тому случаю, когда

(XIV) 3. $\boldsymbol{k^2 + 4k'k'' < 0},$

и соотвѣтственно

$$\boldsymbol{(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1 < 0.}$$

При этомъ условіи, для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній η факторъ ρ равенства (XI), стр. 389, < 0.

Если дать η одно изъ двухъ, отличающихся другъ отъ друга лишь знакомъ, значеній, при которыхъ $\rho = -1$, т.-е. опредѣлить η изъ равенства

$$\eta^2 = -\frac{4(\lambda_1 - \mu_2)^2}{(\mu_1 - \nu_2)^2\,[(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1]},$$

то будемъ имѣть

(XIVa) $$ii = -e,$$

въ то время, какъ двѣ другихъ формулы умноженія, несомнѣнно, будутъ снова имѣть видъ:

$$ee = e,$$
$$ei = ie = i.$$

Такъ какъ равенства (V), стр. 383 при этомъ выполняются, то всѣ законы умноженія остаются справедливыми. Изъ (IX), стр. 387 слѣдуетъ уже, что въ разсмотрѣнной теперь системѣ можно дѣлить на всякое число, за исключеніемъ нуля. Чтобы убѣдиться въ этомъ также непосредственно, достаточно составить:

$$ab = (\alpha e + \alpha' i)(\beta e + \beta' i) = (\alpha\beta - \alpha'\beta')e + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)i.$$

Если требуется опредѣлить b такъ, чтобы

$$ab = c = \gamma e + \gamma' i,$$

то при помощи простыхъ вычисленій находимъ значенія

$$\text{(XV)} \qquad \beta = \frac{\alpha\gamma + \alpha'\gamma'}{\alpha^2 + \alpha'^2}, \quad \beta' = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha^2 + \alpha'^2},$$

которыя только тогда становятся неопредѣленными, если одновременно

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = 0.$$

Слѣдовательно, такъ какъ въ этой системѣ можно производить дѣленіе на всякое число, кромѣ нуля, то на основаніи предложенія, помѣщеннаго въ концѣ C, стр. 387, слѣдуетъ, что произведеніе лишь тогда можетъ обратиться въ нуль, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей равенъ нулю.

Остается еще изслѣдовать вопросъ о существованіи квадратнаго корня изъ любого числа этой системы. Если должно имѣть мѣсто

$$(\xi e + \xi' i)^2 = \alpha e + \alpha' i,$$

то ξ и ξ' должны удовлетворять равенствамъ:

$$\xi^2 - \xi'^2 = \alpha,$$
$$2\xi\xi' = \alpha',$$

изъ которыхъ получаемъ:

$$(\xi^2 + \xi'^2)^2 = \alpha^2 + \alpha'^2,$$
$$\xi^2 + \xi'^2 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2},$$

при чемъ квадратному корню слѣдуетъ придать положительное значеніе; слѣдовательно,

$$2\xi^2 = \sqrt{a^2 + a'^2} + a,$$
$$2\xi'^2 = \sqrt{a^2 + a'^2} - a.$$

Такъ какъ правыя части этихъ равенствъ не могутъ быть отрицательными ни при какихъ дѣйствительныхъ значеніяхъ a, a', то мы всегда получимъ изъ нихъ дѣйствительныя значенія для ξ, ξ'; это значитъ, что изъ любого числа нашей системы можно извлечь квадратный корень. Такъ, напримѣръ, при $a = -1$, $a' = 0$ получаемъ:

$$\xi = 0, \ \xi' = \pm 1,$$

слѣдовательно,

$$\sqrt{-e} = \pm i \text{ [1]}.$$

Такъ какъ

$$x^2 + e = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i),$$

и произведеніе только тогда можетъ обратиться въ нуль, если по крайней мѣрѣ одинъ изъ сомножителей равенъ нулю, то уравненіе

$$x^2 + e = 0$$

не можетъ имѣть другихъ рѣшеній, кромѣ $+i$ и $-i$.

Въ § 4 мы покажемъ, что въ этой системѣ изъ всякаго числа извлекается корень съ произвольнымъ цѣлымъ показателемъ, а также вообще разрѣшима и задача о нахожденіи логариѳма любого числа при любомъ основаніи.

Въ томѣ II будетъ разсмотрѣна теорема, являющаяся основнымъ предложеніемъ алгебры, о томъ, что каждое алгебраическое уравненіе, коэффиціенты котораго являются числами такой системы, удовлетворяется опять-таки числами этой системы.

Общее заключеніе.

Изслѣдованія, выполненныя здѣсь въ § 2, привели насъ къ тому результату, что существуетъ три типа системъ комплексныхъ чиселъ, для которыхъ остаются въ силѣ всѣ законы умноженія, а также является выполнимымъ и дѣленіе, по крайней мѣрѣ въ

[1] Это равенство здѣсь является не опредѣленіемъ, а, напротивъ, доказанной теоремой.

общемъ случаѣ. Въ каждой системѣ первой группы, охарактеризованной неравенствомъ (XII), стр. 389 существуютъ двѣ единицы e, i_1, для умноженія которыхъ справедливы равенства (XIIa). Въ каждой системѣ второй группы (равенство (XIII), стр. 392) существуетъ двѣ единицы e, i_0, произведеніе которыхъ представлено форм. (XIIIa), стр. 394; наконецъ, въ каждой системѣ третьей группы (неравенства (XIV), стр. 394) имѣются двѣ величины e, i, умноженіе которыхъ опредѣляется равенствами XIVa. Каждая изъ трехъ группъ въ дѣйствительности сводится, слѣдовательно, къ единственной системѣ, а именно, къ совокупности всѣхъ линейныхъ комбинацій соотвѣтствующей пары единицъ съ дѣйствительными коэффиціентами. Только третья система обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что въ ней возможно дѣленіе на всякое, отличное отъ нуля число, а вслѣдствіе этого и произведеніе можетъ обращаться въ нуль лишь тогда, когда по крайней мѣрѣ одинъ изъ сомножителей есть нуль, и, кромѣ того, извлеченіе квадратнаго корня изъ произвольнаго числа этой системы приводитъ снова къ числу той же системы. Слѣдовательно, эта третья система, которую называютъ системой обыкновенныхъ или простыхъ комплексныхъ чиселъ, является во всякомъ случаѣ единственной изъ всѣхъ системъ съ двумя единицами, для которой справедливы въ точности тѣ же законы дѣйствій, какъ и для дѣйствительныхъ чиселъ, но передъ послѣдними она имѣетъ то преимущество, что въ ней становится разрѣшимой упомянутая задача, неразрѣшимая въ дѣйствительныхъ числахъ.

Добавленіе.

Если и не въ силу необходимости разрѣшить неразрѣшенныя до сихъ поръ задачи, то все-таки изъ чисто теоретическаго интереса изучались также системы чиселъ, составленныхъ болѣе, чѣмъ изъ двухъ единицъ. Какъ было уже сказано на стр. 378, въ прим. 2, сложеніе, вычитаніе и умноженіе на дѣйствительное число безъ затрудненія могутъ быть примѣнены къ такимъ системамъ, также какъ и къ системамъ изъ двухъ единицъ. Отсюда непосредственно вытекаетъ требованіе такого опредѣленія умноженія двухъ комплексныхъ чиселъ, чтобы произведеніе принадлежало къ той же области чиселъ, какъ и сомножители, и чтобы всѣ законы умноженія оставались въ силѣ. И эта цѣль достижима всегда и при томъ безконечнымъ числомъ способовъ. Но при этомъ обнаруживается, что независимо отъ выбора коэффиціентовъ умноженія, во всякомъ случаѣ существуетъ безконечно много чиселъ, на которыя нельзя производить дѣленіе, и вслѣдствіе этого имѣются всегда произведенія, принимающія значеніе нуль, хотя бы ни одинъ изъ сомножителей не былъ равенъ нулю, результатомъ чего является алгебра, значительно уклоняющаяся отъ обыкновенной [1]).

Если пренебречь общностью коммутативнаго закона, то существуетъ еще единственная система комплексныхъ величинъ, для которой всѣ остальные законы дѣйствительныхъ и комплексныхъ чиселъ остаются въ силѣ, а слѣдовательно, и произведеніе лишь тогда принимаетъ значеніе нуль, если одинъ изъ сомножителей есть нуль. Это «кватерніоны» [2]), т.-е. числа, составленныя изъ единицъ 1, i, j, k, для которыхъ формулы умноженія имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\begin{array}{lll} ii = -1, & jj = -1, & kk = -1, \\ ij = k, & jk = i, & ki = j, \\ ji = -k, & kj = -i, & ik = -j. \end{array}$$

Такъ какъ эти соотношенія могутъ быть истолкованы, какъ отображенія опредѣленныхъ соотношеній и операцій въ геометріи пространства, то въ новѣйшее время кватерніоны нашли обширное примѣненіе въ геометріи и въ математической физикѣ.

Если допустить еще большія отклоненія отъ законовъ, справедливыхъ для дѣйствительныхъ чиселъ, то мыслимо еще большое число системъ комплексныхъ чиселъ. Системы, составленныя изъ трехъ и четырехъ единицъ, вполнѣ разработаны въ цитированной уже въ § 1 статьѣ E. Study по теоріи комплексныхъ величинъ въ 1 томѣ «Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften», гдѣ можно найти и новѣйшую литературу этой области.

---

[1]) Уже Гауссъ кончаетъ цитированное раньше примѣчаніе въ своей второй работѣ о биквадратичныхъ вычетахъ словами (Gauss' Werke, т. II, стр. 178): «Авторъ намѣревается разработать современемъ болѣе совершенно тотъ предметъ, котораго онъ въ настоящей работѣ коснулся, собственно говоря, лишь попутно, и тогда будетъ разрѣшенъ вопросъ о томъ, почему такого рода соотношенія между вещами, которыя даютъ многообразіе болѣе, чѣмъ двухъ измѣреній, не могутъ дать величинъ другого рода, допустимыхъ въ общей ариѳметикѣ». Но Gauss самъ объ этомъ вопросѣ ничего больше не опубликовалъ. На этотъ вопросъ впервые отвѣтилъ, и именно въ вышеуказанномъ смыслѣ H. Hankel въ своей «Theorie der komplexen Zahlensysteme» (Лейпцигъ 1867), стр. 108, и приблизительно въ началѣ шестидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія Weierstrass въ своихъ университетскихъ лекціяхъ въ Берлинѣ.

[2]) Теорію кватерніоновъ обосновалъ Гамильтонъ, ср. § 1, стр. 374. Въ Германіи съ нею основательно ознакомились, благодаря ясному изложенію въ только что цитированномъ сочиненіи Hankel'я. Изъ замѣтокъ, найденныхъ послѣ смерти Гаусса видно впрочемъ, что этотъ всеобъемлющій умъ, уже въ 1820 году владѣлъ исчисленіемъ кватерніоновъ. То обстоятельство, что кватерніоны образуютъ единственную систему комплексныхъ величинъ болѣе чѣмъ съ двумя единицами, для которой остаются въ силѣ всѣ законы, имѣющіе мѣсто для дѣйствительныхъ чиселъ, за исключеніемъ коммутативнаго закона умноженія, доказалъ уже Frobenius въ Journal für Mathematik, томъ 84, стр. 63.

F. Простыя комплексныя числа. Теорема объ абсолютномъ значенiи.

Въ послѣдующемъ изложенiи мы ограничимся системой обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ, такъ какъ она, съ одной стороны, является единственной, для которой остаются въ силѣ всѣ законы дѣйствiй, относящiеся къ дѣйствительнымъ числамъ, а съ другой стороны, ея вполнѣ достаточно для нуждъ ариѳметики, алгебры и анализа.

Для главной единицы, которую мы обозначали до сихъ поръ буквой e, умноженiе на которую не измѣняетъ значенiя любого числа, мы можемъ теперь, не нарушая общности, ввести символъ 1 и соотвѣтственно этому вмѣсто ae писать кратко a, такъ какъ если c означаетъ произвольное комплексное число, то и

$$(ae)c = a(ec) = ac.$$

Такимъ образомъ, надъ комплексными числами вида $a + a'i$ мы производимъ дѣйствiя совершенно такъ же, какъ и съ дѣйствительными числами и только замѣняемъ вездѣ i^2 значенiемъ -1, а слѣдовательно, i^{2n} — значенiемъ $(-1)^n$ и i^{2n+1} значенiемъ $(-1)^n \cdot i$.

Два комплексныхъ числа $a + a'i$ и $a - a'i$, отличающiяся лишь знакомъ мнимой части, называются (по Cauchy) сопряженными комплексными числами „konjugiert komplex“, а также „konjugiert imaginär“ (мнимыми сопряженными), произведенiе ихъ

$$(a + a'i)(a - a'i) = a^2 + a'^2$$

называютъ „нормой“ (Norm) чиселъ $a + a'i$ и $a - a'i$ (по Гауссу), а положительное значенiе $\sqrt{a^2 + a'^2}$ называютъ „абсолютнымъ значенiемъ“ (absoluter Betrag“ по Вейерштрассу), „модулемъ“ каждаго изъ двухъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ. При $a' = 0$ модуль имѣетъ значенiе, указанное для дѣйствительныхъ (положительныхъ или отрицательныхъ) чиселъ въ гл. IV, § 1. Абсолютное значенiе комплекснаго числа обозначаютъ, согласно Вейерштрассу, помѣщая также и это число между двумя вертикальными штрихами.

Для абсолютныхъ значенiй комплексныхъ чиселъ легко доказать нѣсколько простыхъ теоремъ.

1. Теорема: Модуль суммы двухъ комплексныхъ чиселъ $a=\alpha+\alpha' i$ и $b=\beta+\beta' i$, при $b=ka$, гдѣ k означаетъ какое-либо дѣйствительное положительное число (или нуль), равенъ суммѣ модулей чиселъ a, b, а въ остальныхъ случаяхъ меньше этой суммы:

Доказательство: Полагая:

$$|a|=\rho_1,\quad |b|=\rho_2 \text{ и } |a+b|=\rho,$$

получимъ

$$\sigma=\rho_1+\rho_2=\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2}+\sqrt{\beta^2+\beta'^2},$$

гдѣ для корней, конечно, слѣдуетъ брать положительныя значенія:

$$\sigma^2=\alpha^2+\alpha'^2+\beta^2+\beta'^2+2\sqrt{(\alpha^2+\alpha'^2)(\beta^2+\beta'^2)},$$

но

$$\rho^2=(\alpha+\beta)^2+(\alpha'+\beta')^2=\alpha^2+\alpha'^2+\beta^2+\beta'^2+2\alpha\beta+2\alpha'\beta';$$

поэтому

$$\frac{1}{2}(\sigma^2-\rho^2)=\sqrt{(\alpha^2+\alpha'^2)(\beta^2+\beta'^2)}-(\alpha\beta+\alpha'\beta'),$$

или:

$$\frac{1}{2}(\sigma^2-\rho^2)=\sqrt{(\alpha\beta+\alpha'\beta')^2+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2}-(\alpha\beta+\alpha'\beta').$$

Пусть, во-первыхъ,

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=0.$$

Тогда

$$\beta=k\alpha,\quad \beta'=k\alpha',$$

гдѣ k означаетъ какое-либо дѣйствительное число, и

$$\alpha\beta+\alpha'\beta'=k(\alpha^2+\alpha'^2).$$

Если $k>0$, то и лѣвая часть послѣдняго равенства положительна и поэтому $\frac{1}{2}(\sigma^2-\rho^2)=0$, слѣдовательно,

$$\sigma=\rho.$$

Если же $k<0$, и въ силу этого $(\alpha\beta+\alpha'\beta')$ отрицательно, то будемъ имѣть

$$\frac{1}{2}(\sigma^2-\rho^2)=-k(\alpha^2+\alpha'^2)-k(\alpha^2+\alpha'^2)=-2k(\alpha^2+\alpha'^2)>0;$$

слѣдовательно,

$$\sigma>\rho.$$

Если

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta \gtrless 0,$$

то всегда

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \rho^2) > 0,$$

слѣдовательно,

$$\sigma > \rho.$$

Слѣдствіе. Повторнымъ примѣненіемъ только что доказаннаго предложенія находимъ для любого числа комплексныхъ чиселъ $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|;$$

знакъ равенства можетъ имѣть мѣсто только тогда, если эти n чиселъ получаются умноженіемъ одного изъ нихъ на какія-либо положительныя дѣйствительныя числа.

2. Теорема. Модуль разности двухъ комплексныхъ чиселъ $a = \alpha + \alpha' i$ и $b = \beta + \beta' i$, при $b = ka$, гдѣ k означаетъ какое-либо дѣйствительное положительное число (или нуль), равенъ разности модулей обоихъ чиселъ, а въ остальныхъ случаяхъ больше чѣмъ эта разность.

Доказательство: Положимъ на этотъ разъ

$$\rho = |a - b| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - (\alpha' - \beta')^2}$$

и, допуская, что $\rho_1 > \rho_2$,

$$\delta = \rho_1 - \rho_2 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2} - \sqrt{\beta^2 + \beta'^2},$$

будемъ имѣть

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha'\beta',$$
$$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 - 2\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)};$$

поэтому:

$$\frac{1}{2}(\rho^2 - \delta^2) = \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)} - (\alpha\beta + \alpha'\beta') =$$
$$= \sqrt{(\alpha\beta + \alpha'\beta')^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2} - (\alpha\beta + \alpha'\beta').$$

Какъ и при доказательствѣ предыдущей теоремы слѣдуетъ, что если

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$$

и одновременно съ этимъ

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' \geqq 0,$$

и, слѣдовательно,

$$\beta = k\alpha, \ \beta' = k\alpha',$$

гдѣ k означаетъ какое-либо положительное число (или нуль), то

$$\rho = \delta;$$

если же $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, но $\alpha\beta + \alpha'\beta' < 0$, и, слѣдовательно, $\beta = k\alpha$, $\beta' = k\alpha'$, гдѣ k означаетъ какое-либо отрицательное число, а также если $\alpha\beta' - \alpha'\beta \gtrless 0$, то

$$\rho^2 - \delta^2 > 0,$$

а, слѣдовательно, такъ какъ ρ и δ положительны,

$$\rho > \delta,$$

т.-е.

$$\rho > \rho_1 - \rho_2.$$

Слѣдствіе. Если примѣнить теорему 2 къ числамъ $a = \alpha + \alpha' i$ и $-b = -\beta - \beta' i$, то получимъ:

$$|a + b| \geqq |a| - |b|;$$

слѣдовательно, принимая также во вниманіе теорему 1 имѣемъ:

$$\boldsymbol{|a| - |b| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|}.$$

3. Теорема. Модуль произведенія равенъ произведенію модулей сомножителей.

Доказательство. Если опять

$$a = \alpha + \alpha' i, \ \rho_1 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2},$$
$$b = \beta + \beta' i, \ \rho_2 = \sqrt{\beta^2 + \beta'^2},$$

то

$$ab = \alpha\beta - \alpha'\beta' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)i,$$
$$\rho = |ab| = \sqrt{(\alpha\beta - \alpha'\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2}.$$

Тождество, которымъ мы пользовались при двухъ предыдущихъ доказательствахъ, даетъ непосредственно:

$$\rho = \rho_1\rho_2.$$

Теорема третья справедлива и для произвольнаго числа сомножителей.

4. Теорема. Модуль частнаго равенъ частному модулей дѣлимаго и дѣлителя.

Доказательство.

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha+\alpha' i}{\beta+\beta' i}=\frac{\alpha\beta+\alpha'\beta'}{\beta^2+\beta'^2}+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\beta^2+\beta'^2}\,i \text{ (ср. стр. 394);}$$

$$\rho=\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{\sqrt{(\alpha\beta+\alpha'\beta')^2+(\alpha'\beta-\alpha\beta'^2)}}{\beta^2+\beta'^2}=\frac{\sqrt{(\alpha^2+\alpha'^2)(\beta^2+\beta'^2)}}{\beta^2+\beta'^2}.$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2}}{\sqrt{\beta^2+\beta'^2}}=\left|\frac{a}{b}\right|$$

§ 3. Представленіе обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ на плоскости при помощи векторовъ.

А. Опредѣленіе понятія вектора. Равенство двухъ векторовъ. Опредѣленіе вектора посредствомъ длины и амплитуды.

Въ § 8 гл. VI мы уже познакомились съ отрѣзками, какъ съ отображеніемъ дѣйствительныхъ, раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, и показали, что между соотношеніями отрѣзковъ и чиселъ устанавливается однозначное соотвѣтствіе. Между тѣмъ, какъ раньше насъ интересовала лишь длина отрѣзка, мы будемъ теперь, разсматривая отрѣзки на плоскости, оцѣнивать не только ихъ длину, но и положеніе. Пусть A и B суть двѣ произвольныхъ точки на плоскости; прямую линію, соединяющую эти двѣ точки и направленную отъ A къ B, назовемъ „векторомъ“ AB, понимая подъ этимъ ея длину и положеніе; длину соединяющаго отрѣзка, если не принимать во вниманіе его положенія, будемъ обозначать $|AB|$, а отношеніе этой длины къ длинѣ выбранной за единицу — какой-либо греческой буквой.

Два вектора AB и CD, расположенные въ одной и той же плоскости, мы считаемъ равными, если: во-первыхъ, $|AB|=|CD|$, во-вторыхъ, если AB и CD либо расположены на одной и той же прямой, либо на прямыхъ параллельныхъ, въ третьихъ, если AB и CD расположены на одной прямой, то переходъ отъ A къ B требуетъ движенія въ томъ же направленіи, какъ и переходъ отъ C къ D, а если AB и CD лежатъ на параллельныхъ прямыхъ, то B и D должны быть расположены по одну сторону прямой, соединяющей A съ C. Если два первыхъ условія выполнены, но AB и CD направлены не въ одну и ту же сторону, а въ противоположныя, то AB и CD носятъ названіе „противоположныхъ“ векторовъ. Изъ опредѣленія равенства векторовъ легко получить, пользуясь элементарными предложеніями о конгруэнтности треугольниковъ и параллелограммовъ, слѣдующій выводъ: если

$$AB = CD \text{ и } CD = EF,$$

то и

$$AB = EF.$$

На основаніи этого же опредѣленія далѣе становится возможнымъ, каждый произвольный векторъ въ данной плоскости, замѣнить другимъ, имѣющимъ начало въ произвольной точкѣ этой плоскости; слѣдуетъ только провести изъ этой точки прямую, параллельную данному вектору и одинаково съ нимъ направленную и отложить на ней отрѣзокъ, длина котораго равнялась бы данному вектору. Два вектора, имѣющіе общее начало, могутъ быть равны другъ другу только въ томъ случаѣ, если совпадаютъ и ихъ концы.

Для опредѣленія положенія вектора на плоскости слѣдуетъ ввести еще одно геометрическое понятіе, а именно понятіе „угла“.

Всякую прямую данной плоскости, исходящую изъ точки O и простирающуюся произвольно далеко („полупрямая“ или „лучъ“) можно поворотомъ около точки O привести въ совпаденіе съ любой другой, имѣющей начало въ той же точкѣ O. Этотъ поворотъ можно выполнить двояко: по часовой стрѣлкѣ и противъ. Величину необходимаго поворота (die Grösse der erforderlichen Drehung) и называютъ у г л о м ъ. Его можно измѣрить отношеніемъ длины дуги, проходимой произвольной точкой вращающейся прямой, къ радіусу этого круга, такъ какъ это отношеніе не зависитъ отъ радіуса, какъ это доказывается въ геометріи. Углу будемъ приписывать отрицательный или положительный знакъ въ зависимости отъ того, будетъ ли вращеніе совершаться по часовой стрѣлкѣ или противъ. Полному повороту, т.-е. возвращенію луча въ прежнее положеніе, соотвѣтствуетъ отношеніе длины всей окружности къ радіусу, т.-е. число, обычно обозначаемое черезъ 2π. Уголъ π называется выпрямленнымъ; уголъ $\frac{\pi}{2}$ — прямымъ. Такъ какъ лучъ можно повернуть сколько угодно разъ, то углы могутъ быть произвольно большіе. Два угла, отличающіеся другъ отъ друга на кратное 2π, приводятъ лучъ въ одно и то же положеніе. Отъ одного положенія луча мы всегда можемъ перейти къ другому поворотомъ на уголъ, значеніе котораго заключено между $-\pi$ и $+\pi$ (включая либо нижнюю, либо верхнюю границу). Подъ $\sphericalangle AOB$ мы будемъ разумѣть наименьшій уголъ, поворотомъ на который полупрямая OA, вращаясь въ положительномъ направленіи около точки O, переходитъ въ положеніе OB.

Всегда можно сложить любое число угловъ; легко показать[1]), что для сложенія угловъ справедливы коммутативный и ассоціативный законы. Такъ какъ существуютъ положительные и отрицательные углы произвольной величины, то и вычитаніе двухъ угловъ всегда выполнимо. Если за начальное направленіе на плоскости принять направленіе произвольно заданной полупрямой, то какой-либо векторъ плоскости будетъ вполнѣ опредѣленъ, если извѣстна во-первыхъ его длина, а во-вторыхъ его уголъ съ начальнымъ направленіемъ. Этотъ уголъ, называемый амплитудой вектора, опредѣленъ не вполнѣ: значенія его могутъ разниться на кратное 2π. Значеніе амплитуды, заключенное между $-\pi$ и $+\pi$ (включая верхнюю границу) назовемъ ея главнымъ значеніемъ.

B. Сложеніе векторовъ.

Чтобы составить сумму двухъ векторовъ AB и $A'B'$, замѣняемъ векторъ $A'B'$ векторомъ BC, имѣющимъ начало въ точкѣ B, и затѣмъ устанавливаемъ опредѣленіе:

$$AB + A'B' = AB + BC = AC$$

т.-е. подъ суммой обоихъ векторовъ AB и BC мы понимаемъ третью сторону треугольника, который опредѣляется векторами AB и BC[2]); этотъ треугольникъ ABC превращается въ отрѣзокъ AC, если AB и BC лежатъ на одной и той же прямой.

Чтобы провѣрить, заслуживаетъ ли только что опредѣленная операція названія „сложенія", изслѣдуемъ, остаются ли и для нея

---

[1]) Ср. H. Thieme, Die Elemente der Geometrie, A. § 7.

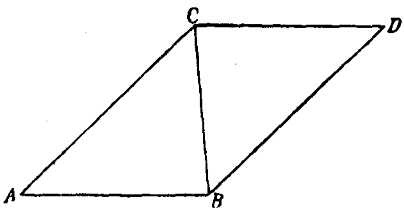
[2]) Векторъ AC, опредѣленный здѣсь, какъ сумма AB и BC представляетъ изъ себя въ графостатикѣ силу (равнодѣйствующую), дѣйствіе которой по теоремѣ о параллелограммѣ силъ одинаково съ дѣйствіемъ силъ (составляющія), изображенныхъ векторами AB и BC.

въ силѣ тѣ же законы сложенія, что и для всѣхъ разсмотрѣнныхъ нами родовъ чиселъ.

1. Если
$$AB = A'B' \text{ и } BC = B'C',$$
то и
$$AB + BC = A'B' + B'C',$$
такъ какъ изъ конгруентности треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ слѣдуетъ, что
$$AC = A'C'.$$

2. $$(AB + BC) + CD = AB + (BC + CD);$$
такъ какъ значеніе лѣвой части есть
$$AC + CD = AD,$$
а значеніе правой
$$AB + BD = AD.$$

3. $$AB + BC = BC + AB.$$
Въ самомъ дѣлѣ,
$$AB + BC = AC.$$
Чтобы получить $BC + AB$, проведемъ прямую CD, равную и параллельную AB. Тогда имѣемъ
$$BC + AB = BC + CD = BD.$$



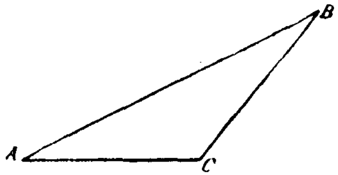
(Фиг. 1).

Изъ конгруентности треугольниковъ ABC и BCD получаемъ:
$$AC = BD.$$

Если въ рядѣ произвольнаго числа векторовъ
$$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$$
начало каждаго слѣдующаго совпадаетъ съ концомъ предыдущаго и конецъ послѣдняго съ началомъ перваго, то
$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = A_1A_1 = 0,$$
и въ частности сумма двухъ противоположныхъ векторовъ
$$AB + BA = AA = 0.$$

C. Вычитаніе векторовъ.

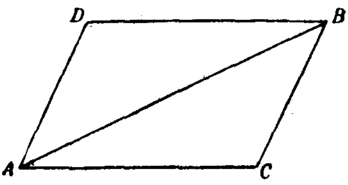
Найти разность $AB - AC$ двухъ векторовъ, имѣющихъ общее начало A (что мы можемъ предположить, не нарушая общности) значитъ опредѣлить векторъ x такъ, чтобы $AC + x = AB$. На основаніи даннаго передъ этимъ опредѣленія суммы это равенство удовлетворяется векторомъ $x = CB$ и никакимъ другимъ, исходящимъ изъ точки C; т.-е. разность двухъ выдящихъ изъ одной и той же точки векторовъ есть векторъ, направленный отъ конца вычитаемаго къ концу уменьшаемаго. Вычитаніе всегда выполнимо. Если уменьшаемое и вычитаемое другъ другу равны, то разность есть нуль. Для уменьшаемаго $AA = 0$ имѣемъ



(Фиг. 2).

$$AA - AC = 0 - AC = CA;$$

слѣдовательно, векторъ CA, противоположный вектору AC, мы можемъ записать также въ видѣ $0 - AC$ или короче $-AC$. Если провести отрѣзокъ BD параллельный и равный CA, то



(Фиг. 3).

$$AB + CA = AB + BD = AD = CB,$$

слѣдовательно,

$$AB - AC = AB + CA.$$

т.-е. вмѣсто того чтобы вычитать какой-либо векторъ, можно приложить ему противоположный.

D. Умноженіе вектора на дѣйствительное число.

Если a означаетъ какое-либо дѣйствительное число и AB какой-либо векторъ, то подъ $a \cdot AB$ мы разумѣемъ векторъ, либо лежащій на той же самой прямой, какъ и AB, либо расположенный на параллели, и имѣющій то же направленіе, какъ и AB, если a положительно, и противоположное, если a отрицательно, и длину равную отрѣзку $|a| \cdot |AB|$; этотъ отрѣзокъ на основаніи гл. VI, § 8 и въ силу Канторъ-Дедекиндовой аксіомы непрерывности для прямыхъ линій всегда существуетъ и въ томъ случаѣ, если α ирраціонально. Съ другой стороны, если CD означаетъ какой-либо векторъ, лежащій на той же прямой, какъ и AB, или на параллельной ей, то всегда существуетъ такое дѣйствительное, положительное или отрицательное, раціональное или ирраціональное число α, что $CD = \alpha \cdot AB$. α есть то число, которое мы въ § 8, гл. VI, опредѣлили, какъ значеніе отношенія

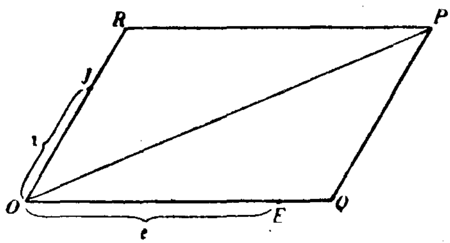
$$|CD| : |AB|;$$

при этомъ найденному отношенію приписывается положительный или отрицательный знакъ, смотря потому, имѣютъ ли AB и CD одинаковыя или противоположныя направленія. Если α и β суть числа, отличныя отъ нуля, и AB и CD не лежатъ ни на той же самой, ни на параллельныхъ прямыхъ, то равенство вида $\alpha \cdot AB = \beta \cdot CD$ не можетъ имѣть мѣста.

E. Представленіе всѣхъ векторовъ плоскости при помощи какихъ-либо двухъ.

Пусть $OE = \mathfrak{e}$, $OJ = \mathfrak{i}$ будутъ два произвольныхъ вектора на плоскости, которые мы опять, не нарушая общности, можемъ считать исходящими изъ одной точки. Пусть OP представляетъ изъ себя какой-либо третій векторъ плоскости, перенесенный въ въ то же самое начало.

Пусть прямая, проведенная изъ P параллельно прямой OJ, пересѣкаетъ OE въ точкѣ Q, а прямая, параллельная OE, пересѣкаетъ прямую OJ въ R. По опредѣленію суммы имѣемъ



(Фиг. 4).

$$OP = OQ + QP = OQ + OR.$$

На основаніи же изложеннаго въ D всегда можно опредѣлить два дѣйствительныхъ числа α, β такъ, что $OQ = \alpha\mathfrak{e}$ и $OR = \beta\mathfrak{i}$, а, слѣдовательно,

$$OP = \alpha\mathfrak{e} + \beta\mathfrak{i}.$$

Если, обратно, сперва будутъ даны произвольныя дѣйствительныя числа α, β, то можно, выбравъ векторы $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$ опредѣлить векторъ OP такъ, что послѣднее равенство будетъ удовлетворено.

Этимъ самымъ мы уже показали, что всѣ векторы плоскости, исходящіе изъ одной и той же точки, образуютъ множество въ томъ смыслѣ. какъ оно охарактеризовано въ § 2 A. Теперь остается только изслѣдовать, будутъ ли дѣйствія надъ векторами тѣми же самыми, что и для комплексныхъ чиселъ, полученныхъ изъ такихъ же множествъ, опредѣленныхъ въ § 2, и въ частности для простыхъ комплексныхъ чиселъ.

1. Векторы

$$OP = \alpha\mathfrak{e} + \beta\mathfrak{i} \text{ и } OP' = \alpha'\mathfrak{e} + \beta'\mathfrak{i}$$

могутъ быть равны другъ другу только тогда, когда P и P' совпадаютъ (см. A. стр. 403), слѣдовательно, если $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$. Но это то же условіе, что и данное въ § 2 A для равенства двухъ комплексныхъ чиселъ.

2. Если OS представляетъ сумму $OP + OP'$ т.-е. если PS равенъ и параллеленъ OP' и если параллели къ линіи OI, проведенныя изъ точекъ P, P', S, пересѣкаютъ прямую OE соотвѣтственно въ точкахъ Q, Q', T, а параллель къ прямой OE, проведенная изъ точки P, пересѣкаетъ линію, соединяющую точки S и T, въ точкѣ R, то изъ конгруэнтности треугольниковъ $OP'Q'$ и PSR, слѣдуетъ, что

$$PR = OQ',$$

слѣдовательно,

$$QT = PR = \alpha'\mathfrak{e}$$

и

$$OT = OQ + QT = \alpha\mathfrak{e} + \alpha'\mathfrak{e} = (\alpha + \alpha')\mathfrak{e} \text{ (ср. гл. VI, § 8).}$$

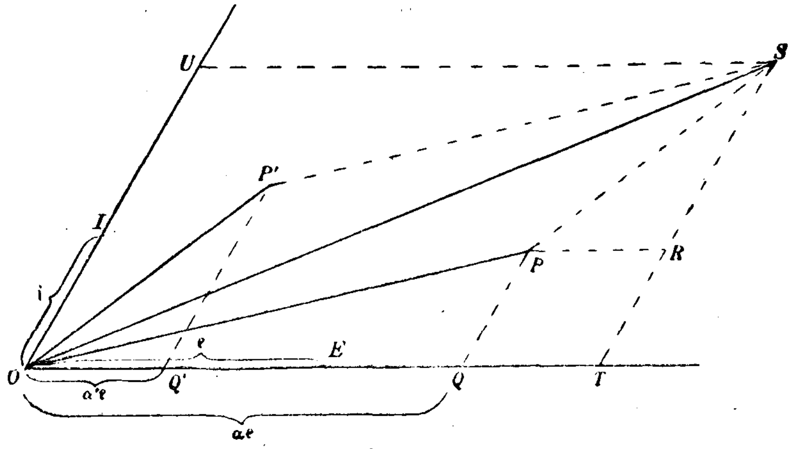
Если линія, проведенная изъ S параллельно OE, пересѣкаетъ прямую OI въ точкѣ U, то такимъ же образомъ получается:

$$OU = (\beta + \beta')\mathfrak{i},$$

слѣдовательно:

$$OS = OT + TS = OT + OU = (\alpha + \alpha')\mathfrak{e} + (\beta + \beta')\mathfrak{i}.$$

Сумма двухъ векторовъ, данныхъ въ видѣ $\alpha\mathfrak{e} + \beta\mathfrak{i}$ и $\alpha'\mathfrak{e} + \beta'\mathfrak{i}$, составляется, слѣдовательно, совершенно такимъ же образомъ, какъ и сумма двухъ комплексныхъ чиселъ (§ 2 A). Отсюда уже слѣдуетъ, что и для разности имѣетъ мѣсто такое же совпаденіе.



(Фиг. 5).

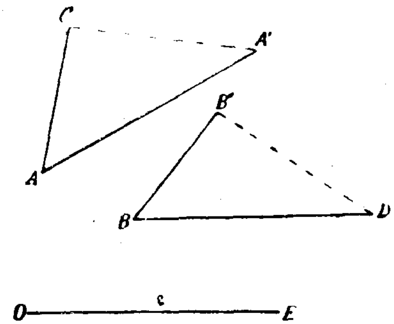
Слѣдовательно, всѣ векторы данной плоскости, исходящіе изъ одной и той же точки, дѣйствительно, образуютъ систему комплексныхъ, составленныхъ при помощи дѣйствительныхъ чиселъ изъ единицъ $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$, величинъ, для которой равенство и сложеніе опредѣляются такъ же, какъ и для комплексныхъ чиселъ, составленныхъ изъ двухъ единицъ. Во всякомъ случаѣ существуетъ весьма большое число множествъ, совпадающихъ въ этомъ отношеніи съ системой комплексныхъ чиселъ. Теперь поставимъ себѣ вопросъ, возможно ли для векторовъ опредѣлить такія дѣйствія, которыя можно было бы назвать умноженіемъ и дѣленіемъ, въ силу того, что они удовлетворяютъ тѣмъ же законамъ, какъ умноженіе и дѣленіе дѣйствительныхъ чиселъ, и результаты которыхъ находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи съ произведеніемъ и частнымъ комплексныхъ чиселъ, соотвѣтствующихъ даннымъ векторамъ.

F. Умноженіе векторовъ.

1. Произведеніе, въ которомъ одинъ изъ сомножителей является векторомъ, начало и конецъ котораго совпадаютъ, всегда должно имѣть значеніе нуль.

2. Выбравъ какой-либо векторъ $OE = \mathfrak{e}$, къ направленію и длинѣ котораго мы будемъ относить направленія и длины всѣхъ векторовъ плоскости, опредѣлимъ произведеніе двухъ произвольныхъ векторовъ $AA' = \mathfrak{a}$ и $BB' = \mathfrak{b}$, образующихъ съ $\mathfrak{e}$ углы φ_1 и φ_2, слѣдующимъ образомъ: проводимъ черезъ B, прямую

BD равную и параллельную OE, соединяемъ D съ B' и строимъ при AA' въ точкѣ A уголъ равный $DBB' = \varphi_2$ и при AA' въ точкѣ A' уголъ равный BDB'. Если стороны построенныхъ угловъ пересѣкутся въ C, то $AC = \mathfrak{c}$ назовемъ произведеніемъ обоихъ векторовъ AA' и BB'. Непосредственно видно, что амплитуда вектора AC φ_3 относительно OE равна $\varphi_1 + \varphi_2$. Такъ какъ треугольники $AA'C$ и BDB' подобны вслѣдствіе равенства соотвѣтственныхъ угловъ, то имѣетъ мѣсто и слѣдующая пропорція:



(Фиг. 6).

$$|AC| : |AA'| = |BB'| : |BD|$$

или

$$|\mathfrak{c}| : |\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| : |\mathfrak{e}|.$$

Если обозначить отношеніе длинъ отрѣзковъ $|\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{c}|$ къ отрѣзку $|\mathfrak{e}|$, соотвѣтственно черезъ α, β, γ, то изъ послѣдней пропорціи слѣдуетъ, на основаніи § 8, гл. VI, стр. 363:

$$\gamma : \alpha = \beta : 1,$$

и, слѣдовательно,

$$\gamma = \alpha\beta.$$

Послѣ выбора вектора $\mathfrak{e}$, къ которому относимъ всѣ векторы плоскости, векторъ $\mathfrak{c}$ будетъ вполнѣ опредѣленъ величинами $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ и $\gamma = \alpha\beta$ [1]).

Если одинъ изъ двухъ данныхъ векторовъ, напр. BB' будетъ вида $\beta\mathfrak{e}$, т.-е. BB' имѣетъ тоже направленіе какъ и $\mathfrak{e}$, слѣдовательно, φ_2 имѣетъ значеніе нуль, то $\varphi_3 = \varphi_1$, т.-е. $\mathfrak{c}$ имѣетъ тоже направленіе, что и $\mathfrak{a}$. Если, кромѣ того, $\beta = 1$, слѣдовательно, $BB' = \mathfrak{e}$, то получается, что и $\gamma = \alpha$. Откуда $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$. Итакъ умноженіе на $\mathfrak{e}$ оставляетъ безъ измѣненія любой векторъ плоскости.

Установленное здѣсь опредѣленіе произведенія двухъ векторовъ является во всякомъ случаѣ не единственно возможнымъ (ср.

[1]) Если положить въ основаніе вмѣсто вектора $\mathfrak{e}$ векторъ $\mathfrak{e}'$, длина котораго равна $n\,|\mathfrak{e}|$, и который съ $\mathfrak{e}$ составляетъ уголъ $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}') = \delta$, то мы получимъ, какъ значеніе произведенія $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, векторъ $\mathfrak{c}'$ длиной въ $\frac{1}{n}\,|\mathfrak{c}|$, который образуетъ съ $|\mathfrak{c}|$ уголъ $(\mathfrak{c}', \mathfrak{c}) = \delta$.

прим. 1, стр. 379), но оно удовлетворяетъ, какъ мы сейчасъ это покажемъ, всѣмъ законамъ умноженія.

1. Если

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}' \text{ и } \mathfrak{b}=\mathfrak{b}';$$

то и

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}'\mathfrak{b}',$$

такъ какъ треугольники, необходимые для построенія произведенія $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ соотвѣтственно конгруэнтны съ тѣми, которыми мы пользовались раньше, и соотвѣтственныя стороны этихъ треугольниковъ параллельны. Слѣдовательно, мы можемъ при построеніи произведенія двухъ векторовъ ихъ начало располагать въ произвольно выбранной точкѣ.

2. Справедливость коммутативнаго закона

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}$$

вытекаетъ непосредственно изъ наличности этого закона при сложеніи угловъ ($\varphi_1+\varphi_2=\varphi_2+\varphi_1$) и при умноженіи дѣйствительныхъ чиселъ ($\alpha\beta=\beta\alpha$).

То же самое имѣетъ мѣсто и для ассоціативнаго закона.

Теперь остается только привести доказательство[1]) дистрибутивнаго закона.

Пусть $OA=\mathfrak{a}$, $OB=\mathfrak{b}$, $OC=\mathfrak{c}$ три произвольныхъ вектора, $OS=\mathfrak{s}=OA+OB$ ($OASB$, слѣдовательно, представляетъ параллелограммъ). Пользуясь векторомъ $OE=\mathfrak{e}$, построимъ указаннымъ выше способомъ векторы $OA'=\mathfrak{a}'$, $OB'=\mathfrak{b}'$, $OS'=\mathfrak{s}'$ такъ, чтобы

$$\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}'=\mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{s}'=\mathfrak{s}\mathfrak{c}.$$

Теперь остается показать, что

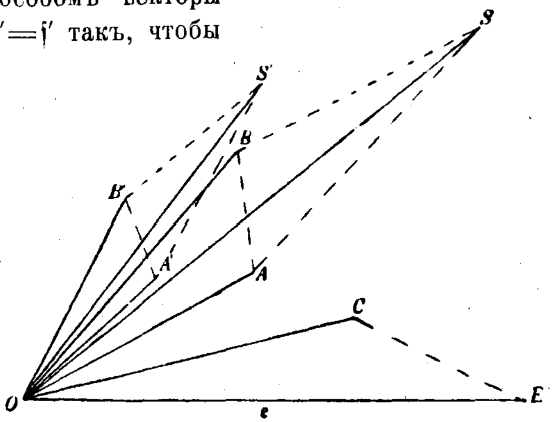
$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

или

$$\mathfrak{s}\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

или

$$\mathfrak{s}'=\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}',$$



(Фиг. 7).

другими словами, показать, что и $OA'S'B'$ есть параллелограммъ.

1) По H. Hankel'ю, Theorie der komplexen Zahlensysteme § 21 и O. Stolz und I. A. Gmeiner, Theoretische Arithmetik, XI Abschnitt, 6.

Согласно построенію, получаемъ слѣдующія пропорціи

$$\frac{|OA'|}{|OA|}=\frac{|OC|}{|OE|}$$

и

$$\frac{|OB'|}{|OB|}=\frac{|OC|}{|OE|},$$

а, слѣдовательно, также

$$\frac{|OA'|}{|OA|}=\frac{|OB'|}{|OB|}.$$

Такъ какъ, кромѣ того изъ равенства угловъ AOA' и BOB (каждый изъ нихъ равенъ $\sphericalangle EOC$) слѣдуетъ, что

$$\sphericalangle AOB=\sphericalangle A'OB',$$

то мы можемъ заключить, что

$$\triangle AOB \sim \triangle A'OB'.$$

Такимъ же образомъ получается:

$$\triangle AOS \sim \triangle A'OS'$$

и

$$\triangle OBS \sim \triangle OB'S'.$$

Разсматривая равенство угловъ, вытекающее изъ подобія этихъ паръ треугольниковъ, мы убѣждаемся что и

$$\triangle ABS \sim \triangle A'B'S'.$$

Изъ того обстоятельства, что согласно построенію $AOBS$ есть параллелограммъ, слѣдуетъ далѣе:

$$\sphericalangle OB'A'=\sphericalangle S'A'B' \text{ и } \sphericalangle OA'B'=\sphericalangle S'B'A';$$

слѣдовательно, OB' параллельно $A'S'$ и OA параллельно $B'S'$, а поэтому и $OA'S'B'$ также параллелограммъ, откуда и вытекаетъ справедливость дистрибутивнаго закона для умноженія векторовъ.

G. Дѣленіе одного вектора на другой.

Если требуется опредѣлить векторъ $\mathfrak{b}$ при помощи векторовъ $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$, образующихъ съ $\mathfrak{e}$ соотвѣтственно углы φ_3 и φ_1 и имѣющихъ по длинѣ отношенія къ $|\mathfrak{e}|$ соотвѣтственно равныя γ и α такъ, чтобы

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{c},$$

то амплитуда вектора $\mathfrak{b}$, φ_2, должна удовлетворять равенству

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3$$

а значеніе отношенія $\beta = |\mathfrak{b}| : |\mathfrak{e}|$, удовлетворять равенству

$$\alpha\beta = \gamma.$$

Эти соотношенія показываютъ, что если α не равно нулю, то задачу всегда возможно рѣшить и при этомъ единственнымъ образомъ. Построеніе вектора $\mathfrak{b}$ выполняется такъ: проводимъ (см. фиг. 6, стр. 410) черезъ произвольную точку B, векторъ $BD = \mathfrak{e}$, и на немъ строимъ треугольникъ BDB' подобный треугольнику $AA'C$. $BB' = \mathfrak{b}$ и есть векторъ, удовлетворяющій равенству $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

H. Соотвѣтствіе между умноженіемъ (дѣленіемъ) векторовъ и умноженіемъ (дѣленіемъ) обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ.

Если $\mathfrak{e}$ снова обозначаетъ векторъ, умноженіе на который оставляетъ безъ измѣненія всякій другой векторъ, а $\mathfrak{i}$ — нѣкоторый векторъ, пока произвольный, и кромѣ того (ср. E, стр. 407).

$$\mathfrak{a} = \alpha_1\mathfrak{e} + \alpha_2\mathfrak{i},\ \ \mathfrak{b} = \beta_1\mathfrak{e} + \beta_2\mathfrak{i},\ \ \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \gamma_1\mathfrak{e} + \gamma_2\mathfrak{i},$$

то возникаетъ вопросъ, будетъ ли зависимость между γ_1, γ_2 и α_1, α_2, β_1, β_2, такою же, какъ и между коэффиціентами произведенія двухъ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ, и коэффиціентами сомножителей (ср. § 2 E, стр. 394). Это изслѣдованіе начнемъ прежде всего относительно произведеній $\mathfrak{e}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}\mathfrak{i}$. Непосредственно на основаніи F' имѣемъ

$$\mathfrak{e}\mathfrak{e} = \mathfrak{e},\ \ \mathfrak{e}\mathfrak{i} = \mathfrak{i}\mathfrak{e} = \mathfrak{i}.$$

Если амплитуду $\mathfrak{i}$ относительно $\mathfrak{e}$ обозначимъ черезъ ω, а отношеніе $|\mathfrak{i}| : |\mathfrak{e}|$ черезъ ι, то, согласно F', $\mathfrak{i}\mathfrak{i}$ есть векторъ, амплитуда котораго равна 2ω, а отношеніе его длины къ $|\mathfrak{e}|$ есть ι^2. Если теперь произведеніе векторовъ $\mathfrak{i}\mathfrak{i}$ должно быть составлено изъ векторовъ $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$ такъ же, какъ произведеніе ii составляется изъ комплексныхъ единицъ e, i, (ср. § 2 (XIV a), стр. 394), то должно имѣть мѣсто

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = -\mathfrak{e},$$

а послѣднее возможно тогда и только тогда, если

1. $$2\omega = \pi \text{ или } = \pi + 2k\pi,$$

гдѣ k означаетъ како е-либо цѣлое число, и

2. $\mathfrak{i}^2 = 1$, слѣдовательно $\mathfrak{i} = 1$.

Поэтому теперь за второй изъ двухъ векторовъ, при помощи которыхъ мы выражаемъ всѣ векторы плоскости, выберемъ векторъ, имѣющій длину равную $\mathfrak{e}$ и образующій съ $\mathfrak{e}$ уголъ $\frac{1}{2}\pi$ [1]).

Чтобы произведеніе

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha_1\mathfrak{e} + \alpha_2\mathfrak{i})(\beta_1\mathfrak{e} + \beta_2\mathfrak{i})$$

привести къ виду $\gamma_1\mathfrak{e} + \gamma_2\mathfrak{i}$, мы можемъ, въ виду того, что въ F' доказана справедливость дистрибутивнаго закона для умноженія двухъ векторовъ, каждый членъ первой суммы умножить на каждый членъ второй. Тогда мы получимъ:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} &= (\alpha_1\beta_1)\mathfrak{e}\mathfrak{e} + (\alpha_1\beta_2)\mathfrak{e}\mathfrak{i} + (\alpha_2\beta_1)\mathfrak{i}\mathfrak{e} + (\alpha_2\beta_2)\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \\ &= (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)\mathfrak{e} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mathfrak{i}. \end{aligned}$$

С л ѣ д о в а т е л ь н о, к о э ф ф и ц і е н т ы п р о и з в е д е н і я д в у х ъ в е к т о р о в ъ д о л ж н ы о б р а з о в ы в а т ь с я и з ъ о б о и х ъ в е к т о р о в ъ, д а н н ы х ъ, к а к ъ л и н е й н ы я к о м б и н а ц і и $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$, с о в е р ш е н н о т а к ъ ж е, к а к ъ и к о э ф ф и ц і е н т ы п р о и з в е д е н і я д в у х ъ о б ы к н о в е н н ы х ъ к о м п л е к с н ы х ъ ч и с е л ъ и з ъ с о м н о ж и т е л е й, н а п и с а н н ы х ъ в ъ ф о р м ѣ л и н е й н ы х ъ с о е д и н е н і й e, i.

Если при данныхъ значеніяхъ α_1, α_2, γ_1, γ_2, требуется опредѣлить числа β_1, β_2, такъ чтобы

$$\beta_1\mathfrak{e} + \beta_2\mathfrak{i} = \frac{\gamma_1\mathfrak{e} + \gamma_2\mathfrak{i}}{\alpha_1\mathfrak{e} + \alpha_2\mathfrak{i}},$$

то β_1, β_2 должны удовлетворять тѣмъ же двумъ равенствамъ первой степени, что и коэффиціенты частнаго $\frac{\gamma_1 e + \gamma_2 i}{\alpha_1 e + \alpha_2 i}$; слѣдовательно, они должны имѣть тѣ же значенія: $\frac{\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2}{\alpha_1^2 + \alpha_1^2}$ и $\frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$.

---

[1]) Мы могли бы съ тѣмъ же успѣхомъ выбрать также и векторъ, который съ $\mathfrak{e}$ образуетъ уголъ $\frac{3}{2}\pi$. Слѣдовательно, установленіе, что направленія $\mathfrak{e}$ и $\mathfrak{i}$ другъ къ другу перпендикулярны, не есть произвольное соглашеніе; напротивъ, оно необходимо вытекаетъ, съ одной стороны, изъ опредѣленія произведенія векторовъ, даннаго въ F, съ другой же стороны, изъ того требованія, что правила умноженія надъ единицами векторовъ $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$ должны совпадать съ такими же правилами для единицъ e, i обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ.

J. Взаимнооднозначное соотвѣтствіе векторовъ плоскости (а также точекъ на плоскости) и обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ.

Изложенное въ отдѣлахъ E и H приводитъ насъ къ заключенію: система векторовъ на плоскости, представленныхъ въ видѣ $\xi\mathfrak{e}+\eta\mathfrak{i}$ находится въ однозначномъ соотвѣтствіи съ обыкновенными комплексными числами $\xi e+\eta i$ въ томъ смыслѣ, что, если выполнить одно изъ четырехъ основныхъ дѣйствій съ одной стороны надъ векторами, и съ другой стороны надъ соотвѣтствующими имъ комплексными числами, то снова придемъ къ соотвѣтственнымъ индивидуумамъ обѣихъ системъ. Это и служитъ доказательствомъ, о которомъ уже упоминалось въ § 1 этой главы, транзіентной реальности комплексныхъ чиселъ. Если принять во вниманіе только векторы, исходящіе изъ одной точки O, что не является ограниченіемъ общности, то каждый векторъ такого рода однозначно опредѣляется своимъ концомъ. Этимъ и устанавливается однозначное соотвѣтствіе точекъ плоскости и обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ. Комплексному числу $\xi e+\eta i$, или $\xi+\eta i$, соотвѣтствуетъ конецъ вектора $\xi\mathfrak{e}+\eta\mathfrak{i}$ т.-е. та точка P плоскости, которая въ системѣ координатъ съ осью ξ, имѣющей направленіе $\mathfrak{e}$, и осью η, имѣющей направленіе $\mathfrak{i}$, при выборѣ $|\mathfrak{e}|$ за единицу длины, имѣетъ координаты ξ и η, и обратно, этой точкѣ соотвѣтствуетъ комплексное число $\xi+\eta i$. По теоремѣ Пиѳагора имѣемъ

$$|OP|^2=|\xi\mathfrak{e}|^2+|\eta i|^2,$$

или, полагая отношеніе $|OP|:|\mathfrak{e}|=\rho$,

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2?.$$

Слѣдовательно, отношеніе длины вектора къ $|\mathfrak{e}|$ равно модулю комплекснаго числа, соотвѣтствующаго этому вектору, а отсюда видно, что теорема о модулѣ суммы и разности двухъ комплексныхъ чиселъ, доказанная въ § 2 F при помощи вычисленій, эквивалентна планиметрической теоремѣ: сторона треугольника меньше суммы и больше разности двухъ другихъ.

Такъ какъ каждый векторъ съ одной стороны опредѣленъ числами ρ, φ, такъ называемыми „полярными координатами" точки P, а съ другой стороны соотвѣтствуетъ единственному комплексному числу $\xi+\eta i$, то существуетъ также и взаимное соотвѣтствіе между всѣми системами значеній (ρ, φ) и всѣми системами значеній (ξ, η). ξ и η однозначно опредѣляются черезъ ρ и φ; данной системѣ значеній (ξ, η) соотвѣтствуетъ единственное значеніе ρ и безчисленное множество значеній φ, которыя отличаются отъ главнаго значенія Φ, однозначно опредѣляемаго условіемъ $-\pi < \Phi \leq +\pi$, на числа кратныя 2π.

Если $\xi_1 + \eta_1 i$, $\xi_2 + \eta_2 i$ комплексныя числа, соотвѣтствующія векторамъ OP_1 (ρ_1, φ_1) и $OP_2(\rho_2, \varphi_2)$, то произведенію

$$(\xi_1 + \eta_1 i)(\xi_2 + \eta_2 i) = (\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)i,$$

какъ это показано въ H, соотвѣтствуетъ векторъ $OP_1 \cdot OP_2$, полярныя координаты котораго согласно F, суть: $\rho_1 \cdot \rho_2$, $\varphi_1 + \varphi_2$, т.-е. системы значеній

$$(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2,\ \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \text{ и } (\rho_1\rho_2,\ \varphi_1 + \varphi_2)$$

соотвѣтствуютъ другъ другу.

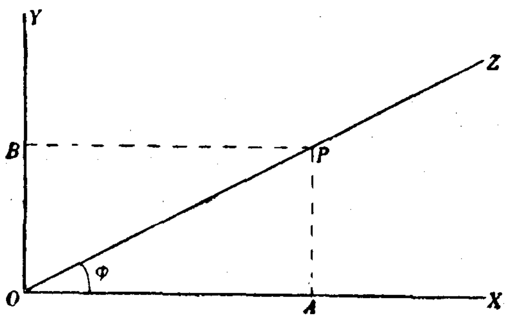
Далѣе слѣдуетъ также, что комплексному числу

$$(\xi_1 + \eta_1 i)(\xi_2 + \eta_2 i)\cdots(\xi_n + \eta_n i)$$

соотвѣтствуетъ векторъ съ полярными координатами $\rho_1\rho_2\cdots\rho_n$, $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_n$, а въ частности степени $(\xi + \eta i)^n$ соотвѣтствуетъ система значеній ρ^n, $n\varphi$. На основаніи этого мы могли бы $(\xi + \eta i)^n$ представить сейчасъ же въ видѣ $\Xi + Hi$, если были бы въ состояніи указать для каждой системы значеній въ полярныхъ координатахъ соотвѣтствующую систему въ прямоугольныхъ. Это требованіе заставляетъ насъ подробнѣе изучить соотношенія между системами значеній (ρ, φ) и (ξ, η).

K. Выраженіе взаимной зависимости между (ρ, φ) и $(\xi. \eta)$ при помощи тригонометрическихъ функцій.

Пусть φ есть какой-либо уголъ, образованный начальной стороной OX и конечной OZ, т.-е. φ измѣряетъ величину поворота, который слѣдуетъ выполнить въ положительномъ направленіи, чтобы OX перевести въ положеніе OZ. Если на OZ возьмемъ произвольную точку P и опустимъ изъ нея на OX перпендикуляръ PA, то, какъ это указано въ ученіи о по-



(Фиг. 8).

добіи, отношеніе длины OA къ длинѣ OP не зависитъ отъ положенія точки P на OZ; но оно измѣняется, вообще говоря, вмѣстѣ съ угломъ φ и поэтому называется функціей даннаго угла и въ отличіе отъ другихъ функцій cosinus'омъ (косинусомъ); это записываютъ въ такомъ видѣ:

$$OA : OP = \cos\varphi.$$

Такъ какъ P расположено на самой полупрямой (лучѣ) OZ, то OP всегда имѣетъ положительный знакъ въ то время, какъ OA есть положительная или отрицательная величина, смотря по тому, совпадаетъ ли OA съ направленіемъ начальной стороны или ему противоположнымъ.

Если OY образуетъ съ OX уголъ $\frac{\pi}{2}$, и если B есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ P на OY, то и отношеніе $OB:OP$ представляетъ изъ себя функцію угла φ, не зависящую отъ выбора точки P на OZ, называется синусомъ этого угла и обозначается:

$$OB:OP = \sin\varphi.$$

OB будетъ положительно или отрицательно, смотря потому, совпадаетъ ли OB съ направленіемъ OY или съ ему противоположнымъ.

Непосредственно изъ опредѣленія cosinus'sa и sinu'a вытекаютъ слѣдующія свойства этихъ функцій:

1. Съ возрастаніемъ φ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$

   $\cos\varphi$ уменьшается отъ 1 до 0, $\sin\varphi$ увеличивается отъ 0 до 1;

   съ возрастаніемъ φ отъ $\frac{\pi}{2}$ до π

   $\cos\varphi$ уменьшается отъ 0 до -1, sinus — отъ 1 до 0;

   съ возрастаніемъ φ отъ π до $\frac{3}{2}\pi$,

   $\cos\varphi$ увеличивается отъ -1 до 0, $\sin\varphi$ уменьшается отъ 0 до -1;

   съ возрастаніемъ φ отъ $\frac{3}{2}\pi$ до 2π,

   $\cos\varphi$ увеличивается отъ 0 до 1, $\sin\varphi$ — отъ -1 до 0.

2. $$\cos(-\varphi) = \cos\varphi,\ \sin(-\varphi) = -\sin\varphi.$$

3. $$\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi;\ \sin(\varphi + 2k\pi) = \sin\varphi,$$

гдѣ k означаетъ произвольное положительное или отрицательное цѣлое число.

Если далѣе отношеніе $OB:OA$ назвать тангенсомъ угла φ (и обозначить: $\operatorname{tang}\varphi = OB:OA$) а отношеніе $OA:OB$ — котангенсомъ угла φ (и обозначить: $\operatorname{cotg}\varphi = OA:OB$), то легко видѣть, что

4. $$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

и для любого цѣлаго числа k

5. $$\operatorname{tang}(\varphi + k\pi) = \operatorname{tang}\varphi,\quad \operatorname{cotg}(\varphi + k\pi) = \operatorname{cotg}\varphi.$$

Четыре функціи cosinus, sinus, tangens, cotangens, имѣютъ общее названіе „гоніометрическихъ“, или тригонометрическихъ функцій.

Если на фиг. 8 OP принять теперь за векторъ, то при помощи только что введенныхъ функцій сейчасъ же получимъ соотношенія между прямоугольными и полярными координатами конца этого вектора:

6. $$\cos\varphi = \frac{\xi}{\rho},\quad \sin\varphi = \frac{\eta}{\rho},\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\eta}{\xi},\quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\xi}{\eta},$$

которыя позволяютъ, при помощи тригонометрическихъ таблицъ, для каждой системы значеній (ρ и φ) найти соотвѣтствующую систему значеній (ξ η), — и обратно, для каждой системы значеній (ξ, η) — соотвѣтствующую систему значеній (ρ, φ). А именно, съ одной стороны, имѣемъ:

7. $$\xi = \rho\cos\varphi,\quad \eta = \rho\sin\varphi,$$

въ то время, какъ съ другой стороны, ρ опредѣляется изъ равенства

8. $$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

выведеннаго въ I, и φ изъ одного изъ равенствъ 6, если даны ξ и η. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что Φ, главное значеніе φ, ключено:

$$\begin{aligned}
&\text{если } \xi > 0,\ \eta > 0, \text{ между } 0 \text{ и } \frac{\pi}{2},\\
&\text{если } \xi > 0,\ \eta < 0, \text{ между } 0 \text{ и } -\frac{\pi}{2},\\
&\text{если } \xi < 0,\ \eta > 0, \text{ между } \frac{\pi}{2} \text{ и } \pi,\\
&\text{если } \xi < 0,\ \eta < 0, \text{ между } -\frac{\pi}{2} \text{ и } -\pi.
\end{aligned}$$

Если въ 8 для ξ и η подставить значенія 7, то получимъ еще слѣдующее соотношеніе между функціями cosinus'а и sinus'а:

9. $$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

На основаніи 7 мы можемъ произвольное комплексное число

$$\xi + \eta i$$

привести также и къ виду

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

который и будемъ называть тригонометрической формой комплекснаго числа, при чемъ множитель $\cos\varphi + i\sin\varphi$, который въ дальнѣйшемъ для краткости, слѣдуя Argand'у (Annales de Gergonne, Bd. V стр. 208), будемъ писать въ видѣ $\left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}\varphi\right]$, называется по Argand'у „факторомъ направленія".

Подобно тому, какъ мы использовали предложеніе, доказанное въ H, о томъ, что произведеніе двухъ векторовъ, согласно опредѣленію данному въ F, составляется изъ своихъ сомножителей, аналогично тому, какъ произведеніе двухъ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ изъ этихъ чиселъ, т.-е. использовали равенство (стр. 414)

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)\,\mathfrak{e} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\,\mathfrak{i}$$

мы уже на стр. 416, I сдѣлали заключеніе, что точка, прямоугольныя координаты которой суть $\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2$, $\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1$, имѣетъ полярныя координаты $\rho_1\rho_2$, $\varphi_1 + \varphi_2$.

Слѣдовательно, на основаніи 7 имѣемъ:

$$\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2 = \rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

и

$$\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 = \rho_1\rho_2\sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Если теперь лѣвыя части выразить въ полярныхъ координатахъ и раздѣлить почленно получающіяся равенства на $\rho_1\rho_2$, то найдемъ слѣдующія важныя соотношенія:

10. $$\mathbf{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2}$$

и

$$\mathbf{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1},$$

такъ называемыя „теоремы сложенія" функцій cosinus'а и sinus'а, которыя получились здѣсь непосредственно, какъ слѣдствія изъ цитированныхъ выше и доказанныхъ въ Н теоремъ; важность послѣднихъ заключается въ томъ, что изъ нихъ легко выводятся всѣ формулы гоніометріи, изъ которыхъ въ виду дальнѣйшаго примѣненія укажемъ только слѣдующія: если въ 10, φ_2 вездѣ замѣнить черезъ $-\varphi_2$, что допустимо, такъ какъ всѣ наши разсужденія такъ же справедливы для отрицательныхъ угловъ, какъ и для положительныхъ, то получимъ

11. $$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$
и
$$\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\cos\varphi_2\sin\varphi_1-\cos\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Изъ 10 и 11 получаемъ далѣе:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)&=2\cos\varphi_1\cos\varphi_2,\\
\cos(\varphi_1+\varphi_2)-\cos(\varphi_1-\varphi_2)&=-2\sin\varphi_1\sin\varphi_2,\\
\sin(\varphi_1+\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_2)&=2\cos\varphi_2\sin\varphi_1,\\
\sin(\varphi_1+\varphi_2)-\sin(\varphi_1-\varphi_2)&=2\cos\varphi_1\sin\varphi_2.
\end{aligned}$$

При
$$\varphi_1+\varphi_2=\alpha,\quad \varphi_1-\varphi_2=\beta,$$
т.-е при,
$$\varphi_1=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \varphi_2=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

послѣднія четыре равенства переходятъ въ

12. $$\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha-\cos\beta&=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\sin\alpha+\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\\
\sin\alpha-\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}$$

§ 4. Степени, корни и логариѳмы въ области комплексныхъ чиселъ.

А. Степени съ цѣлыми показателями.

Теперь, послѣ введенія тригонометрическихъ функцій, мы можемъ уже рѣшить упомянутую, раньше, въ концѣ § 3, I, стр. 416 задачу: представить n-ую степень произвольнаго комплекснаго числа

$$\xi+\eta i=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho\left[\begin{matrix}c\\s\end{matrix}\varphi\right]$$

въ видѣ $\Xi + Hi$; такъ какъ по § 3, I степень $(\xi + \eta i)^n$ соотвѣтствуетъ вектору, полярныя координаты котораго суть ρ^n, $n\varphi$, а слѣдовательно, прямоугольныя координаты $\rho^n \cos n\varphi$, $\rho^n \sin n\varphi$, то получаемъ непосредственно:

$$\text{(I)} \qquad [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Это равенство называется формулой Муавра[1]).

Полагая въ § 2, E, въ равенствѣ (XV) стр. 394,

$$\gamma = 1,\ \gamma' = 0,\ \alpha = \cos\varphi,\ \alpha' = \sin\varphi,$$

получимъ:

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,i$$
$$= \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

слѣдовательно:

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$
$$= [\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]^n$$
$$= \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi);$$

т.-е. равенство (I) имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, если показатель есть отрицательное цѣлое число.

Такъ какъ степень съ цѣлымъ показателемъ есть лишь частный случай произведенія (частнаго), и такъ какъ для умноженія и дѣленія комплексныхъ чиселъ остаются въ силѣ тѣ же правила, что и въ области дѣйствительныхъ чиселъ, то для степеней комплексныхъ чиселъ имѣютъ мѣсто и формулы, выведенныя въ гл. I, § 7 B и гл. V, § 2 C.

Разлагая въ сумму лѣвую часть равенства (I) по формулѣ бинома и сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части обѣихъ частей равенства, получимъ выраженія $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ въ видѣ цѣлыхъ раціональныхъ функцій $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

---

[1]) По de Moivre'у, который въ своихъ «Miscellanea analytica» (1730), стр. 1, опубликовалъ хотя и не самое вышеуказанное равенство, но все-таки тѣсно связанное съ нимъ; ср. Cantor III, стр. 646. Въ вышеприведенномъ видѣ встрѣчается формула Moivre'a лишь у Эйлера. Introductio in analysin infinitorum, т. I, гл. 8.

B. Корни и степени съ дробными показателями.

Если въ равенствѣ (I) положить

$$\rho^n = A, \quad n\varphi = \alpha,$$

слѣдовательно,

$$\rho = \sqrt[n]{A}, \quad \varphi = \frac{\alpha}{n},$$

гдѣ $\sqrt[n]{A}$ долженъ означать единственное положительное число, n-ая степень котораго равна положительному числу A, то (I) преобразуется въ

$$\text{(Ia)} \qquad \left(\sqrt[n]{A}\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]\right)^n = A\left[{c \atop s}\alpha\right].$$

Число $\sqrt[n]{A}\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]$, n-ая степень котораго равна комплексному числу $A\left[{c \atop s}\alpha\right]$, мы должны назвать, слѣдуя терминологіи установленной въ гл. I, § 8 A, корнемъ n-ой степени изъ $A\left[{c \atop s}\alpha\right]$. Теперь спрашивается, будетъ ли это число единственнымъ, обладающимъ указаннымъ свойствомъ. Такъ какъ (I) справедливо для каждаго значенія φ, а (Ia) справедливо для каждаго значенія α, то мы можемъ въ (Ia) замѣнить α, черезъ $\alpha + 2k\pi$, гдѣ k означаетъ произвольное цѣлое число. Если принять еще во вниманіе, что (по § 3 K, равенство III)

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \ \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,$$

то (Ia) преобразуется въ

$$\text{(Ib)} \qquad \left(\sqrt[n]{A}\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]\right)^n = A\left[{c \atop s}\alpha\right].$$

Слѣдовательно, n-ыя степени всѣхъ чиселъ $\sqrt[n]{A}\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ равны данному комплексному числу $A\left[{c \atop s}\alpha\right]$. Другихъ чиселъ, обладающихъ тѣмъ же свойствомъ быть не можетъ; въ самомъ дѣлѣ для того, чтобы n-ая степень комплекснаго числа $\rho\left[{c \atop s}\varphi\right]$ имѣла значеніе $A\left[{c \atop s}\alpha\right]$, съ одной стороны, должно $\rho^n = A$, но, на основаніи гл. VI, § 7 C, стр. 347, существуетъ лишь одно положительное число такого свойства, а именно то, которое мы обозначили $\sqrt[n]{A}$; съ другой стороны, должно имѣть мѣсто

$$\cos n\varphi + i \sin n\varphi = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

слѣдовательно,

$$\cos n\varphi = \cos\alpha, \quad \sin n\varphi = \sin\alpha.$$

Cosinus же и sinus двухъ угловъ $n\varphi$ и α только тогда могутъ имѣть одно и то же значеніе, если углы либо будутъ равны, либо отличаться другъ отъ друга на кратное 2π.

Среди значеній корня n-ой степени изъ $A\left[{c \atop s}\alpha\right]$, соотвѣтствующихъ безчисленнымъ значеніямъ k и содержащихся въ (Ib), не всѣ различны. Если k_1 и k_2 суть два значенія k, то

$$\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k_1\pi}{n}\right)\right] = \left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k_2\pi}{n}\right)\right]$$

тогда и только тогда, если

$$\frac{\alpha}{n}+\frac{2k_1\pi}{n} = \frac{\alpha}{n}+\frac{2k_2\pi}{n}+2\lambda\pi,$$

гдѣ λ есть нуль или число цѣлое, слѣдовательно, если

$$\frac{k_1}{n} = \frac{k_2}{n}+\lambda$$

или

$$k_1 - k_2 = n\lambda$$

или

$$k_1 \equiv k_2 \ (\text{мод. } n).$$

Такъ какъ существуетъ какъ разъ n цѣлыхъ, отличныхъ другъ отъ друга по мод. n чиселъ, напр., 0, 1, 2, 3, $\cdots$, $(n-2)$, $(n-1)$, то равенство (Ib) даетъ какъ разъ n значеній, а именно числа вида

$$\sqrt[n]{A}\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

при

$$k = 0,\ 1,\ 2, \cdots, (n-2),\ (n-1),$$

каждое изъ которыхъ слѣдуетъ называть корнемъ n-ой степени изъ $A\left[{c \atop s}\alpha\right]$. Любое изъ n значеній корня n-ой степени изъ комплекснаго числа $a = A\left[{c \atop s}\alpha\right]$ принято обозначать посредствомъ $\sqrt[n]{{}^*a}$ и, такимъ образомъ,

(II) $$\sqrt[n]{{}^*A\left[{}^c_s\alpha\right]} = \sqrt[n]{A}\left[{}^c_s\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

при

$$k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ (n-2),\ (n-1).$$

„Главнымъ значеніемъ" корня n-ой степени называютъ то, которое при предположеніи $-\pi < \alpha \leqq \pi$ соотвѣтствуетъ значенію $k = 0$. Если имѣется въ виду главное значеніе, то знакъ * опускаютъ и пишутъ, слѣдовательно,

$$\sqrt[n]{A\left[{}^c_s\alpha\right]} = \sqrt[n]{A}\left[{}^c_s\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right].$$

Дѣйствительныя значенія корня n-ой степени изъ дѣйствительнаго числа.

Такъ какъ среди комплексныхъ чиселъ находятся и дѣйствительныя (для дѣйствительныхъ положительныхъ чиселъ $\alpha = 0$, для дѣйствительныхъ отрицательныхъ чиселъ $\alpha = \pi$), то только что изложенное примѣнимо и къ корнямъ n-ой степени изъ дѣйствительныхъ чиселъ. Въ то время, какъ въ области дѣйствительныхъ чиселъ мы должны были различать (ср. гл. IV, § 7 B), было ли подкоренное количество положительнымъ или отрицательнымъ, показатель степени четнымъ или нечетнымъ, и соотвѣтственно съ этимъ корень n-ой степени изъ дѣйствительнаго числа имѣлъ то два, то одно значеніе, или его совсѣмъ не существовало, въ области комплексныхъ чиселъ корень n-ой степени изъ дѣйствительнаго числа имѣетъ всегда, безъ исключеній, n значеній, отличныхъ другъ отъ друга. Если подкоренное количество есть положительное дѣйствительное число A, слѣдовательно, $\alpha = 0$, то главное значеніе корня n-ой степени, $\sqrt[n]{A}$, будетъ также дѣйствительнымъ и положительнымъ. Второе значеніе можетъ быть дѣйствительнымъ только тогда, если $\frac{2k\pi}{n} = \pi$, слѣдовательно, $k = \frac{1}{2}n$, а это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда n есть число четное. Въ этомъ случаѣ, мы на самомъ дѣлѣ получимъ для $k = \frac{1}{2}n$ дѣйствительное отрицательное значеніе $\sqrt[n]{A}\cos\pi = -\sqrt[n]{A}$. Если подкоренное количество есть дѣйствительное отрицательное число, слѣдовательно, $\alpha = \pi$, то главное значеніе

$$\sqrt[n]{A\left[{}^c_s\pi\right]} = \sqrt[n]{A}\left[{}^c_s\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

никогда не будетъ дѣйствительнымъ; такъ, напримѣръ, главныя значенія $\sqrt{-1}$ и $\sqrt[3]{-1}$ будутъ

$$\sqrt{-1}=\left[\begin{matrix}c\\s\end{matrix}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=i$$

и

$$\sqrt[3]{-1}=\left[\begin{matrix}c\\s\end{matrix}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Дѣйствительное значеніе можетъ соотвѣтствовать только такому k, при которомъ

$$\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}=\pi$$

или

$$2k+1=n,$$

т.-е. исключительно значенію $k=\frac{n-1}{2}$, которое будетъ цѣлымъ числомъ лишь при нечетныхъ значеніяхъ n. Если n есть число четное, то всѣ n значеній корня n-ой степени изъ дѣйствительнаго отрицательнаго числа — мнимы. Эти выводы включаютъ въ себя то, что изложено въ гл. IV, § 7 B, стр. 191 и далѣе, относительно существованія корней изъ положительныхъ чиселъ.

Мнимыя значенія корня n-ой степени изъ дѣйствительнаго числа.

Если какое-нибудь мнимое число встрѣчается среди n значеній корня n-ой степени изъ дѣйствительнаго числа, то и сопряженное ему мнимое число встрѣчается среди этихъ n значеній.

Доказательство:

1. Если подкоренное количество есть дѣйствительное положительное число A, слѣдовательно, амплитуда α равна нулю, то мы имѣемъ

$$\sqrt[n]{{}^*A}=\sqrt[n]{A}\left[\begin{matrix}c\\s\end{matrix}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$
$$(k=0,\ 1,\cdots,\ n-1).$$

Въ силу соотношеній

$$\cos(2\pi-\varphi)=\cos\varphi,\ \sin(2\pi-\varphi)=-\sin\varphi,$$

значенія правой части, соотвѣтствующія двумъ значеніямъ k: k_1 и k_2, могутъ быть мнимыми и сопряженными тогда и только тогда, если

$$\frac{2k_1\pi}{n}+\frac{2k_2\pi}{n}=2\pi$$

или

$$k_2 = n - k_1.$$

При $k_1 = 0$, $k_2 = n$, слѣдовательно, $k_2 \equiv 0$ (мод. n), т.-е. k_1 и k_2 даютъ одно и то же дѣйствительное положительное значеніе. Если n четное и $k_1 = \frac{n}{2}$, то и $k_2 = \frac{n}{2}$, т.-е. k_1 и k_2 даютъ одно и то же дѣйствительное отрицательное значеніе корня. Для каждаго другого значенія k_1 мы найдемъ отличное отъ него значеніе k_2, дающее сопряженный корень.

2. Если подкоренное количество есть дѣйствительное отрицательное число $-A$, слѣдовательно, $\alpha = \pi$, то

$$\sqrt[n]{* - A} = \sqrt[n]{A}\left[{}^{c}_{s}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

Значеніямъ числа k, k_1 и k_2, соотвѣтствуютъ сопряженно-мнимыя значенія правой части тогда и только тогда, если

$$\frac{\pi}{n} + \frac{2k_1\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \frac{2k_2\pi}{n} = 2\pi$$

или

$$k_2 = n - 1 - k_1.$$

При $k_1 = \frac{n-1}{2}$ и $k_2 = \frac{n-1}{2}$. Въ случаѣ нечетнаго n значенію $k = \frac{n-1}{2}$ соотвѣтствуетъ единственный дѣйствительный отрицательный корень; каждому другому значенію k_1 соотвѣтствуетъ отличное отъ k_1 значеніе k_2, удовлетворяющее равенству $k_2 = n - 1 - k_1$; слѣдовательно, для каждаго мнимаго корня существуетъ ему сопряженный.

Геометрическое представленіе n значеній корня n-ой степени изъ комплекснаго числа.

Всѣ данныя въ равенствѣ (II) n значеній $\sqrt[n]{*A\left[{}^{c}_{s}\,\alpha\right]}$ имѣютъ одинаковое абсолютное значеніе $\sqrt[n]{A}$, слѣдовательно, соотвѣтствующія имъ точки расположены на окружности, описанной изъ начала O радіусомъ, отношеніе длины котораго къ единицѣ длины равно $\sqrt[n]{A}$. Точка, соотвѣтствующая главному значенію ($k = 0$), опредѣлится какъ пересѣченіе этой окружности и луча, образующаго съ начальнымъ направленіемъ уголъ $\frac{\alpha}{n}$. Точки, соотвѣтствующія остальнымъ значеніямъ получатся, если начиная отъ этой точки раздѣлить окружность на n равныхъ дугъ.

Формулы для дѣйствій съ корнями.

Какъ было уже указано въ гл. IV, § 7 B, справедливость для корней равенствъ установленныхъ въ гл. I, § 8 B, покоится, съ одной стороны, на законахъ возведенія въ степень съ цѣлымъ показателемъ, а, съ другой стороны, на однозначности корней въ области абсолютныхъ чиселъ. Правила дѣйствій надъ степенями пригодны и для комплексной числовой области (см. A, стр. 421), корни же въ этой области уже не однозначны; слѣдовательно, намъ теперь придется провѣрить справедливость указанныхъ формулъ для корней, а въ частности установить, въ какомъ смыслѣ слѣдуетъ понимать равенства, въ правой и лѣвой частяхъ которыхъ находятся многозначныя выраженія. Мы начнемъ съ изслѣдованія равенства

$$\text{(III)} \qquad \sqrt[n]{*a}\cdot\sqrt[n]{*b}=\sqrt[n]{*ab},$$

гдѣ

$$a=A\left[{}^{c}_{s}\,\alpha\right],\quad b=B\left[{}^{c}_{s}\,\beta\right].$$

Съ одной стороны,

$$\sqrt[n]{*a}\cdot\sqrt[n]{*b}=\sqrt[n]{AB}\cdot\left[{}^{c}_{s}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\cdot\left[{}^{c}_{s}\left(\frac{\beta}{n}+\frac{2h\pi}{n}\right)\right]$$
$$=\sqrt[n]{AB}\left[{}^{c}_{s}\left(\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{2(k+h)\pi}{n}\right)\right],$$

гдѣ

$$k=0,\ 1,\cdots,\ n-1,$$
$$h=0,\ 1,\cdots,\ n-1.$$

Съ другой стороны, имѣемъ:

$$\sqrt[n]{*ab}=\sqrt[n]{AB}\left[{}^{c}_{s}\left(\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{2l\pi}{n}\right)\right],$$

гдѣ

$$l=0,\ 1,\cdots,\ n-1.$$

Если каждое изъ чиселъ h, k будетъ пробѣгать рядъ значеній 0, $1,\cdots,n-1$, то и $h+k$ получитъ, какъ разъ n (мод. n) отличныхъ другъ отъ друга значеній; поэтому каждому значенію $h+k$ соотвѣтствуетъ одно изъ значеній l и обратно, т.-е. каждое изъ значеній $\sqrt[n]{*a}\cdot\sqrt[n]{*b}$ заключается среди значеній $\sqrt[n]{*ab}$ и каждое значеніе $\sqrt{*ab}$ — среди значеній $\sqrt[n]{*a}\cdot\sqrt[n]{*b}$. Такое равенство между двумя многозначными выраженіями, въ которомъ каждое значеніе лѣвой части равно одному изъ значеній правой части и каждое значеніе правой части равно одному изъ значеній лѣвой части, называютъ, по M. Ohm'у [1]) „полнымъ" (vollkommene) равенствомъ. Слѣдовательно, въ этомъ смыслѣ равенство III есть полное.

То же свойство можно доказать и относительно равенства

$$\text{(IV)} \qquad \sqrt[n]{*a}:\sqrt[n]{*b}=\sqrt[n]{*(a:b)}.$$

Такимъ же способомъ можно показать, что и

$$\text{(V)} \qquad \sqrt[m]{*\sqrt[n]{*a}}=\sqrt[mn]{*a}$$

представляетъ изъ себя полное равенство, но еще короче въ этомъ убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ произвольное число можно возвести въ (mn)-ую степень, возведя его сначала въ m-ую степень, а полученный результатъ въ n-ую, то отсюда и слѣдуетъ, что (mn)-ая степень какого-либо значенія лѣвой части равна a, а, слѣдовательно, каждое изъ ея значеній несомнѣнно заключается среди значеній $\sqrt[mn]{*a}$; съ другой стороны имѣемъ:

$$a=(\sqrt[mn]{*a})^{mn}=\left[(\sqrt[mn]{*a})^{m}\right]^{n},$$

слѣдовательно,

$$(\sqrt[mn]{*a})^{m}=\sqrt[n]{*a}$$

и

$$\sqrt[mn]{*a}=\sqrt[m]{*\sqrt[n]{*a}},$$

т.-е. каждое изъ значеній правой части (V) встрѣчается и среди значеній лѣвой части.

$$\text{(VI)} \qquad (\sqrt[np]{*a})^{mp}=(\sqrt[n]{*a})^{m}$$

есть полное равенство. Доказательство такое же, какъ и для (III) или для (V).

---

[1]) M. Ohm, Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik, II Teil, стр. 386.

Каждое значеній лѣвой части равенства

(VII) $$(\sqrt[n]{*a})^m = \sqrt[n]{*a^m}$$

содержится и среди значеній правой части.

Полнымъ же это равенство является лишь тогда, когда m и n числа взаимнопростыя. Дѣйствительно:

$$(\sqrt[n]{*a})^m = (\sqrt[n]{A})^m \left[{c \atop s} \left(\frac{m}{n} \alpha + \frac{2mk\pi}{n} \right) \right],$$
$$(k = 0,\ 1, \cdots,\ n-1),$$

и

$$\sqrt[n]{*a^m} = \sqrt[n]{A^m} \left[{c \atop s} \left(\frac{m}{n} \alpha + \frac{2h\pi}{n} \right) \right],$$
$$(h = 0,\ 1, \cdots,\ n-1).$$

Каждому значенію k соотвѣтствуетъ одно значеніе h, такъ что

$$mk \equiv h \text{ (мод. } n),$$

каждому же значенію h соотвѣтствуетъ значеніе k, удовлетворяющее этому сравненію, лишь въ томъ случаѣ, если m и n числа взаимно простыя (ср. гл. I, § 12 A и гл. V, § 4 D).

Если общій наибольшій дѣлитель t чиселъ m и n отличенъ отъ единицы, то одно изъ значеній k соотвѣтствуетъ лишь тѣмъ значеніямъ h, которыя кратны t.

Каждое изъ значеній лѣвой части равенства

(VIII) $$\sqrt[n]{*a^m} = \sqrt[np]{*a^{mp}}$$

заключается среди значеній правой части (доказательство такое же, какъ и для (V)). Такъ какъ лѣвая часть имѣетъ n различныхъ значеній, а правая np различныхъ значеній, то, при $p > 1$, равенство (VIII) никогда не можетъ быть полнымъ.

Выраженія обѣихъ частей формулъ съ (III) по (VIII) только тогда будутъ однозначны, если каждому корню приписать опредѣленное значеніе, напр., указанное раньше главное значеніе ($k = 0$). Возникаетъ вопросъ, всѣ ли формулы справедливы для этого главнаго значенія. Полагая въ доказательствѣ (III) каждое изъ чиселъ h, k, l равнымъ нулю, найдемъ, что (III) справедливо для главнаго значенія корней тогда и только тогда, если на ряду съ

$$-\pi < \alpha \leqq \pi,\quad -\pi < \beta \leqq \pi, \text{ также и } -\pi < \alpha + \beta \leqq \pi.$$

Если, напримѣръ, подкоренныя количества a, b суть дѣйствительныя положительныя числа, а, слѣдовательно, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то это условіе выполнено, но оно не выполняется, если a, b дѣйствительныя отрицательныя числа ($\alpha = \pi$, $\beta = \pi$).

Для формулы (IV) соотвѣтствующее условіе выразится такъ

$$-\pi < \alpha - \beta \leqq \pi.$$

Формулы (V) и (VI) годны для главныхъ значеній корней, какъ это непосредственно видно, если выписать факторы направленія обѣихъ частей равенства.

(VII) и (VIII), вообще говоря, не являются справедливыми для главныхъ значеній. Для каждой изъ нихъ должно быть тогда выполнено особое условіе, которое получимъ сравненіемъ факторовъ направленія обѣихъ частей равенства. Выводъ этихъ условій можно найти также у Stolz и Gmeiner, Theoretische Arithmetik, XII. Abschnitt, Nr. 4 (стр. 360 и 361). Этимъ самымъ полностью исчерпываются вопросы, на которые мы въ гл. IV, § 7 B, стр. 191—195 для области дѣйствительныхъ относительныхъ чиселъ могли дать лишь неполный отвѣтъ.

Степени съ дробными показателями.

Если опредѣленіе $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$, данное для степени съ дробнымъ показателемъ въ гл. II, § 5 B, распространимъ и на случай комплекснаго основанія a, то ясно, что послѣднія наши изслѣдованія уже содержатъ въ себѣ теорію этихъ степеней. При $a = A\left[{c \atop s}\alpha\right]$ имѣемъ

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{A})^m \left[{c \atop s}\left(\frac{m}{n}\alpha + 2\frac{m}{n}k\pi\right)\right].$$

Если m, n имѣютъ общій наибольшій дѣлитель t, то два значенія k, которыя сравнимы $\left(\text{мод. } \frac{n}{t}\right)$ даютъ уже одно и то же значеніе факторовъ направленія; въ такомъ случаѣ, слѣдовательно, правая часть, а вмѣстѣ съ тѣмъ и $a^{\frac{m}{n}}$, имѣютъ именно $\frac{n}{t}$ отличныхъ другъ отъ друга значеній. Если $t = 1$, а, слѣдовательно, m и n числа взаимно простыя, то $(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ имѣетъ какъ разъ n

другъ отъ друга отличныхъ значеній, которыя въ этомъ случаѣ, согласно (VII), совпадаютъ съ n значеніями $\sqrt[n]{*a^m}$, которыя всегда имѣетъ этотъ символъ.

Теперь, слѣдуя Коши (Cours d'Analyse VII, § 1)[1]), произвольное значеніе степени $a^{\frac{m}{n}}$ будемъ обозначать черезъ $((a))^{\frac{m}{n}}$, тогда какъ $a^{\frac{m}{n}}$ должно постоянно означать главное значеніе степени, соотвѣтствующее $k=0$. Для дѣйствительнаго, положительнаго основанія a $(\alpha=0)$, главное значеніе $a^{\frac{m}{n}}$ есть единственное дѣйствительное положительное значеніе среди всѣхъ значеній $((a))^{\frac{m}{n}}$. Данное здѣсь опредѣленіе главнаго значенія находится въ полномъ согласіи съ даннымъ въ гл. IV, § 7 B, стр. 194. Если a есть дѣйствительное отрицательное число $(\alpha=\pi)$ и n есть число четное, то при условіи, что m и n числа взаимно простыя, ни одно изъ значеній $((a))^{\frac{m}{n}}$ не будетъ дѣйствительнымъ; если при томъ же предположеніи n есть число нечетное, то одно изъ значеній $((a))^{\frac{m}{n}}$ будетъ дѣйствительнымъ и отрицательнымъ, но это не будетъ главное значеніе, а значеніе соотвѣтствующее $k=\frac{n-1}{2}$.

C. Степени съ ирраціональными показателями.

Правыя части равенствъ

$$((a))^x = A^x \left[{c \atop s}(x\alpha + 2xk\pi)\right]$$

и

$$a^x = A^x \left[{c \atop s}(x\alpha)\right],$$

справедливыхъ прежде всего при раціональномъ x, сохраняютъ опредѣленный смыслъ и тогда, если вмѣсто x подставить ирраціональное число ξ $(x_n;\ X_n)$. Поэтому мы можемъ установить слѣдующее опредѣленіе:

$$((a))^{\xi} = A^{\xi} \left[{c \atop s}(\xi\alpha + 2\xi k\pi)\right]$$

и

$$a^{\xi} = A^{\xi} \left[{c \atop s}(\xi\alpha)\right].$$

1) Oeuvres complètes, Série II, т. 3, стр. 157.

Чтобы оправдать это опредѣленіе, мы должны убѣдиться въ томъ, что если выбрать $\xi - x_n$ (а также и $X_n - \xi$) достаточно малымъ, то модуль и факторъ направленія $((a))^{x_n}$ (соотвѣтственно $((a))^{X_n}$) будутъ произвольно мало отличаться отъ модуля и фактора направленія $((a))^{\xi}$, само-собою разумѣется, при одномъ и томъ же значеніи k. Справедливость этого утвержденія для модуля слѣдуетъ уже изъ опредѣленія степени положительнаго числа съ ирраціональнымъ показателемъ, даннаго въ гл. VI, § 7 D. Если

$$\xi = x_n + \delta$$

и для краткости обозначить

$$\alpha + 2k\pi = \alpha',$$

то

$$\left[{c \atop s}(\xi\alpha + 2\xi k\pi)\right] - \left[{c \atop s}(x_n\alpha + 2x_n k\pi)\right] = \left[{c \atop s}(x_n\alpha' + \delta\alpha')\right] - \left[{c \atop s}(x_n\alpha')\right] =$$

$$= (\cos(x_n\alpha' + \delta\alpha') - \cos(x_n\alpha')) +$$

$$+ i(\sin(x_n\alpha' + \delta\alpha') - \sin(x_n\alpha')) =$$

$$= -2\sin\left(x_n\alpha' + \frac{1}{2}\delta\alpha'\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta\alpha'\right) +$$

$$+ 2i\cos\left(x_n\alpha' + \frac{1}{2}\delta\alpha'\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta\alpha'\right).$$

Придавая достаточно малыя значенія δ, $\sin\left(\frac{1}{2}\delta\alpha'\right)$, а этимъ самымъ и разность обоихъ факторовъ направленія можно сдѣлать произвольно малыми. Слѣдовательно, выраженіе, данное для $((a))^{\xi}$, дѣйствительно, является предѣльнымъ значеніемъ, къ которому приближается $((a))^{x_n}$ (соотвѣтственно $((a))^{X_n}$), если $\xi - x_n$ (соотвѣтственно $X_n - \xi$) достаточно мало.

Два значенія $((a))^{\xi}$, соотвѣтствующія значеніямъ k_1 и k_2 величины k, могутъ быть равны другъ другу лишь тогда, если

$$\xi\alpha + 2\xi k_1\pi = \xi\alpha + 2\xi k_2\pi + 2l\pi,$$

гдѣ l есть какое-либо цѣлое число, или если

$$\xi(k_1 - k_2) = l.$$

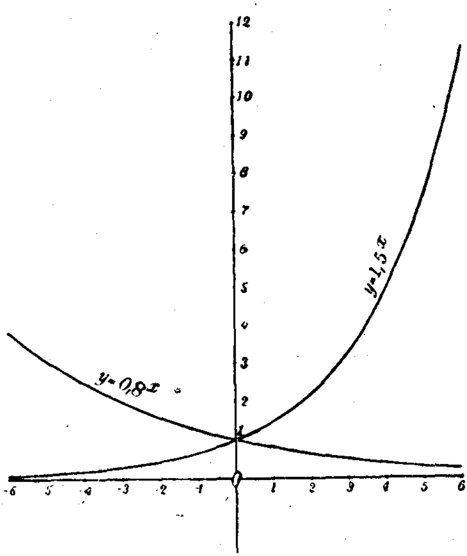
Такъ какъ ξ ирраціонально, то это равенство можетъ имѣть мѣсто лишь при $k_1 - k_2 = l = 0$; двумъ различнымъ значеніямъ k соотвѣтствуютъ, слѣдовательно, всегда и различныя значенія $((a))^{\xi}$; т.-е. степень съ ирраціональнымъ показателемъ имѣетъ въ области комплексныхъ чиселъ безконечно много значенiй.

Если основанiе a есть нѣкоторое дѣйствительное положительное число ($a = 0$), то среди безконечнаго множества значенiй $((a))^{\xi}$, главное значенiе a^{ξ} есть единственное дѣйствительное значенiе. Если a дѣйствительно и отрицательно, то всѣ значенiя $((a))^{\xi}$ мнимы. Такъ, напримѣръ, ни одно изъ значенiй $(-1)^{\sqrt{2}}$ не оказывается дѣйствительнымъ; такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ среди безконечнаго множества значенiй $((a))^{\xi}$ имѣются такiя, мнимая часть которыхъ произвольно мала, слѣдовательно, при геометрическомъ представленiи они соотвѣтствуютъ точкамъ, хотя и не лежащимъ на самой оси дѣйствительныхъ чиселъ, но зато, лежащимъ въ непосредственной близости къ ней.

D. Степень, какъ функцiя показателя.

Ограничивая сперва основанiе a дѣйствительными и положительными значенiями, будемъ придавать показателю x всевозможныя дѣйствительныя рацiональныя и иррацiональныя значенiя. Каждому изъ этихъ значенiй x соотвѣтствуетъ единственное опредѣленное дѣйствительное положительное значенiе a^x, опредѣленное для рацiональнаго значенiя x уже въ гл. I, § 7, C, а для иррацiональнаго x — въ гл. VI, § 7 D. Поэтому главное значенiе a^x называютъ однозначной функцiей x. Такъ какъ безконечно малому измѣненiю x всегда соотвѣтствуетъ безконечно малое измѣненiе этой функцiи (см. гл. VI, § 7 D), то ее называютъ непрерывной функцiей x. Если $a > 1$, то a^x постоянно увеличивается съ возрастанiемъ x; если $a < 1$, то a^x съ возрастанiемъ x постоянно убываетъ (гл. VI, § 7 D). Измѣненiя значенiй функцiй a^x можно наглядно представить при помощи чертежа, а именно слѣдующимъ образомъ: выбираемъ на безконечной прямой линiи произвольно точку O за соотвѣтствующую $x = 0$, принимаемъ произвольный отрѣзокъ за единицу длины, а за изображенiе какого-либо значенiя x ту точку прямой, отношенiе разстоянiя которой отъ O къ единицѣ длины равно x (ср. гл. VI, § 8); наконецъ, на перпендикулярѣ, возставленномъ къ данной прямой въ этой точкѣ, откладываемъ отрѣзокъ, отношенiе котораго къ единицѣ длины есть $y = a^x$. Такъ какъ a^x есть непрерывная функцiя x, то и точки располагаются на непрерывной кривой, любое число точекъ которой можетъ быть на самомъ дѣлѣ найдено указаннымъ способомъ.

Приложенный здѣсь чертежъ, на которомъ за единицу длины принятъ отрѣзокъ въ 5 миллиметровъ, соотвѣтствуетъ значеніямъ $a = 1{,}5$ и $a = 0{,}8$. Какъ только кривая построена, то можно, приближенно, по каждому значенію x непосредственно получить соотвѣтствующее значеніе $y = a^x$ и, обратно, по каждому значенію $y = a^x$ найти соотвѣтствующее значеніе x, т.-е. логариѳмъ y при основаніи a.



Фиг. 9.

Функція, опредѣляющая зависимость значенія степени отъ показателя, можетъ также быть представлена въ видѣ числового выраженія, а именно, такъ называемымъ „степеннымъ рядомъ“, т.-е. въ видѣ суммы съ безконечнымъ числомъ членовъ, каждый изъ которыхъ есть произведеніе цѣлой положительной степени x на нѣкоторое опредѣленное число. Надъ такими степенными рядами можно производить дѣйствія такъ же, какъ и надъ цѣлыми раціональными функціями, если только эти ряды „сходящіеся“, т.-е. если сумма первыхъ n членовъ произвольно приближается къ опредѣленному конечному предѣльному значенію, при n безгранично возрастающемъ. Чтобы доказать только что высказанное утвержденіе, намъ придется воспользоваться нѣкоторыми свойствами особенно важнаго ряда [1]).

1. Безконечный рядъ

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots + \text{in inf.}$$

---

[1]) Здѣсь мы уклонились отъ принципа, котораго придерживались все время, а именно, подробно доказывать всѣ предложенія необходимыя намъ; это уклоненіе нами сдѣлано потому, что изложеніе анализа, къ которому относится теорія степенныхъ рядовъ, не входитъ въ планъ нашей книги. Безъ указанныхъ же предложеній обойтись нельзя, чтобы довести ариѳметику до конца; здѣсь собственно ариѳметика до нѣкоторой степени сливается съ анализомъ.

будетъ сходящимся [1]) для всѣхъ конечныхъ, дѣйствительныхъ и комплексныхъ значеній x; значеніе, къ-которому приближается сумма n первыхъ членовъ этого ряда при безграничномъ возрастаніи числа n, обозначимъ посредствомъ $E(x)$.

2. $$E(xi) = \cos x + i \sin x \;^{2)}.$$

3. Для двухъ произвольныхъ значеній $x : x_1$ и x_2, всегда имѣетъ мѣсто

$$E(x_1 + x_2) = E(x_1) \cdot E(x_1) \;^{3)}.$$

Изъ 1 непосредственно вытекаетъ:

$$E(0) = 1$$

и

$$E(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$
$$= 2{,}718281828459 \cdots.$$

Это число, которое намъ пришлось упомянуть еще въ гл. V, § 5 A, стр. 261, въ математикѣ всегда обозначается черезъ e. Опредѣленіе $E(x)$ даетъ возможность непосредственно убѣдиться въ томъ, что для каждаго положительнаго значенія x справедливо неравенство $E(x) > 1$. Для какого либо отрицательнаго значенія $(-x)$, изъ $E(-x) \cdot E(x) = E(0) = 1$ слѣдуетъ, что $E(-x)$ положительно и меньше единицы. Съ возрастаніемъ (дѣйствительнаго) x, $E(x)$ постоянно увеличивается, такъ какъ, если

$$x_2 > x_1,$$

[1]) Доказательство очень нетрудно, если вывести раньше наиболѣе простые признаки сходимости безконечныхъ рядовъ.

[2]) Это равенство, данное Эйлеромъ (Introductio in analysin infinitorum, т. I, гл. 8) можно доказать, если въ степенномъ ряду $E(x)$ замѣнить x мнимымъ числомъ zi, рядъ привести къ виду $C(z) + i \cdot S(z)$ и показать, что безконечные ряды $C(z)$ и $S(z)$ при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ z совпадаютъ съ ранѣе введенными функціями $\cos z$ и $\sin z$. Если затѣмъ эти функціи для комплексныхъ значеній z опредѣлить при помощи рядовъ $C(z)$ и $S(z)$, то равенство 2 будетъ имѣть мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x.

[3]) Равенство 3 можетъ быть, напримѣръ, доказано, если показать только, что производная отъ $\dfrac{E(x+y)}{E(x) \cdot E(y)}$, какъ по x, такъ и по y равна 0, слѣдовательно, эта дробь имѣетъ значеніе, независящее отъ x и y, и равное 1, что непосредственно получается при подстановкѣ $y = 0$. Впрочемъ, для мнимыхъ значеній x_1 и x_2 равенство 3 слѣдуетъ изъ равенства 2 и изъ теоремы сложенія функцій косинуса и синуса, уже доказанной для дѣйствительныхъ значеній аргумента въ § 3 K, стр. 419.

и, слѣдовательно,

$$x_2 = x_1 + \delta, \text{ гдѣ } \delta > 0,$$

то

$$E(x_2) = E(x_1) \cdot E(\delta);$$

но такъ какъ

$$E(\delta) > 1,$$

то

$$E(x_2) > E(x_1).$$

При этомъ $E(\delta)$, для достаточно малыхъ значеній δ, произвольно мало отличается отъ 1, слѣдовательно, $E(x_2)$ произвольно мало отличается отъ $E(x_1)$, т.-е. $E(x)$ есть непрерывная функція x.

Изъ равенства (3) получаемъ для $x_1 = 1$, $x_2 = 1$:

$$E(2) = E(1) \cdot E(1) = e^2,$$

для

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1:$$
$$E(3) = E(2) \cdot E(1) = e^2 \cdot e = e^3.$$

Пользуясь заключеніемъ отъ $m - 1$ къ m, легко найти для каждаго цѣлаго положительнаго числа m, что:

$$E(m) = e^m.$$

Если $(-m)$ означаетъ какое-либо цѣлое отрицательное число, то на основаніи 3 имѣемъ:

$$E(-m) \cdot E(m) = E(-m + m) = E(0) = 1,$$

слѣдовательно:

$$E(-m) = \frac{1}{E(m)} = \frac{1}{e^m} = e^{-m}.$$

Далѣе, согласно 3, если m есть положительное или отрицательное цѣлое число, а n — положительное цѣлое число, то

$$\overbrace{E\left(\frac{m}{n}\right) \cdot E\left(\frac{m}{n}\right) \cdots E\left(\frac{m}{n}\right)}^{(n \text{ сомножителей})} = E(m) = e^m;$$

слѣдовательно, $E\left(\frac{m}{n}\right)$ содержится среди значеній $((e))^{\frac{m}{n}}$. Такъ какъ $E\left(\frac{m}{n}\right)$ есть дѣйствительное положительное число, то $E\left(\frac{m}{n}\right)$ должно быть равно единственному дѣйствительному положительному значенію $((e))^{\frac{m}{n}}$, т.-е. равно главному значенію $e^{\frac{m}{n}}$. Пусть, наконецъ,

$$\mu = (m_n;\ M_n)$$

есть какое либо дѣйствительное ирраціональное число (m_n, M_n — раціональны, см. гл. VI, § 1). Такъ какъ, по опредѣленію ирраціональныхъ чиселъ,

$$m_n < \mu < M_n,$$

и разность $M_n - m_n$ при достаточно большихъ значеніяхъ n можетъ быть сдѣлана произвольно малой, то

1. $$E(m_n) > E(\mu) < E(M_n);$$

принимая во вниманіе непрерывность $E(x)$, находимъ, что разность

2. $$E(M_n) - E(m_n)$$

при достаточно большихъ значеніяхъ n становится произвольно малой. $(E(m_n);\ E(M_n))$ является двойнымъ рядомъ, значеніе котораго есть $E(\mu)$, въ смыслѣ, указанномъ въ гл. VI, § 7 A, стр. 344. Такъ какъ теперь (согласно гл. VI, § 7 D, стр. 349).

$$e^{\mu} = (e^{m_n};\ e^{M_n})$$

и, какъ доказано ранѣе,

$$E(m_n) = e^{m_n} \text{ и } E(M_n) = e^{M_n},$$

то и для ирраціональнаго числа μ получаемъ также

$$e^{\mu} = E(\mu).$$

Этимъ показано, что **при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ** x, **главное значеніе степени** e^x **равно значенію функціи** $E(x)$, **опредѣленной степеннымъ рядомъ** 1. Распространяя постепенно въ теченіе всѣхъ нашихъ изслѣдованій понятіе степени на новые виды показателей степеней, мы теперь при помощи функціи $E(x)$, которая поэтому и получила названіе „показательной функціи“, пришли къ опредѣленію степени, охватывающему всѣ встрѣчавшіеся до сихъ поръ отдѣльные случаи.

И для произвольнаго дѣйствительнаго значенія x непосредственно слѣдуетъ

$$((e))^x = E(x)\left[{}^{c}_{s}\,(2k\pi x)\right] = F_k(x)$$

Двумъ различнымъ значеніямъ k соотвѣтствуютъ двѣ совершенно различныхъ функціи $F_k(x)$. Символъ $((e))^x$ означаетъ, слѣдовательно, не единственную опредѣленную функцію, а, напротивъ, это есть символъ безконечно-многихъ функцій $F_k(x)$, которыя для каждаго цѣлаго x, во всякомъ случаѣ, имѣютъ одно и то же значеніе, а для $x=\frac{m}{n}$, гдѣ m и n числа взаимно простыя, имѣютъ всего лишь n отличныхъ другъ отъ друга значеній и ни чѣмъ болѣе другъ съ другомъ не связаны. Единственнымъ дѣйствительнымъ положительнымъ значеніемъ, которое имѣетъ $((e))^x$ при какомъ либо значеніи показателя, всегда является главное значеніе e^x, т.-е. значеніе функціи $F_0(x)$. Если же $((e))^x$ имѣетъ вообще дѣйствительное и отрицательное значеніе, что и имѣетъ мѣсто, если x равно дроби, въ приведенномъ видѣ которой знаменатель оказывается числомъ четнымъ, то это дѣйствительное и отрицательное значеніе, во всякомъ случаѣ, не является значеніемъ одной и той же функціи $F_k(x)$ при всякихъ значеніяхъ x такого рода. Такъ, при $x=\frac{m}{2n}$, гдѣ m и $2n$ числа взаимно простыя, $((e))^x$ будетъ, дѣйствительнымъ и отрицательнымъ числомъ, если

$$2k\pi\cdot\frac{m}{2n}=l\pi,$$

гдѣ l означаетъ какое-либо нечетное цѣлое число, или если

$$k=n\cdot\frac{l}{m}$$

(такъ какъ m и n числа взаимно простыя, то l должно дѣлиться на m), т.-е. если k равно нечетному числу, кратному n. Дѣйствительное отрицательное значеніе $((e))^{\frac{m}{2n}}$ соотвѣтствуетъ функціямъ $F_n(x)$, $F_{3n}(x)$, $F_{5n}(x),\cdots$ и т. д., слѣдовательно, въ зависимости отъ значенія знаменателя $2n$, опредѣляется различными функціями $F_k(x)$. Такъ, дѣйствительное и отрицательное значеніе $-E\left(\frac{1}{2}\right)$ степени $((e))^{\frac{1}{2}}$ получается изъ функціи

$$F_1(x)=E(x)\left[{c \atop s}(2\pi x)\right]$$

(а также изъ функцій $F_3(x)$, $F_5(x),\cdots$) при $x=\frac{1}{2}$, напротивъ, дѣйствительное отрицательное значеніе $-E\left(\frac{1}{4}\right)$ степени $((e))^{\frac{1}{4}}$ изъ функціи

$$F_2(x) = E(x)\left[{c \atop s}(4\pi x)\right]$$

(а также изъ функцій $F_6(x)$, $F_{10}(x), \cdots$) при $x = \frac{1}{4}$, дѣйствительное отрицательное значеніе $-E\left(\frac{1}{6}\right)$ степени $((e))^{\frac{1}{6}}$ изъ функціи

$$F_3(x) = E(x)\left[{c \atop s}(6\pi x)\right]$$

(а также изъ функцій $F_9(x)$, $F_{15}(x)\cdots$) при $x = \frac{1}{6}$ и т. д.

Теперь мы узнаёмъ дѣйствительную причину того, почему мы уже въ области относительныхъ чиселъ (гл. IV, § 8, стр. 196) лишь тогда называли α логариомомъ числа a, при положительномъ основаніи e, когда главное значеніе e^α оказывалось равнымъ a, такъ какъ лишь при наличности этого условія логариомъ является обращеніемъ одной и той же функціи $F_0(x)$, въ то время какъ если принять $\frac{1}{2}$ и за логариомъ $-E\left(\frac{1}{2}\right)$ при основаніи e, $\frac{1}{4}$ — за логариомъ $-E\left(\frac{1}{4}\right)$, $\frac{1}{6}$ — какъ логариомъ $-E\left(\frac{1}{6}\right)$ и т. д., логариомъ одинъ разъ оказался бы обращеніемъ функціи $F_1(x)$, другой разъ—обращеніемъ функціи $F_2(x)$ и въ третій разъ—функціи $F_3(x)$. Конечно, хотя и допустимо изученіе обращенія функціи $F_k(x)$ и при k отличномъ отъ нуля, т.-е. установленіе зависимости между величинами x и y, зависимости, опредѣляемой уравненіемъ $y = F_k(x)$, мы все-таки не имѣемъ права эту функцію x называть логариомомъ y; для нея слѣдовало бы ввести другое, отдѣльное для каждаго значенія k названіе. Игнорированіе этихъ соображеній является причиной того, что еще недавно, снова могло быть высказано невѣрное утвержденіе [1]) будто бы отрица-

[1]) Напримѣръ. Heymann'омъ въ сочиненіи: «Die Logarithmen negativer Zahlen und ihr Auftreten bei der Auflösung transzendenter Gleichungen». Zeitschrift f. mathem. u. naturwissensch. Unterricht, т. 32 (2901). стр. 160—180. Утвержденіе прерывности логариома для отрицательныхъ аргументовъ въ данной работѣ объясняется также и постояннымъ переходомъ отъ одной функціи къ другой. Начинающему, эти соотношенія станутъ, быть можетъ, еще яснѣй, если вмѣсто числа e взять за основаніе степень какого-нибудь цѣлаго числа, напр., число 4096. Если бы при такомъ основаніи $\frac{1}{2}$ также разсматривать, какъ ло-

тельныя числа при положительномъ основанiи могутъ имѣть дѣйствительный логариѳмъ. Равенство $y = F_0(x)$ приводитъ въ соотвѣтствiе съ каждымъ дѣйствительнымъ значенiемъ x лишь одно положительное значенiе y; при $k > 0$ равенству $y = F_k(x)$ могутъ, все таки, удовлетворять системы значенiй x и y, въ которыхъ x дѣйствительно и y отрицательно.

Пока при изслѣдованiи зависимости значенiй степени отъ показателя мы ограничивались основанiемъ e. На основанiи же изложеннаго въ гл. VI, § 7 E, каждое дѣйствительное положительное число a можетъ быть представлено въ видѣ главнаго значенiя степени основанiя e съ дѣйствительнымъ, однозначно опредѣленнымъ показателемъ. Этотъ показатель, логариѳмъ a при основанiи e, называется также „натуральнымъ логариѳмомъ" числа a и въ дальнѣйшемъ будетъ обозначаться черезъ „$\mathrm{Ln}\, a$". Изъ

$$a = e^{\mathrm{Ln}\, a}$$

слѣдуетъ для каждаго дѣйствительнаго значенiя x:

$$a^x = e^{x \,\mathrm{Ln}\, a} = E(x \,\mathrm{Ln}\, a).$$

Поэтому мы видимъ, что и главное значенiе a^x степени $((a))^x$ можетъ быть представлено для каждаго дѣйствительнаго положительнаго основанiя a въ видѣ ряда, расположеннаго по степенямъ x, въ которомъ x^n имѣетъ коэффицiентъ $\frac{(\mathrm{Ln}\, a)^n}{n!}$. Рядъ для e^x, въ сравненiи съ рядомъ для a^x, имѣетъ лишь то преимущество, что его коэффицiенты особенно просты.

E. Степени съ комплексными показателями и логариѳмы комплексныхъ чиселъ.

I. Степени основанiя e, показатели которыхъ комплексны.

Для всѣхъ дѣйствительныхъ значенiй x въ D было доказано, что

$$e^x = E(x)$$

гариѳмъ числа — 64. $\frac{1}{4}$ какъ логариѳмъ числа — 8. $\frac{1}{6}$ какъ логариѳмъ — 4, $\frac{1}{12}$ какъ логариѳмъ — 2, то каждый изъ этихъ «логариѳмовъ» былъ бы обращенiемъ другой функцiи (а именно, послѣдовательно: функцiй F_1, F_2, F_3, F_6), и числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, слѣдовательно, не были бы значенiями той же самой функцiи.

и

$$((e))^x = E(x)\left[{c \atop s}(2k\pi x)\right] = E(x)\,E(2k\pi x i) = E(x + 2k\pi x i).$$

Такъ какъ степенной рядъ $E(x)$ имѣетъ опредѣленный смыслъ и опредѣленное значеніе для каждаго конечнаго комплекснаго значенія x, то мы опредѣляемъ e^x и $((e))^x$ для комплексныхъ значеній показателя при помощи только что приведенныхъ равенствъ. Это опредѣленіе будетъ обосновано въ F.

II. Натуральные логариөмы комплекснаго числа.

Чтобы имѣть теперь возможность установить смыслъ степени съ комплекснымъ показателемъ и при произвольномъ комплексномъ основаніи $a = A\left[{c \atop s}\,\alpha\right]$, попытаемся опредѣлить число ζ такъ, чтобы главное значеніе

$$e^\zeta = a = A\left[{c \atop s}\,\alpha\right].$$

Для

$$\zeta = \xi + \eta i,$$

гдѣ ξ и η дѣйствительны, это равенство переходитъ въ

$$e^\xi(\cos\eta + i\sin\eta) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

откуда слѣдуетъ

$$e^\xi\cos\eta = A\cos\alpha \quad \text{и} \quad e^\xi\sin\eta = A\sin\alpha$$

Возводя въ квадратъ обѣ части и затѣмъ складывая ихъ, получаемъ

$$e^{2\xi} = A^2.$$

Такъ какъ e^ξ и A суть числа положительныя, то

$$e^\xi = A,$$

слѣдовательно:

$$\xi = \operatorname{Ln} A$$

(въ смыслѣ гл. VI, § 7 E, стр. 351).

Изъ получающихся теперь равенствъ

$$\cos\eta = \cos\alpha \quad \text{и} \quad \sin\eta = \sin\alpha$$

заключаемъ далѣе, что

$$\eta = \alpha + 2k\pi,$$

гдѣ k есть нуль или какое-нибудь цѣлое число.

Поэтому, въ качествѣ рѣшенія уравненія

$$e^{\zeta} = A\left[{c \atop s}\,\alpha\right]$$

получаемъ для ζ безчисленное множество значеній

$$\zeta = \mathrm{Ln}\, A + \alpha i + 2k\pi i,$$

каждое изъ которыхъ называемъ „натуральнымъ логариѳмомъ“ числа $a = A\left[{c \atop s}\,\alpha\right]$ и обозначаемъ „$\ln a$“.

Логариѳмъ, мнимая часть котораго заключена между $-\pi i$ и $+\pi i$ (включая послѣднюю границу) будемъ называть „главнымъ логариѳмомъ“ и обозначать его черезъ „$\mathrm{Ln}\, a$“.

Если, что всегда возможно, α выбрать такъ, чтобы

$$-\pi < \alpha \leqq \pi,$$

то главный логариѳмъ будетъ соотвѣтствовать значенію $k = 0$; тогда, слѣдовательно,

$$\mathrm{Ln}\, a = \mathrm{Ln}\, A + \alpha i$$

и

$$\ln a = \mathrm{Ln}\, a + 2k\pi i = \mathrm{Ln}\, A + \alpha i + 2k\pi i.$$

Если a будетъ дѣйствительнымъ положительнымъ числомъ, слѣдовательно, $a = A$ и $\alpha = 0$, то

$$\mathrm{Ln}\, a = \mathrm{Ln}\, A$$

и

$$\ln a = \mathrm{Ln}\, A + 2k\pi i,$$

т.-е. изъ безчисленнаго множества значеній $\ln a$ лишь главное значеніе, соотвѣтствующее $k = 0$ дѣйствительно, — остальныя всѣ мнимы, напримѣръ,

$$\mathrm{Ln}\, 1 = 0 \quad \text{и} \quad \ln 1 = 2k\pi i.$$

Если a дѣйствительное отрицательное число, слѣдовательно, $a = -A$ и $\alpha = \pi$, то

$$\mathrm{Ln}\, a = \mathrm{Ln}\, A + \pi i$$

и

$$\ln a = \mathrm{Ln}\, A + (2k + 1)\pi i.$$

Слѣдовательно, какъ главное, такъ и всѣ остальныя значенія натуральнаго логариѳма отрицательнаго числа — мнимы, такъ какъ

$(2k+1)$ не можетъ обратиться въ нуль ни при одномъ цѣломъ значеніи k; такъ, напримѣръ,

$$\mathrm{Ln}(-1) = \pi i \quad \text{и} \quad \ln(-1) = (2k+1)\pi i.$$

Мнимое число имѣетъ также лишь мнимые логариѳмы

$$\mathrm{Ln}(i) = \frac{\pi}{2} i \ \text{ и } \ \ln(i) = \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i$$ [1].

III. Степень комплекснаго основанія съ комплекснымъ показателемъ.

Теперь мы въ состояніи опредѣлить степень произвольнаго комплекснаго основанія съ произвольнымъ комплекснымъ показателемъ. Если

$$a = A\left[{c \atop s}\alpha\right], \quad (-\pi < \alpha \leqq \pi).$$

и

$$x = u + iv,$$

гдѣ u, v дѣйствительны, то полагаемъ

$$\begin{aligned}((a))^x = e^{x \ln a} = E(x \ln a) &= \\ = E((u+iv)\,[\mathrm{Ln}\,A + (\alpha + 2k\pi)\,i]) &= \\ = E(u\,\mathrm{Ln}\,A - v(\alpha + 2k\pi) + i\,[v\,\mathrm{Ln}\,A + u(\alpha + 2k\pi)]) &= \\ = E(u\,\mathrm{Ln}\,A - v(\alpha + 2k\pi))\left[{c \atop s}(v\,\mathrm{Ln}\,A + u(\alpha + 2k\pi))\right]&,\end{aligned}$$

---

[1]) Первыми математиками, основательно изложившими вопросъ о существованіи логариѳмовъ отрицательныхъ, а также и мнимыхъ чиселъ, были Лейбницъ и Іоаннъ Бернулли, которые въ 1712 и 1713 гг. долго переписывались по поводу этого вопроса, не придя, однако, къ какому-нибудь соглашенію. Лишь послѣ того, какъ эта переписка была опубликована въ 1745 г., этотъ вопросъ былъ разрѣшенъ Л. Эйлеромъ, который открылъ безконечную многозначность логариѳма и этимъ самымъ устранилъ всѣ трудности и противорѣчія въ теоріи логариѳмовъ. Свое открытіе Эйлеръ впервые высказалъ въ двухъ письмахъ къ d'Alembert'у отъ 15 апрѣля 1747 г. и отъ 19 августа 1747 г., а затѣмъ подробно изложилъ въ трактатѣ: «De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires», Histoire de l'Académie de Berlin, Année 1749, т. V, стр. 139—179, напечатано въ 1751 г. Ср. M. Cantor, Vorlesungen III, стр. 371 и стр. 722—726, и E. Lampe, «Zur Enstehung der Begriffe der Exponentialfunktion und der logarithmischen Funktion eines komplexen Arguments bei Leonhard Euler», въ Festschrift zur Feier der 200. Geburtstages Leonhard Eulers, Leipzig u. Berlin 1907.

и главное значеніе

$$\begin{aligned} a^x = e^{x \operatorname{Ln} a} = E(x \operatorname{Ln} a) = \\ = E((u + iv)(\operatorname{Ln} A + \alpha i)) = \\ = E(u \operatorname{Ln} A - v\alpha + i(v \operatorname{Ln} A + u\alpha)) = \\ = E(u \operatorname{Ln} A - v\alpha)\left[{c \atop s}(v \operatorname{Ln} A + u\alpha)\right]; \end{aligned}$$

напримѣръ,

$$((i))^i = E\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) \quad \text{и} \quad i^i = E\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Если x дѣйствительное число, а, слѣдовательно, $v = 0$, то это опредѣленіе совпадаетъ съ даннымъ въ C опредѣленіемъ степени комплекснаго числа съ произвольнымъ дѣйствительнымъ показателемъ.

IV. Логариѳмы произвольнаго комплекснаго числа при произвольномъ комплексномъ основаніи.

Мы называемъ x логариѳмомъ числа $a = A\left[{c \atop s}\alpha\right]$ при основаніи $g = G\left[{c \atop s}\gamma\right]$, если главное значеніе

$$g^x = a,$$

т.-е. если

$$e^{x \operatorname{Ln} g} = a = e^{\ln a},$$

откуда имѣемъ:

$$x = \frac{\ln a}{\operatorname{Ln} g} = \frac{\operatorname{Ln} A + \alpha i + 2k\pi i}{\operatorname{Ln} G + \gamma i}.$$

Опредѣленіе x становится невозможнымъ, если одновременно

$$\operatorname{Ln} G = 0 \quad \text{и} \quad \gamma = 0,$$

и, слѣдовательно,

$$g = 1.$$

Числитель дроби, полученной для значенія x, многозначенъ, знаменатель однозначенъ. Если g дѣйствительно и положительно, а, слѣдовательно, $\gamma = 0$, знаменатель будетъ дѣйствителенъ, а x дѣйствительнымъ или мнимымъ, смотря по тому, будетъ ли $\ln a$ дѣйствительнымъ или мнимымъ. Слѣдовательно, дѣйствительное отрицательное число не имѣетъ дѣйствительнаго логариѳма ни при какомъ положительномъ основаніи. Умножая числитель и знаменатель дроби на разность $\operatorname{Ln} G - \gamma i$, получимъ:

$$x = \frac{\operatorname{Ln} A \cdot \operatorname{Ln} G + (\alpha + 2k\pi)\gamma + ((\alpha + 2k\pi)\operatorname{Ln} G - \gamma \operatorname{Ln} A)i}{(\operatorname{Ln} G)^2 + \gamma^2}.$$

Достаточнымъ и необходимымъ условіемъ для того, чтобы x былъ дѣйствительнымъ, является существованіе равенства

$$(\alpha + 2k\pi) \operatorname{Ln} G = \gamma \operatorname{Ln} A,$$

которое во всякомъ случаѣ не выполняется ни при какомъ цѣломъ значеніи k, если g есть отличное отъ единицы дѣйствительное положительное, а a дѣйствительное отрицательное число.

F. Формулы обобщенныхъ натуральныхъ логариѳмовъ и обобщенныхъ степеней въ области комплексныхъ чиселъ.

Намъ остается теперь изслѣдовать справедливость формулъ для вычисленій съ логариѳмами и степенями, установленныхъ для натуральныхъ чиселъ уже въ гл. I, § 7 B и § 8 C и распространенныхъ въ слѣдующихъ главахъ на любыя дѣйствительныя числа. Особаго вниманія требуетъ то обстоятельство, что мы теперь имѣемъ дѣло съ равенствами, обѣ части которыхъ имѣютъ безчисленное множество значеній. Намъ, слѣдовательно, придется разсмотрѣть, аналогично тому, какъ это сдѣлано въ изслѣдованіи корней въ B, стр. 427 и д., содержится ли каждое значеніе одной части среди значеній другой. Важнѣйшія теоремы и формулы мы сообщимъ полностью; при доказательствахъ, ради краткости, мы ограничимся лишь указаніями, а въ остальномъ отсылаемъ къ подробному изложенію у Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik (Лейпцигъ 1902, XII. Abcshnitt, Nr. 7 u. 9).

I. Теоремы для натуральныхъ логариѳмовъ.

Если:

$$a_\mu = A_\mu \left[{}^{c}_{s} \alpha_\mu \right], \quad (-\pi < \alpha_\mu \leqq \pi),$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, m,$$

то равенство

1. $$\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_m = \ln (a_1 a_2 \ldots a_m)$$

будетъ „полнымъ равенствомъ“ въ томъ смыслѣ (см. B, стр. 427), что если произвольно выбрать для каждаго логариѳма лѣвой части одно изъ его безчисленныхъ значеній, то лѣвая сумма будетъ равна тогда опредѣленному значенію правой части, и если выбрать для логариѳма произведенія правой части одно изъ его значеній, то для $(m-1)$ слагаемаго лѣвой части можно еще взять произвольное значеніе логариѳма, а для оставшагося m-го слагаемаго придется тогда взять опредѣленное значеніе. Для главныхъ значеній имѣетъ мѣсто равенство

$$\operatorname{Ln} a_1 + \operatorname{Ln} a_2 + \cdots + \operatorname{Ln} a_m = \operatorname{Ln}(a_1 a_2 \ldots a_m)$$

тогда и только тогда, если

$$-\pi < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \leqq \pi,$$

условіе, выполняющееся напр. если числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ всѣ дѣйствительны и положительны.

Доказательство получается очень просто, если положить

$$\ln a_\mu = \operatorname{Ln} A_\mu + \alpha_\mu i + 2 k_\mu \pi i.$$

Равенство

2. $$\ln a_1 - \ln a_2 = \ln(a_1 : a_2)$$

будетъ полнымъ въ томъ же смыслѣ и справедливымъ для главныхъ значеній логариѳмовъ тогда и только тогда, если

$$-\pi < \alpha_1 - \alpha_2 \leqq \pi.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости равенства

3. $$\ln \sqrt[n]{*a} = \frac{1}{n} \ln a,$$

гдѣ n должно быть положительнымъ цѣлымъ числомъ, напишемъ

$$\sqrt[n]{*a} = \sqrt[n]{A}\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

гдѣ k означаетъ одно изъ чиселъ $0, 1, 2, 3 \ldots, (n-1)$, и

$$\ln \sqrt[n]{*a} = \operatorname{Ln} \sqrt[n]{A} + \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) i + 2\lambda\pi i,$$

гдѣ λ означаетъ нуль или какое-либо положительное или отрицательное цѣлое число.

Такъ какъ съ другой стороны.

$$\frac{1}{n} \ln a = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} A + \frac{\alpha}{n} i + \frac{2\mu\pi i}{n}.$$

гдѣ μ также равно нулю или какому-нибудь другому цѣлому числу, то получимъ, какъ достаточное и необходимое условіе для существованія равенства 3:

$$\frac{2k\pi}{n} i + 2\lambda\pi i = \frac{2\mu\pi}{n} i$$

или

$$k + \lambda n = \mu.$$

Если одно изъ значеній лѣвой части 3, т.-е. система значеній k и λ выбрана произвольно, то всегда можно найти значеніе μ, удовлетворяющее этому условію. Обратно, можно каждое цѣлое число μ привести къ виду $k+\lambda n$, гдѣ k и λ суть числа цѣлыя, при чемъ $k<n$; слѣдовательно, и каждому значенію правой части соотвѣтствуетъ одно значеніе лѣвой, поэтому равенство 3 полное.

Для главныхъ значеній корней, а соотвѣтственно и для главныхъ значеній логариѳмовъ, т.-е. для $k=0$, $\lambda=0$, $\mu=0$ условіе $k+\lambda n=\mu$ выполнено; слѣдовательно, имѣетъ мѣсто равенство

$$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\,\mathrm{Ln}\,a.$$

Сдѣлаемъ подобное же изслѣдованіе и равенства

4. $$n\ln a=\ln(a^n)$$

гдѣ n опять цѣлое и положительное число (большее, чѣмъ 1). Получаемъ

$$n\ln a=n\,\mathrm{Ln}\,A+n\alpha i+n\cdot 2\mu\pi i$$

(μ нуль или число цѣлое) и

$$a^n=A^n\left[{}^c_s(n\alpha)\right],$$
$$\ln(a^n)=\mathrm{Ln}\,A^n+n\alpha i+2k\pi i$$

(k нуль или число цѣлое).

Слѣдовательно, условіе справедливости 4 напишется такъ:

$$n\mu=k.$$

Хотя для каждаго цѣлаго значенія μ можно найти цѣлое значеніе k, удовлетворяющее этому условію, однако обратное, т.-е. найти для каждаго цѣлаго k и цѣлое значеніе μ, невозможно; иными словами, хотя каждое значеніе лѣвой части 4 содержится среди значеній правой части, однако не каждое значеніе правой части содержится среди значеній лѣвой. Слѣдовательно, равенство 4 есть неполное [1]). Главному значенію $\ln a$, при на-

---

[1]) Если въ равенствѣ 4 положить $a=-e$ (слѣдовательно, $A=e$, $\alpha=\pi$ и $n=2$, то получимъ равенство $2\ln(-e)=\ln((-e)^2)$. Этимъ равенствомъ (или ему подобнымъ) какъ раньше, такъ и въ послѣднее время нерѣдко старались воспользоваться, чтобы доказать дѣйствительность логариѳма отрицательнаго числа. Одно изъ значеній $\ln((-e)^2)=2+2\pi i+2k\pi i$ и на самомъ дѣлѣ дѣйствительно, а именно, значеніе, соотвѣтствующее $k=-1$. Ему равнымъ

шемъ обычномъ предположеніи $-\pi < \alpha \leqq \pi$, соотвѣтствуетъ значеніе $\mu = 0$. Для справедливости равенства 4, на основаніи соотношенія $n\mu = k$, требуется чтобы и $k = 0$. Главное значеніе $\ln(a^n)$ соотвѣтствуетъ $k = 0$ лишь тогда, если $-\pi < n\alpha \leqq \pi$; слѣдовательно, лишь при этомъ условіи имѣетъ мѣсто 4 для главныхъ значеній.

II. Теоремы для обобщенныхъ степеней.

Равенства

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \text{ и } a^{x-y} = a^x : a^y$$

получаются непосредственно изъ опредѣленія главнаго значенія степени въ Е, стр. 444 и теоремы сложенія показательныхъ функцій.

Равенства.

$$((a))^{x+y} = ((a))^x \cdot ((a))^y \text{ и } ((a))^{x-y} = ((a))^x : ((a))^y$$

вообще говоря, т.-е. при любыхъ значеніяхъ x и y являются неполными. Именно, каждое значеніе лѣвой части содержится среди значеній правой, такъ какъ

$$((a))^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a} \cdot e^{y\ln a} = ((a))^x \cdot ((a))^y$$

и

$$((a))^{x-y} = e^{(x-y)\ln a} = e^{x\ln a} : e^{y\ln a} = ((a))^x : ((a))^y,$$

и если $((a))^x$ и $((a))^y$ образованы при помощи одного и того же значенія $\ln a$, то и $((a))^x \cdot ((a))^y$, а соотвѣтственно и $((a))^x : ((a))^y$, равны тому значенію $((a))^{x+y}$ или $((a))^{x-y}$, которое также соотвѣтствуетъ этому значенію $\ln a$. Если же $((a))^x$ и $((a))^y$ соотвѣтствуютъ различнымъ значеніямъ $\ln a$, то при произвольныхъ значеніяхъ x и y ихъ произведеніе (частное) можетъ и не встрѣтиться среди значеній $((a))^{x+y}$ (сотвѣтственно $((a))^{x-y}$).

Равенства.

2. $$((a))^x \cdot ((b))^x = ((a \cdot b))^x \text{ и } ((a))^x : ((b))^x = ((a : b))^x$$

можетъ быть лишь то значеніе лѣвой части, которое соотвѣтствуетъ цѣлому μ, опредѣляемому изъ соотношенія $2\,\mu = k = -1$. Но такъ какъ такого цѣлаго числа μ не существуетъ, то дѣйствительное значеніе правой части совершенно не встрѣчается среди значеній лѣвой части и «доказательство» дѣйствительности $\ln(-e)$ невѣрно.

будутъ полными, но справедливы для главныхъ значеній лишь тогда, если, или $-\pi<\alpha+\beta\leqq\pi$ (соотвѣтственно $-\pi<\alpha-\beta\leqq\pi$) или x есть число цѣлое.

Доказательство основывается на I, 1 и 2, стр. 445 и 446. Для повѣрки равенства

$$3. \qquad ((a))^{xy}=((((a))^x))^y$$

составимъ, съ одной стороны,

$$((a))^{xy}=e^{xy\ln a}=e^{xy(\mathrm{Ln}\, a+2k\pi i)}$$

и съ другой стороны:

$$((a))^x=e^{x\ln a}=e^{x(\mathrm{Ln}\, a+2\lambda\pi i)}$$
$$((((a))^x))^y=e^{y(x(\mathrm{Ln} a+2\lambda\pi i)+2\mu\pi i)},$$

гдѣ k, λ, μ могутъ быть нулями или какими-нибудь цѣлыми числами.

Равенство 3 удовлетворяется, если

$$xy(\mathrm{Ln}\, a+2k\pi i)=y(x(\mathrm{Ln}\, a+2\lambda\pi i)+2\mu\pi i)+2\nu\pi i,$$

гдѣ ν также есть нуль или число цѣлое, или если

$$xyk=xy\lambda+y\mu+\nu.$$

Если дано опредѣленное значеніе $((a))^{xy}$, т.-е. если дано k, то числа λ, μ и ν можно всегда опредѣлить такъ, что это условіе будетъ выполнено; слѣдуетъ лишь положить $\lambda=k$ и $\mu=0$, $\nu=0$. Поэтому каждое значеніе $((a))^{xy}$ заключается среди значеній $((((a))^x))^y$. Если мы будемъ исходить изъ опредѣленнаго значенія правой части и, слѣдовательно, λ и μ будутъ имѣть указанныя значенія, то, вообще говоря, т.-е. при произвольныхъ значеніяхъ x, y, не всегда возможно будетъ найти цѣлыя числа k, ν, удовлетворяющія этому условію. Слѣдовательно, равенство 3 при произвольныхъ значеніяхъ x и y — неполное.

Далѣе, пусть главное значеніе будетъ

$$a^x=e^{x\,\mathrm{Ln}\, a},$$

или для

$$x=u+vi,\ \ \mathrm{Ln}\, a=\mathrm{Ln}\, A+\alpha i$$
$$a^x=e^{u\,\mathrm{Ln}\, A-v\alpha+i\,(v\,\mathrm{Ln}\, A+u\alpha)}.$$

Показатель степени числа e тогда и только тогда равенъ $\mathrm{Ln}\,(a^x)$, если

$$-\pi<v\,\mathrm{Ln}\, A+u\alpha\leqq\pi.$$

Во всякомъ же случаѣ можемъ опредѣлить цѣлое, положительное или отрицательное, число m такъ, что

$$-\pi < v \operatorname{Ln} A + u\alpha + 2m\pi \leqq \pi.$$

Тогда имѣетъ мѣсто:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(a^x) &= u \operatorname{Ln} A - v\alpha + i(v \operatorname{Ln} A + u\alpha + 2m\pi) = \\ &= x \operatorname{Ln} a + 2m\pi i\end{aligned}$$

и поэтому

$$(a^x)^y = e^{y(x \operatorname{Ln} a + 2m\pi i)}.$$

Такъ какъ теперь

$$a^{xy} = e^{xy \operatorname{Ln} a},$$

то равенство 3 имѣетъ мѣсто для главныхъ значеній тогда и только тогда, если

$$y(x \operatorname{Ln} a + 2m\pi i) = xy \operatorname{Ln} a + 2k\pi i$$

(гдѣ $k = 0$ или цѣлому числу) или если

$$my = k.$$

Согласно этому условію k можно опредѣлить, во-первыхъ, если при произвольномъ y число m равно нулю, т.-е. если $-\pi < v \operatorname{Ln} A + u\alpha \leqq \pi$ и, во-вторыхъ, если при m отличномъ отъ нуля произведеніе my есть цѣлое число.

Предметный указатель

(числа означаютъ №№ страницъ.)